# К ТЕОРЕМЕ ГРОМОВА ОБ ОДНОРОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМАТИЗАЦИИ

АЛЕКСАНДР ГРЕШНОВ

На некоторой области $U \subset \mathbb{R}^N$ рассмотрим базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^1(U)$, т. е. $\operatorname{rank}\langle X_1,\dots,X_N\rangle(x) = N \quad \forall x \in U$, $\sup\limits_{x\in U}\|X(x)\| < C_U = \text{const}$. Зафиксируем точку $g \in U$ и рассмотрим отображения $\theta_g : (a_1,\dots,a_N) \to \exp(X_a)(g)$, где $a = (a_1,\dots,a_N)$, $X_a = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i X_i$, и $\vartheta_g^i : (a_1,\dots,a_N) \to \exp(X_{i_N}) \circ \dots \exp(X_{i_1})(g)$, $(i_1,\dots i_N) = \pi_i(1,\dots,N)$, где $\pi_i$ — некоторая перестановкаовка набора $(1,\dots,N)$, а символом $\exp(Y)(g)$ мы обозначаем концевую точку интегральной линии $\exp(tY)(g)$ векторного поля $Y$ единичной временной длины, выпущенной из точки $g$. Из известных фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, см., например, [1], что для каждой точки $g \in U$ найдется некоторая окрестность начала координат $O_g \subset \mathbb{R}^N$ такая, что отображения $\theta_g$, $\vartheta_g^i$ будут диффеоморфизмами на $O_g$. Отобажения $\theta_g$, $\vartheta_g^i$ называются каноническими координатами 1-го и 2-го рода соответственно, см., например, [2]; отображение $\theta_g$ также называют экспоненциальным отображением. Символом $\vartheta_g$ обозначим координатное отображение 2-го рода, индуцированное перестановкой $\pi(1,\dots,N) = (N, N-1,\dots,1)$. Предположим, что базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^r(U)$, $r \geq 1$, формально градуированные степенями, т. е. каждому векторному полю $X_i$ присвоено некоторое натуральное число $\deg X_i$, принадлежащее множеству $\{1,\dots,N\}$, $\Upsilon = \max\limits_{i=1,\dots,N} \deg X_i$, удовлетворяют в $U$ следующей таблице коммутаторов $[X_i, X_j] = \sum\limits_{\deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} C_{ij}^k X_k$, $C_{ij}^k \in C^{r-1}(U)$. Тогда говорим, что базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ удовлетворяют в $U$ условию $(+\deg)$. В первой половине 90-х годов прошлого столетия М. Громов в своей известной работе [3] опубликовал следующую теорему 1 о нильпотентной аппроксимации $C^1$-гладких базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$.

**Теорема 1.**
*В некоторой окрестности начала координат $O_g \subset \mathbb{R}^N$ имеют место следующие равномерные сходимости*: $(\delta_{1/\varepsilon})_* \varepsilon^{\deg X_i} (\vartheta_g^{-1})_* X_i \to_{\varepsilon\to 0} \widehat{X}_i^g$, $i = 1,\dots,N$. *Векторные поля $\{\widehat{X}_i^g\}_{i=1,\dots,N}$ в окрестности $O_g$ удовлетворяют следующей таблице коммутаторов*

$$[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g] = \sum_{\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k} \widehat{C}_{ij}^k \widehat{X}_k^g, \quad \widehat{C}_{ij}^k = C_{ij}^k(g) = \text{const},$$

*и образуют базис некоторой алгебры Ли $L_g$ со структурными константами $\widehat{C}_{ij}^k$.*

Здесь $\delta_{1/\varepsilon}(x_1,\dots,x_N) = (\varepsilon^{-\deg X_i} x_1,\dots,\varepsilon^{-\deg X_N} x_N)$. Векторные поля $\{(\theta_g)_* \widehat{X}_i^g\}_{i=1,\dots,N}$ называются однородной нильпотентной аппроксимацией векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ в окрестности точки $g$, см. [2]. Однородная нильпотентная аппроксимация играет важную роль в теории субэллиптических уравнений [4], в задачах оптимального контроля, и др. Следует отметить, что методы построения однородной нильпотентной аппроксимации в $C^\infty$-случае были достаточно хорошо разработаны в 70–90 гг. прошлого столетия, см. [2, 5]. В начале 2000-х годов интерес к теореме Громова о нильпотентной аппроксимации был существенно инициирован вопросами неголономной геометрии при минимальных предположениях на гладкость векторных полей, см., например, [6, 7]. Детальное рассмотрение

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ, код 11-01-00819-а.

схемы доказательста теоремы 1 выявило ее недостатки. В частности, в работе С. К. Водопьянова и М. Б. Кармановой [7] в $\mathbb{R}^3$ был приведен пример отображения $\vartheta_g$ класса $C^\infty$, для которого не выполняются свойства, лежащие в основе рассуждений Громова. Позже теорема об однородной нильпотентной аппроксимации для базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, была доказана для канонических векторных полей класса $C^1$ (и, как следствие, для общих векторных полей класса $C^2$) [8], для общих векторных полей класса $C^{1,\alpha}$ [9] методами, отличными от подхода работы [3].

Используя подход работы [8], основанный на классическом выводе второй теоремы Ли [10], нами установлена следующая

**Теорема 2 о нильпотентной аппроксимации $C^1$-гладких базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$.**

*В некоторой окрестности начала координат $O_g \subset \mathbb{R}^N$ имеют место следующие равномерные сходимости*: $\delta_{1/\varepsilon}\varepsilon^{\deg X_i}(\theta_g^{-1})_* X_i \to_{\varepsilon\to 0} \widehat{X}_i^g$, $i = 1,\dots,N$. *Векторные поля* $\{\widehat{X}_i^g\}_{i=1,\dots,N}$ *в окрестности $O_g$ удовлетворяют следующей таблице коммутаторов*

$$[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g] = \sum_{\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k} \widehat{C}_{ij}^k \widehat{X}_k^g, \quad \widehat{C}_{ij}^k = C_{ij}^k(g) = \mathrm{const},$$

*и образуют базис некоторой алгебры Ли $L_g$ со структурными константами $\widehat{C}_{ij}^k$.*

## Список литературы


[1] Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, М.: Физматлит, (1961).

[2] A. Belläiche, “The tangent space in sub-Riemannian geometry”, *Sub-Reimannian geometry*, Basel: Birkhäuser, 1–78 (1996).

[3] M. Gromov, “Carnot-Caratheodory spaces seen from within”, *Sub-Reimannian geometry*, Basel: Birkhäuser, 79–323 (1996).

[4] L. P. Rothchild, E. S. Stein, “Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups”, *Acta Math.*, 137, 247–320 (1976).

[5] G. Metivier, “Fonction spectrale et valeurs proposes d’une classe d’operateurs”, *Comm. Partial Differential Equations*, 1, 479–519 (1976).

[6] A. Montanari, D. Morbidelli, “Nonsmooth Hërmander vector fields and their controlled balls”, `arXiv:0812.2369v1`

[7] С. К. Водопьянов, М. Б. Карманова, “Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей”, *Докл. АН.*, 422, No. 5, 583–588 (2008).

[8] А. В. Грешнов “О применении методов группового анализа дифференциальных уравнений для некоторых систем $C^1$-гладких некоммутирующих векторных полей”, *Сиб. мат. журн.*, 50, No. 1, 47–62 (2009).

[9] М. Б. Карманова, “Сходимость масштабированных векторных полей и локальная аппроксимационая теорема на пространствах Карно — Каратеодори и приложения”, *Докл. АН.*, 440, No. 6, 736–742 (2011).

[10] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М.: Наука, (1978).



Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 630090, Россия

*E-mail address*: `greshnov@math.nsc.ru`