ИНВАРИАНТНОСТЬ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

НИКИТА ЕВСЕЕВ

Изучаются измеримые отображения $\varphi : D \to D'$, порождающие ограниченный оператор вложения весовых пространств Соболева $L^1_p(D', v)$ и $L^1_q(D, u)$ на группе Карно $\mathbb{G}$. Получены необходимые и достаточные условия аналитических свойств таких отображений, в описании которых применяется весовая функция искажения.

Группа Карно $\mathbb{G}$ это связная односвязная стратифицированная нильпотентная группа Ли. Ее алгебра Ли $\mathbb{G}$ является прямой суммой подпрострасть: $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, и $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ для $j = 1, \ldots, m-1$, тогда как $[V_1, V_m] = \{0\}$. Пространство V_1 называется горизонтальным подпространством.

Пусть D — открытое подмножество $\mathbb{G}$ и пусть $w : \mathbb{G} \to [0, \infty)$ — локально суммируемая неотрицательная (*весовая*) функция. Весовое пространство Соболева $W^1_p(D, w)$ ($L^1_p(D, w)$), $1 < p < \infty$, это пространство локально интегрируемых функций, дифференцируемых в обобщенном смысле $f : D \to \mathbb{R}$, снабженное следующей нормой (полунормой):

$$\|f \mid W^1_p(D, w)\| = \Big(\int\limits_D |f|^p(x) w(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_D |\nabla f|^p(x) w(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}};$$

$$\|f \mid L^1_p(D, w)\| = \Big(\int\limits_D |\nabla f|^p(x) w(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{p}};$$

где ∇f — *обобщенный горизонтальный градиент*, $\nabla f = (X_1 f, \ldots, X_{n_1} f)$. Векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n_1}$ образуют базис V_1, $n_1 = \dim V_1$.

Класс Макенхаупта A_p. Функция $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, если w локально интегрируемая функция такая, что

$$\sup_{B \subset \mathbb{G}} \Big(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B w\, dx\Big)\Big(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B w^{\frac{1}{1-p}}\, dx\Big)^{p-1} = c_{w,p} < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам B из $\mathbb{G}$.

Ограниченный оператор композиции. Отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор $\varphi^* : C^\infty(D') \cap L^1_p(D', v) \to L^1_q(D, u)$ по правилу композиции: $\varphi^* f = f \circ \varphi$, если

$$\big\|\varphi^* f \mid L^1_q(D, u)\big\| \leq K \big\|f \mid L^1_p(D', v)\big\|.$$

Отображение φ имеет *конечное весовое искажение*, если горизонтальный дифференциал $D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве $Z_v = \{x \in D | J(x, \varphi) v(\varphi(x)) = 0\}$. *Весовая функция искажения* для такого отображения φ определяется следующим образом:

$$D' \ni y \mapsto H^{u,v}_q(y) = v^{-\frac{1}{p}}(y) \Big(\sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v)} \frac{|D\varphi|^q(x) u(x)}{|J(x, \varphi)|} \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке проектами Научные школы: НШ-921.2012.1; и ФЦПК – заявка № 2012-1.1-12-000-1003-014.

Теорема 1.

Отображение $\varphi : D \to D'$ *класса* $ACL(D)$ *порождает ограниченный оператор* $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D, u)$, $1 \leq q \leq p < \infty$, *тогда и только тогда, когда* φ *имеет ограниченное весовое искажение и* $H^{u,v}_q(\cdot) \in L_\varkappa(D')$, *где* $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Норма оператора* φ^* *эквивалентна* $H^{u,v}_{p,q}(D') = \|H^{u,v}_q(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\|$.

Теорема 2.

Если весовая функция v *принадлежит классу* A_p, *тогда оператор* φ^* *может быть продолжен по непрерывности на пространство* $L^1_p(D', v)$.
Продолженный оператор $\varphi^* : L^1_p(D', v) \to L^1_q(D, u)$ *удовлетворяет следующим условиям.*

1) *Если* $f \in L^1_p(D', v)$ *— квазинепрерывный представитель, тогда* $f \circ \varphi$ *определена почти всюду и* $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ *п. в.*

2) *Если две квазинепрерывные функции* $f_1, f_2 \in L^1_p(D', v)$ *различаются на множестве емкости ноль, то* $f_1 \circ \varphi$ *и* $f_2 \circ \varphi$ *различаются на множестве меры ноль.*

3) *Отображение* $\varphi^* : f \mapsto \widetilde{f} \circ \varphi$, *где* $\widetilde{f}$ *квазинепрерывный представитель* f, *является ограниченным оператором.*

В доказательстве теорем 1 и 2 существенно применяются методы работ Водопьянова С. К. и Ухлова А. Д., где получены критерии, при выполнении которых измеримые отображения индуцируют ограниченные операторы как классов Соболева на группах Карно, так и весовых классов Соболева в евклидовых пространствах [1, 2]. Для вывода свойств весовых классов Соболева на группах Карно применяются, в частности, методы работы [3].

Список литературы

[1] S. Vodop'yanov and A. Ukhlov, "Mappings Associated with Weighted Sobolev Spaces", *Contemporary Mathematics*, Vol. 455, 369–382 (2008).

[2] S. Vodop'yanov and A. Ukhlov, "Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev Spaces. I", *Siberian Advances in Mathematics*, Vol. 14, No. 4, 78–125 (2004).

[3] T. Kilpeläinen, "Weighted Sobolev spaces and capacity", *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Series A. I. Mathematica*, Vol. 19, 95–113 (1994).

Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: nikita2.evseev@gmail.com