КОГОМОЛОГИИ СВОБОДНЫХ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ МОНОИДОВ И ИХ ДЕЙСТВИЙ НАД ПУНКТИРОВАННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

ВИКТОР ЛОПАТКИН

В докладе будет рассказано про когомологий свободных частично коммутативных моноидов и их действия на пунктированных множествах.

Определение.

Пусть E — множество, I — антирефлексивное симметричное отношение на E. Моноид, заданный с помощью множества E и соотношений $ab = ba$, выполненных для всех пар $(a, b) \in I$, обозначается через $M(E, I)$ и называется свободным частично коммутативным моноидом.

Рассмотрим множество $X^\bullet_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n, *\}$ над которым справа действует свободный частично коммутативный моноид $X^\bullet_n \times M(E, I) \to X^\bullet_n$, такие множества появляются в теории параллельных вычислительных систем [1,2,3] (асинхронные системы переходы), эти множества будем называть $M(E, I)$-множествами или просто M-множествами. С каждым таким множеством свяжем категорию $K_*(X^\bullet_n, M)$[3], объектами которой являются элементы множества $X^\bullet_n$, а морфизмами тройки вида $(x, \mu, x') = x \xrightarrow{\mu} x'$, где $x, x' \in X^\bullet_n$, а $\mu \in M(E, I)$, причём $x \cdot \mu = x'$. Заметим, что если $X^\bullet = \{*\}$, то $K_*(X^\bullet, M) = M^{op}$, то есть моноид рассматриваем как категорию с одним объектом M, а морфизмы — элементы этого объекта.

Рассмотрим функтор $S : K_*(X^\bullet, M) \to M^{op}$, который все объекты категории $K_*(X^\bullet, M)$ переводит в один объект категории M^{op}, а на морфизмах имеем $(x, \mu, x') \mapsto \mu$. Двойственно к [2, Theorem 5.3] получаем

Теорема 1.

Пусть имеем функтор $F : K_*(X^\bullet, M) \to R\text{-mod}$ в категорию R-модулей, где R — коммутативное кольцо с единицей. Тогда имеет место изоморфизм

$$H^*\left(K_*(X^\bullet, M), F\right) \cong H^*\Big(M^{op}, \prod_{x \in X^\bullet} F(x)\Big).$$

Когомологии свободного частично коммутативного моноида можно вычислить используя резольвенту [3]

$$\dots \to F_n \xrightarrow{\delta_n} F_{n-1} \to \dots \to F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \to 0,$$

где $F_n = \bigoplus\limits_{(e_1,\dots,e_n) \in Q_n E} \mathbb{Z}M(e_1, \dots, e_n)$ и $\delta_n(e_1, \dots, e_n, 1) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k (e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n, 1)$, здесь $Q_n E$ состоит из всех n коммутирующих между собой элементов E.Таким образом мы получаем комплекс полукубических когомологий[5,6]. В работе [7] было введено кольцо полукубических когомологий с коэффициентами в постоянном функторе, значение которого — коммутативное кольцо с единицей. Следующая теорема призвана обобщить этот результат.

При поддержки РФФИ, грант № 12-01-90811 (научный проект молодых учёных под руководством кандидатов и докторов наук в ведущих организациях Российской Федерации).

Теорема 2.

Группа когомологий $H^*\left(K_*(X^\bullet, M), F\right)$, *где* $F : K_*(X^\bullet, M) \to R\text{-mod}$, *превращается в кольцо когомологий, если ввести следующую операцию умножения. Пусть имеем коцепи* $\varphi \in C^p\left(K_*(X^\bullet, M), F\right)$ *и* $\psi \in C^q\left(K_*(X^\bullet, M), F\right)$, *тогда умножение* $\smile$ *Колмогорова — Александера будет выглядеть следующим образом;*

$$(\varphi \smile \psi)(x, e_1, \ldots, e_{p+q}) = \sum_H \varrho_{HK} \eta \left(\varphi(x, e_{h_1}, \ldots, e_{h_p}) \otimes \psi(x \cdot e_{h_1} \cdots e_{h_p}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_q})\right),$$

здесь $H = \{h_1, \ldots, h_p\}$ *— множество всех подмножеств множества* $\{1, 2, \ldots, p+q\}$, *состоящее из* p *элементов,* K *— дополнение множества* H, ϱ_{HK} *— чётность перестановки* HK *и* $\eta : F(x, e_{h_1}, \ldots, e_{h_p}) \otimes_R F(x \cdot e_{h_1} \cdots e_{h_p}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_q}) \to F(x, e_{h_1}, \ldots e_{h_p}, e_{k_1}, \ldots, e_{k_q})$ *— кольцевые гомоморфизмы.*

Как частный случай мы получаем следующий результат

Следствие.

Кольцо когомологий свободного частично коммутативного моноида $M(E, I)$ *выглядит следующим образом*

$$H^*(M(E, I), \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[e_1, \ldots, e_n]/\, I,$$

здесь I *— идеал внешней алгебры* $\Lambda_{\mathbb{Z}}[e_1, \ldots, e_n]$, *порождённый всеми такими* $e_k \in E$, *что* $e_i e_j \neq e_j e_i$.

Замечание.

Приведённый изоморфизм был получен в работе [8] как копредел функтора K*-степени.*

В докладе будут приведены интересные примеры [9,10] действий свободных частично коммутативных моноидов, в частности будет показано что когомологии свободного действия таких моноидов могут иметь кручения [9,10].

Список литературы

[1] А. А. Хусаинов, *Исследование параллельных систем методами теории категорий*, Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing, (2012).

[2] A. Husainov, “On the Homology of small Categories and asynchronous transition system”, *Homology Homotopy Appl*, 6, No. 1, 439–471 (2004), `http: //www.rmi.acnet.ge/hha`

[3] А. А. Хусаинов, В. Е. Лопаткин, И. А. Трещёв, “Исследование математической модели параллельных вычислительных процессов методами алгбераической топологии”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, No. 1(33), 141–152 (2008), `http://mi.mathnet.ru/sjim495`

[4] Л. Ю. Полякова, “Резольвенты свободных частично коммутативных моноидов”, *Сиб. мат. журн.*, No. 6(48), 1259–1304 (2007).

[5] А. А. Хусаинов, “О группах гомологий полукубических множеств”, *Сиб. мат. журн.*, No. 1(49), 224–237 (2008), `http://mi.mathnet.ru/rus/smj/v49/i1/p224`

[6] А. А. Хусаинов, “Кубические гомологии и размерность Лича свободных частично коммутативных моноидов”, *Матем. сб.*, No. 12(199), 129–154 (2008), `http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v199/i12/p129`

[7] В. Е. Лопаткин, “Кольца когомологий полукубических множеств”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. – Сер. Математика. Механика. Информатика*, No. 2(10), 3–10 (2010).

[8] T. Panov, N. Ray, R. Vogt, “Colimits, Stanley–Reisner albebras, and loop spaces”, *Algebraic Topology: Categorical Decomposition Technques, Progress in Math*, No. 215, 261–291 (2004), `arXiv: math.AT/0202081`

[9] A. Husainov, “On the Cubical Homology Groups of Free Partially Commutative Monoids”, *New York: Cornell Univ*, Preprint, 47p, (2006), `http://arxiv.org/abs/math.CT/0611011`

[10] V. Lopatkin, “The Torsion of Homology Groups of $M(E, I)$-sets”, *New York: Cornell Univ*, Preprint, 5p, (2008), `http://arxiv.org/pdf/0811.3722v1`

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: `wickktor@gmail.com`