КАСАТЕЛЬНЫЙ КОНУС К ЛОКАЛЬНО СТЯГИВАЕМОМУ ПРОСТРАНСТВУ

СВЕТЛАНА СЕЛИВАНОВА

На топологическом пространстве X растяжения можно задать как однопараметрические семейства гомеоморфизмов $\{\delta_\varepsilon^x\}_{\varepsilon>0}$, определенные в окрестности $U(x)$ каждой точки $x \in X$ и удовлетворяющие нескольким аксиомам, в частности, условию $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon^x u = x$ для всех $u \in U(x)$ (свойство локальной стягиваемости пространства X). Одним из основных примеров пространств с растяжениями являются субримановы пространства и более общие пространства Карно – Каратеодори, моделирующие физические процессы при неголономных ограничениях и естественно возникающие во многих приложениях. Растяжения позволяют, при наличии определенного дополнительного условия, ввести на окрестности каждой точки пространства X структуру локальной группы [1,2].

Мы доказываем [3], что эта локальная группа локально изоморфна связной односвязной нильпотентной градуированной группе Ли. Доказательство основано на применении Теоремы Мальцева о локальных и полных топологических группах [4], что позволяет избежать трудностей, связанных с изучением локальной версии Пятой проблемы Гильберта. При наличии на пространстве X (квази)метрики d, определенным образом согласованной с растяжениями, сформулированный результат позволяет изучить алгебраическую структуру локального касательного конуса к пространству (X, d).

В качестве одного из приложений получаем аксиоматизацию локальных конусов эквирегулярных пространств Карно – Каратеодори, с применением результатов статьи [5].

Кроме того, и нерегулярные пространства Карно – Каратеодори являются примерами (квази)метрических пространств с растяжениями. В [6] доказано, что касательный конус в этом случае представляет собой однородное пространство. Этот результат является новым для квазиметрик (в некоторых важных случаях метрики может не существовать); доказательство является новым, по сравнению с [1,7], и для внутренних метрик Карно–Каратеодори.

Список литературы

[1] A. Bellaiche, "The tangent space in sub-Riemannian geometry", *Sub-Riemannian geometry*, Basel: Birkhäuser, 144, 1–78 (1996).

[2] M. Buliga, "Dilatation structures I. Fundamentals", *J. Gen. Lie Theory Appl.*, 1, No. 2, 65–95 (2007).

[3] S. Selivanova, S. Vodopyanov, "Algebraic properties of the tangent cone to a quasimetric space with dilations", *Contemporary Mathematics*, Complex Analysis and Dynamical Systems IV, 273–294 (2011).

[4] А. И. Мальцев, "О локальных и полных топологических группах", *Докл АН СССР*, 32 (9), 606–608 (1941).

[5] Karmanova M., Vodopyanov S., "Geometry of Carno-Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas", *Analysis and Mathematical Physics*, Trends in Mathematics, Birckhäuser, 233–335 (2009).

[6] S. V. Selivanova, "Local geometry of nonregular weighted quasimetric Carnot-Caratheodory spaces", *Doklady Mathematics*, 85, No. 2, 169–173 (2012).

[7] M. Gromov, "Carno-Carathéodory spaces seen from within", *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics, Basel: Birckhäuser, 144, 79–323 (1996).

Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: s_seliv@math.nsc.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00662) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1).