

# 24-КЛЕТОЧНИК КОКСТЕРА И ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ ОКТАЭДРА

АЛЕКСАНДР КОЛПАКОВ

В соответствии с классификацией, полученной Кокстером [1], существуют всего шесть регулярных четырёхмерных евклидовых полиэдра. Одним из них – так называемый 24-клеточник, являющийся, в некотором смысле, четырёхмерным аналогом октаэдра. Именно, соответствующий ему символ Шлефли есть  $\{3, 4, 3\}$ . Таким образом 24-клеточник имеет 24 трёхмерные грани, являющиеся регулярными октаэдрами, 96 двумерных треугольных грани, 96 рёбер и 24 вершины. Линк каждой вершины является комбинаторным кубом, то есть двойственной октаэдру фигурой.

Исходя из некоторых общих фактов гиперболической геометрии можно показать, что 24-клеточник и только он реализуем как идеальный прямоугольный полиэдр в четырёхмерном гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^4$ , в смысле работы [2].

В настоящей работе доказаны следующие два утверждения:

## Теорема 1.

Среди всех идеальных прямоугольных полиэдров в  $\mathbb{H}^4$ , идеальный прямоугольный 24-клеточник имеет минимальный объём. Идеальный прямоугольный полиэдр минимального объёма есть 24-клеточник, с точностью до изометрии.

## Теорема 2.

Среди всех идеальных прямоугольных полиэдров в  $\mathbb{H}^4$ , идеальный прямоугольный 24-клеточник имеет минимальное число трёхмерных граней. Идеальный прямоугольный полиэдр с минимальным число трёхмерных граней есть 24-клеточник, с точностью до изометрии.

Важную роль в доказательстве упомянутых теорем является комбинаторная классификация многогранников производных от октаэдра, приведенная в [3].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, 3rd ed. New York: Dover, (1973).
- [2] L. Potyagailo, È. Vinberg, “On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces”, *Comment. Math. Helv.* 80, No. 1, 63–73 (2005).
- [3] M. Deza, M. Shtogrin, “Octahedrites”, *Symmetry Cult. Sci.*, 11, No. 1-4, 27–64 (2000).

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН, НОВОСИБИРСК, 630090, РОССИЯ  
E-mail address: kolpakov.alexander@gmail.com