# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

АЛЕКСАНДР РОМАНОВ

Хорошо известна взаимосвязь конформных отображений с различными экстремальными задачами на плоскости. Нас будет интересовать возможность определения конформного отображения через экстремали интеграла Дирихле [1]. Отметим четыре точки на границе ограниченной односвязной области $D \subset R^2$. Для получаемого криволинейного четырехсторонника $D^*$ найдем экстремальные функции $u$ и $w$ реализующие конформную емкость конденсаторов, образованных двумя парами "противоположных сторон" $(L_1, L_3)$ и $(L_2, L_4)$, и рассмотрим функцию $v$ пропорциональную экстремали $w$, т.е. $v = C\,w$. При подходящем выборе постоянной $C$ функция $f = u + iv$ осуществляет конформное отображение области $D$ на некоторый прямоугольник $P \subset R^2$.

Аналогичная конструкция, применяемая к нелинейной $(1,p)$–емкости, позволяет получить классы плоских экстремальных отображений, свойства которых существенным образом зависят от показателя суммируемости $p$. В данной ситуации, в отличие от конформного случая, для конденсаторов следует выбирать различные емкости, соответствующие сопряженным показателям суммируемости. Предполагая $1/p+1/p' = 1$, рассмотрим функцию $u$ – экстремальную для $(1,p)$–емкости "сторон" $(L_1, L_3)$, функцию $w$ – экстремальную для $(1,p')$–емкости "сторон" $(L_2, L_4)$ и положим $v = C\,w$. В результате получим отображение $F = (u, v)$ области $D$ (четырехсторонника $D^*$) на прямоугольник $P \subset R^2$. При надлежащем выборе постоянной $C$ координатные функции отображения $F$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases} \tag{1}$$

которая при $p = 2$ превращается в систему Коши–Римана.

По всякой $p$–экстремальной функции $u$ можно восстановить сопряженную ей функцию $v$, удовлетворяющую системе (1). Возникающее в результате отображение $F = (u, v)$ будем называть $p$–экстремальным. Для гладкого отображения $F$ координатная функция $u$ будет решением $p$–уравнения Лапласа

$$div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0,$$

а функция $v$ будет решением соответствующего $p'$–уравнения Лапласа.

Рассмотрим совокупность всех четырехсторонников порождаемых областью $D$ и класс всех $p$–экстремальных отображений $F : D^* \to R^2$ обозначим через $H_p(D)$. С одной стороны, с каждым таким отображением можно связать ортогональную криволинейную систему координат в области $D$, с другой стороны, для ортогональных криволинейных систем координат $(q_1, q_2)$, у которых выражение $H_1^{p-1} \cdot H_2^{-1}$, связывающее соответственные параметры Ламе, зависит только от одной координаты $q_i$, можно получить выражения для координатных функций $p$–экстремального отображения в криволинейных координатах.

Пусть $D_1, D_2 \subset R^2$ – ограниченные односвязные области с жордановыми границами. Будем говорить, что гомеоморфизм $L : D_1 \to D_2$ является $p$–экстремальным, если $L = F_2^{-1} \circ F_1$, где $F_1 \in H_p(D_1), F_2 \in H_p(D_2)$. Класс соответствующих $p$–экстремальных гомеоморфизмов обозначим через $H_p(D_1, D_2)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-00662-а) и интеграционного проекта СО РАН-ДВО РАН №56.

При отображении класса $H_p(D_1, D_2)$ для произвольных четырехсторонников, образованных линиями уровня отображения $F_1$, сохраняются $p$ и $p'$–емкости соответствующих пар сторон.

Возможность отображения произвольного четырехсторонника на соответствующий прямоугольник показывает, что $p$–экстремальных гомеоморфизмов достаточно много. В частности, для $p$–экстремальных гомеоморфизмов удается получить аналог классической теоремы Римана, согласно которому для произвольных ограниченных односвязных областей $D_1, D_2 \subset R^2$ с жордановыми границами существует гомеоморфизм $L : D_1 \to D_2$ класса $H_p(D_1, D_2)$, переводящий три точки $a_1, a_2, a_3 \in \partial D_1$ и в точки $b_1, b_2, b_3 \in \partial D_2$.

В определении класса $H_p(D)$ координатные функции являются экстремалями для соответствующих конденсаторов, а образом области $D$ всегда является некоторый прямоугольник. Это не слишком удобно, в частности, при изучении композиции таких отображений. Отображения класса $H_p(D_1, D_2)$ в этом плане устроены лучше, для них естественным образом определена композиция отображений. При дополнительных условиях композиция отображений $F \in H_p(D_1, D_2)$ и $G \in H_p(D_2, D_3)$ будет отображением класса $H_p(D_1, D_3)$.

## Список литературы

[1] Р. Курант, *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, М.: ИЛ, (1953).

[2] А. С. Романов, “Емкостные соотношения в плоском четырехсторонника”, *Сиб. мат. журн*, 49, No. 4, 886–897 (2008).

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Россия

*E-mail address*: asrom@math.nsc.ru