БИАЛГЕБРЫ И ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

СЕРГЕЙ МАТВЕЕВ, ВЛАДИМИР ТАРКАЕВ

Под алгеброй мы будем понимать линейное пространство A (например, над полем действительных чисел $\mathbb{R}$), снабженное ассоциативной операцией умножения $\nabla\colon A\bigotimes A\to A$ и единицей, которую принято понимать как линейное отображение $\eta\colon\mathbb{R}\to A$ (хотя настоящим единичным элементом алгебры является элемент $\eta(1)\in A$). Аналогично, коалгебра – это линейное пространство A, снабженное коассоциативной операцией коумножения $\Delta\colon A\to A\bigotimes A$ и коединицей $\varepsilon\colon A\to\mathbb{R}$. Понятия алгебры и коалгебры двойственны друг другу в смысле обычной сопряженности линейных пространств и пространств линейных функционалов на них.

Биалгебра – это линейное пространство A, снабженное всеми 4 упомянутыми операциями, которые должны быть связаны естественными соотношениями. Самое важное из них записывается в виде равенства

$$\nabla\circ\Delta=(\Delta\bigotimes\Delta)\circ\tau\circ(\nabla\bigotimes\nabla),$$

где τ – перестановка второго и третьего сомножителей в произведении $A\bigotimes A\bigotimes A\bigotimes A$ и суперпозиции выполняются в порядке слева направо. Это соотношение удобно изображать графически так, как это показано на рис. 1, где вершины изображают экземпляры биалгебры A. При этом предполагается, что экземпляры, расположенные на одной вертикальной прямой, должны быть тензорно перемножены. В рассматриваемом случае обе суперпозиции действуют из $A\bigotimes A$ в $A\bigotimes A$

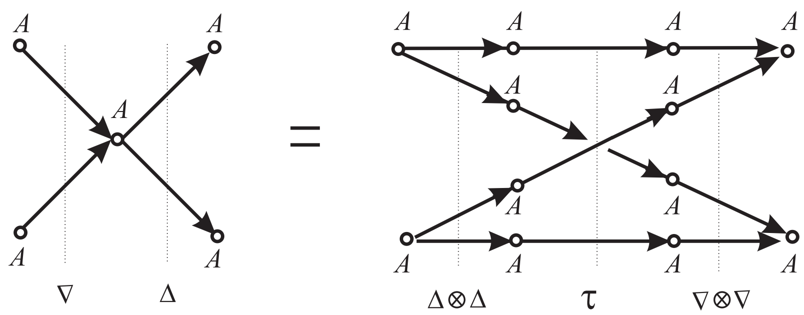

Рис. 1

Под *операцией* на тензорном произведении нескольких экземпляров алгебры A будем понимать произвольную суперпозицию операций ∇ и Δ, которая имеет смысл. Числа использованных экземпляров могут быть различными.

Опишем интересную связь между такими операциями и трехмерными многообразиями, обнаруженную М. Концевичем. Пусть дана графическая схема операции. Заменим каждую ее вершину на прямое произведение утолщенной буквы Y на отрезок, расположив эти произведения так, чтобы для вершин-умножений отрезки были расположены вертикально, а для вершин-коумножений – горизонтально. Затем склеим квадраты, отвечающие концам букв Y, по параллельным переносам, учитывая, конечно, данную графическую

Исследование было поддержано грантами РФФИ-11-01-00605, НШ-1414.2012.1, а также целевыми программами УрО РАН (совместный проект 12-С-1-1018/1 и проект ОМН РАН 12-Т-1-1003/2). Первый автор благодарен Институту Высших Научных Исследований Франции (IHES), где была выполнена часть работы, и профессору М. Концевичу за постановку проблемы.

схему. См. рис. 2, где показаны геометрические реализации схем на рис. 1. В результате получится полный крендель некоторого рода, на крае которого можно видеть узор из квадратов, дуг и нескольких окружностей. Дуги и окружности составлены из угловых точек кренделя, причем дуги соединяют вершины оставшихся свободными квадратов. Заключительный шаг построения многообразия состоит в заклеивании окружностей узора ручками индекса 2. В результате получается трехмерное многообразие, на крае которого остается узор из квадратов и соединяющих их дуг.

Гипотеза (М. Концевич) *Две операции эквивалентны тогда и только тогда, когда отвечающие им многообразия с узорами гомеоморфны (как пары).*

Эта гипотеза представляется весьма важной, как и любое высказывание о глубокой неочевидной связи между алгеброй и топологией.

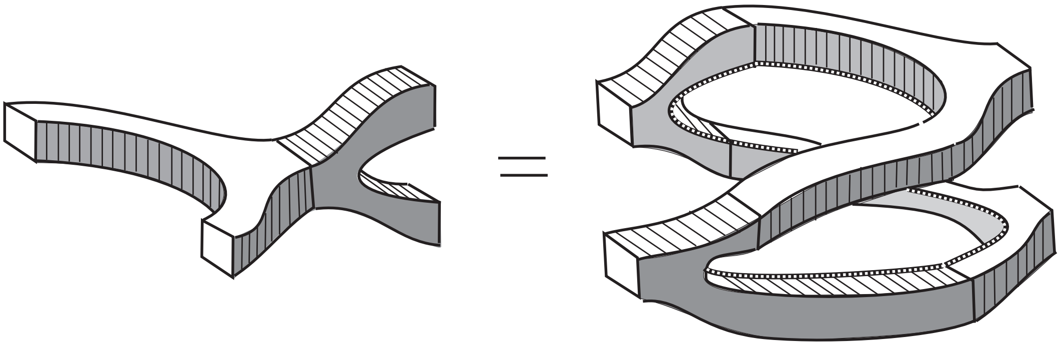

Рис. 2

Для эквивалентных операций на рис. 1 эта гипотеза верна, поскольку после приклеивания к правому полному тору на рис. 2 ручки индекса 2 вдоль единственной окружности узора получается шар с тем же узором, что и шар слева. Отсюда следует, что в одну сторону гипотеза справедлива, т.е. что эквивалентность операций влечет гомеоморфность многообразий с узорами. Трудная часть гипотезы заключается в доказательстве того, что неэквивалентные операции дают негомеоморфные многообразия с узорами.

Большая часть доклада будет посвящена описанию экспериментальной компьютерной проверки этой части гипотезы. Проблема в том, что алгоритм распознавания гомеоморфности многообразий с узорами хотя и существует, но супер-супер-экспоненциален. Наш метод состоит в устранении узора с помощью всевозможных склеиваний квадратов и приклейкой новых ручек индекса 2 по появившимся окружностям узора. Различность получившихся новых многообразий без узоров (гарантирующая различность исходных многообразий с узорами) проверялась с помощью вычисления различных инвариантов, в том числе, инвариантов Тураева-Виро, о которых будет рассказано отдельно. Оказалось, что гипотеза верна для всех операций из A в A, составленных из ≤ 14 умножений и коумножений (всего более 50 тысяч операций). Исключением являются несколько пар многообразий, для доказательства различности которых инвариантов не хватило.

Челябинский государственный университет, Челябинск, 454001 и Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, 620990

E-mail address: matveev@csu.ru, trk@csu.ru