ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ КАТЕГОРИИ ЧАСТИЧНОГО ДЕЙСТВИЯ МОНОИДА

АХМЕТ ХУСАИНОВ

Пусть S – множество. Рассмотрим произвольный моноид M с частичным действием справа $(s, \mu) \mapsto s \cdot \mu$ на элементах $s \in S$ с помощью элементов $\mu \in M$. *Категорией $K(S)$ частичного действия M на S* называется малая категория, объектами которой служат элементы $s \in S$, а морфизмами – тройки (s_1, μ, s_2) элементов $s_1, s_2 \in S$, $\mu \in M$, удовлетворяющих равенству $s_1 \cdot \mu = s_2$. Композиция определяется как $(s_2, \mu_2, s_3) \cdot (s_1, \mu_1, s_2) = (s_1, \mu_1\mu_2, s_3)$.

Данная работа посвящена группам гомологий категории $K(S)$ и их приложениям для случая, когда M – свободный частично-коммутативный моноид.

Пусть Ab – категория абелевых групп. Для произвольной малой категории $\mathcal{C}$ обозначим через $\mathfrak{F}\mathcal{C}$ *категорию факторизаций* в смысле [1]. Пусть $\mathcal{C}^{op}$ обозначает двойственную категорию. Для произвольных функтора $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ между малыми категориями и функтора $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ обозначим через $Lan^T F : \mathcal{D} \to \mathrm{Ab}$ левое расширение Кана функтора F вдоль T. Пусть $G : (\mathfrak{F}\mathcal{C})^{op} \to \mathrm{Ab}$ – функтор. *Группы гомологий Бауэса-Виршинга* $H_n^{BW}(\mathcal{C}, G)$, $n \geq 0$, определяются как значения $\varinjlim_n^{(\mathfrak{F}\mathcal{C})^{op}} G$ левых производных функторов копредела $\varinjlim : \mathrm{Ab}^{(\mathfrak{F}\mathcal{C})^{op}} \to \mathrm{Ab}$ на функторе G.

Рассматривая моноид M как категорию с единственным объектом, определим функтор $U : K(S) \to M^{op}$, действующий на морфизмах как $(s_1, \mu, s_2) \mapsto \mu$. Функтор U будет определять функтор между категориями факторизаций $\mathfrak{F}(U) : \mathfrak{F}(K(S)) \to \mathfrak{F}(M^{op})$.

Теорема.

Для произвольных моноида M, действующего частично справа на множестве S и функтора $G : (\mathfrak{F}K(S))^{op} \to \mathrm{Ab}$ существуют изоморфизмы

$$H_n^{BW}(K(S), G) \cong H_n^{BW}(M^{op}, Lan^{(\mathfrak{F}(U))^{op}} G),$$

для всех $n \geq 0$.

Пусть E – множество, $I \subseteq E \times E$ – антирефлексивное симметричное отношение. Моноид, порожденный множеством E и заданный с помощью определяющих соотношений $ab = ba$ для всех $(a, b) \in I$, называется *свободным частично-коммутативным* или *моноидом трасс* и обозначается $M(E, I)$.

Рассмотрим применение теоремы для моноида трасс $M(E, I)$. Оно приводит к алгоритму вычисления сингулярных групп гомологий $H_n^{sing}(B(K(S)))$ классифицирующего пространства категории $K(S)$ и позволяет решить проблему 1 из работы [2]. С этой целью определим произвольное отношение линейного порядка на E и обозначим при $n > 0$

$$T_n(E, I) = \{(a_1, \cdots, a_n) | a_i < a_j \text{ и } (a_i, a_j) \in I, \text{ для всех } 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Положим $T_0(E, I) = \{1\}$ (единица моноида). Для частичного действия моноида трасс $M(E, I)$ на множестве S для всех $n \geq 0$ введем множества

$$Q_n(S, E, I) = \{(x, a_1, \cdots, a_n) \in S \times T_n(E, I) | x \cdot a_1 \cdots a_n \in S\}$$

В частности $Q_0(S, E, I) = S$.

Для произвольного множества X обозначим через LX свободную абелеву группу порожденную X. Моноид трасс $M(E, I)$ называется локально конечномерным, если E не содержит бесконечных подмножеств попарно перестановочных элементов.

Работа выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, № 2011-ПР-054.

Следствие 1.

Пусть S – множество с правым частичным действием локально конечномерного моноида трасс $M(E,I)$. Тогда группы $H_n^{sing}(B(K(S)))$ при $n \geq 0$ будут изоморфны группам гомологий комплекса

$$0 \leftarrow L(S) \overset{d_1}{\leftarrow} LQ_1(S,E,I) \overset{d_2}{\leftarrow} LQ_2(S,E,I) \leftarrow \cdots \leftarrow LQ_{n-1}(S,E,I) \overset{d_n}{\leftarrow} LQ_n(S,E,I) \leftarrow \cdots,$$

дифференциалы которого определены по формулам $d_n(x, a_1, \cdots, a_n) =$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(x \cdot a_i, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n) - \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(x, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

В работе [3] введены направленные группы гомологий. Рассмотрим функторы $\Delta^0\mathbb{Z} : K(S) \to \mathrm{Ab}$ и $\Delta^1\mathbb{Z} : K(S)^{op} \to \mathrm{Ab}$, принимающие на объектах постоянные значения $\Delta^0\mathbb{Z}(s) = \Delta^1\mathbb{Z}(s) = \mathbb{Z}$ для всех $s \in S$ и определенные при $\varepsilon \in \{0,1\}$ на морфизмах по формуле

$$\Delta^\varepsilon\mathbb{Z}(s \overset{w}{\to} s') = \begin{cases} 1_{\mathbb{Z}}, & \text{если } w = 1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Направленными группами гомологий множества S с частичным правым действием моноида трасс $M(E,I)$ называются абелевы группы

$$H_n^0(S, M(E,I)) = \varinjlim\nolimits_n^{K(S)} \Delta^0\mathbb{Z} \text{ и } H_n^1(S, M(E,I)) = \varinjlim\nolimits_n^{K(S)^{op}} \Delta^1\mathbb{Z}.$$

Следствие 2.

Пусть S – множество с правым частичным действием локально конечномерного моноида трасс $M(E,I)$. Для каждого фиксированного $\varepsilon \in \{0,1\}$ обозначим через $(LQ_\diamond(S,E,I), d^\varepsilon)$ комплекс, состоящий из абелевых групп и гомоморфизмов

$$0 \leftarrow LS \overset{d_1^\varepsilon}{\longleftarrow} LQ_1(S,E,I) \leftarrow \cdots \leftarrow LQ_{n-1}(S,E,I) \overset{d_n^\varepsilon}{\longleftarrow} LQ_n(S,E,I) \leftarrow \cdots$$

где

$$d_n^0(x, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(x, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n),$$

$$d_n^1(x, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(xa_i, a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n).$$

Тогда будут иметь место изоморфизмы $H_n^\varepsilon(S, M(E,I)) \cong H_n(LQ_\diamond(S,E,I), d^\varepsilon)$.

Это следствие показывает, что группы гомологий Губо полукубического множества, соответствующего множеству с частичным действием моноида трасс, будут изоморфны группам гомологий Бауэса-Виршинга категории частичного действия этого моноида с коэффициентами в некоторых функторах.

Список литературы

[1] H.-J. Baues, G. Wirsching, "Cohomology of small categories", *J. Pure Appl. Algebra*, 38, No. 2-3, 187–211 (1985).

[2] A. Husainov, "On the homology of small categories and asynchronous transition systems", *Homology Homotopy Appl.*, 6, No. 1, 439–471 (2004).

[3] A. Husainov, "The Homology of Partial Monoid Actions and Petri Nets", *Appl. Categor. Struct.*, DOI: 10.1007/s10485-012-9280-9 Springer (2012).

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия

E-mail address: husainov51@yandex.ru