

1-КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА ГРУППЕ ПОВОРОТОВ-СДВИГОВ

ДАРЬЯ ИСАНГУЛОВА

Мы исследуем 1-квазиконформные отображения группы поворотов-сдвигов \mathcal{RT} (roto-translation group). Группа поворотов-сдвигов — это трехмерное топологическое многообразие, диффеоморфное $\mathbb{R}^2 \times S^1$, с координатами (x, y, θ) и умножением

$$(x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta) = (x_0 + x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0, y_0 + x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0, \theta_0 + \theta).$$

Левоинвариантные векторные поля

$$A = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad C = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[A, B] = -C, \quad [C, B] = A, \quad [A, C] = 0.$$

Группа \mathcal{RT} является субримановым многообразием с горизонтальным подрасслоением $H = \text{span}\{A, B\}$. Метрика Карно — Каратеодори задается как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки (кусочно-гладкая кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор принадлежит H почти всюду). При этом локально геометрия группы поворотов-сдвигов близка к первой группе Гейзенберга \mathbb{H}^1 , поскольку \mathbb{H}^1 является касательным конусом к \mathcal{RT} в смысле Громова [2]. Отметим, что группа поворотов-сдвигов возникает в вопросах моделирования неголономного движения и оптимального контроля. Подробное описание группы \mathcal{RT} с явным видом геодезических можно найти в книге [1], изометрии на \mathcal{RT} найдены в работе автора [3].

Теорема.

Всякое C^3 -гладкое 1-квазиконформное отображение на группе \mathcal{RT} является изометрией и есть композиция следующих отображений:

$$\begin{aligned} l_{(x_0, y_0, \theta_0)}(x, y, \theta) &= (x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta) && \text{— левый сдвиг,} \\ \iota(x, y, \theta) &= (-x, y, -\theta) \\ \sigma(x, y, \theta) &= (-x, -y, \theta) && \text{— отражения.} \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы мы используем инфинитезимальный генератор однопараметрической группы 1-квазиконформных отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls, J. T. Tyson, *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem*, Birkhäuser: Basel – Boston – Berlin (2007).
- [2] M. Gromov, “Carnot — Carathéodory spaces seen from within”, *Sub-Riemannian Geometry*, Basel: Birkhäuser, 79–323 (1996).
- [3] Д. В. Исангулова, “Изометрии на группе поворотов-сдвигов”, *Вестник КемГУ, Вещественный анализ*, 3/1, 243–249 (2011).

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН, НОВОСИБИРСК, 630090, РОССИЯ
E-mail address: dasha@math.nsc.ru