РЕГУЛЯРНОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ НА ПСЕВДОСФЕРАХ ДЕ СИТТЕРА

АНДРЕЙ КОСТИН

В работе исследуется регулярность асимптотических линий на поверхностях постоянной кривизны с индефинитной метрикой в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве.

Разберём один из случаев. В пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

рассмотрим поверхность, заданную радиусом-вектором $\overrightarrow{\rho} = \overrightarrow{\rho}(x^1, x^2, x^3)$, где

$$x^1 = \sinh(u) - \arctan(\sinh(u)), \quad x^2 = \cosh(u)\sinh(v)), \quad x^3 = \cosh(u)\cosh(v).$$

На этой поверхности локально реализуется метрика плоскости де Ситтера. Профиль (начальный меридиан) поверхности представляет собой один из псевдоевклидовых аналогов трактрисы. При значении $u = 0$ регулярность поверхности нарушается. Уравнение

$$-\tanh(u)du^2 + \cosh(u)\sinh(u)dv^2 = 0$$

задаёт два семейства асимптотических линий:

$$2\arctan(e^u) - v = c_1, \quad 2\arctan(e^u) + v = c_2.$$

Введём на поверхности новые локальные координаты:

$$x = -\arctan(e^u) + \frac{v}{2},$$

$$y = \arctan(e^u) + \frac{v}{2}.$$

Первая квадратичная форма поверхности примет вид:

$$1 = -\tanh^2(u)du^2 + \cosh^2 v(u)dv^2 = dx^2 + 2\cosh(2u)dxdy + dy^2$$

Отсюда следует, что асимптотическая сеть является чебышёвской. Сетевой угол удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sinh(z)$$

[1, 2]. Исследуем на регулярность асимптотические линии первого семейства. Для этого подставим значение $v = 2\arctan(\exp^u) - c_1$ в параметрические уравнения поверхности. Пусть $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(x^1(u), x^2(u), x^3(u))$,-радиус-вектор линии этого семейства, где

$$x^1 = \sinh(u) - \arctan(\sinh(u)), \quad x^2 = \cosh(u)\sinh(2\arctan(e^u) - c_1)),$$

$$x^3 = \cosh(u)\cosh(2\arctan(e^u) - c_1).$$

Тогда $\overrightarrow{r}_u^2 = 1 - \tanh^2(u) > 0$. Поэтому обобщённые асимптотические линии регулярны всюду, в том числе и в точках ребра возврата, в которых нарушается регулярность самой поверхности. Аналогичная картина имеет место и для асимптотических линий второго семейства. Регулярность же сети в точках ребра возврата нарушается, поскольку касательные векторы к линиям обоих семейств в точках ребра возврата коллинеарны касательным векторам к псевдоевклидовой окружности (аффинной гиперболе), служащей этим ребром возврата.Если ограничиться одной полостью поверхности, то можно также встать на такую точку зрения, что при касании с ребром возврата асимптотические линии одного семейства переходят в асимптотические линии другого семейства. Эти результаты, характеризующие асимптотические линии на "бабочке"де Ситтера, аналогичны результатам об

асимптотических линиях на воронке Бельтрами-Миндинга [3, 4]. Для псевдосфер де Ситтера и Бельтрами-Миндинга имеют место связи рассматриваемых вопросов с "эволютно-эвольвентными"свойствами их меридианов.

Список литературы

[1] S. S. Chern, “Geometrical interpretation of sinh-Gordon equation. Selected Papers”, V.1-4-Springer-Verlag, Berlin-New-York-V.4, 63–69 (1987–1989).

[2] Р. Ф. Галеева, Д. Д. Соколов, “О геометрической интерпретации решений некоторых нелинейных уравнений математической физики”, *В сб. Исследования по теории поверхностей в римановых пространствах*, Л., 8–22 (1984).

[3] Э. Г. Позняк , Е. В. Шикин, *Дифференциальная геометрия*, М. Изд-во МГУ, (1990).

[4] В. И. Ритус, “Асимметрия релятивистского закона сложения скоростей относительно их перестановки и неевклидова геометрия”, *УФН*, 178, 739–752 (2008).

ЕФ КНИТУ–КАИ им. А. Н. Туполева, г. Елабуга, 423603, Россия

E-mail address: kostin_andrei@mail.ru