ДИСКРЕТНЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОТОК БИССЕКТРИС ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И ВОПРОСЫ ЕГО СХОДИМОСТИ

ЭЛЛЭЙ ШАМАЕВ

Пусть последовательность n-угольников $\{A_1^k A_2^k \dots A_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задана рекуррентными соотношениями

$$A_i^{k+1} = A_i^k + \sigma \left(\frac{A_{i-1}^k - A_i^k}{|A_{i-1}^k - A_i^k|^\alpha} + \frac{A_{i+1}^k - A_i^k}{|A_{i+1}^k - A_i^k|^\alpha} \right), \quad i = \overline{1,n}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

и параметрами α и $\sigma \in \mathbb{R}$.

В данном докладе мы приведем некоторые результаты по сходимости дискретного геометрического потока многоугольников (1) при $\alpha = 1$ и $\sigma < 0$, названного нами потоком биссектрис.

При $\alpha = 0$ общий элемент последовательности $\{A_1^k A_2^k \dots A_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ выражается с помощью, так называемой, циркулянтной матрицы и начального многоугольника

$$\begin{pmatrix} A_1^{k+1} \\ A_2^{k+1} \\ \vdots \\ A_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\sigma & \sigma & 0 & \dots & 0 & \sigma \\ \sigma & 1-2\sigma & \sigma & & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 1-2\sigma & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1-2\sigma & \sigma \\ \sigma & 0 & 0 & \dots & \sigma & 1-2\sigma \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_2^1 \\ \vdots \\ A_n^1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Заметим, что при $\sigma \geqslant 0$ наибольшее собственное число матрицы из (2) равно $\lambda_1 = 1$ и соответствует неподвижному собственному вектору $(1, 1, \dots, 1)^T$, поэтому данная матрица не задает сжимающее отображение. Пусть λ_2 является наибольшим собственным числом данной матрицы таким, что $\lambda_2 < \lambda_1 = 1$.

В [1] было доказано, что при $\alpha = 0$, $n > 4$ и любых $\sigma \in [0; 1/3]$ после гомотетии k-го элемента, $k \in \mathbb{N}$, последовательности n-угольников с коэффициентом $\frac{1}{\lambda_2^k}$, полученная последовательность является сходящимся при любых начальных, возможно, не выпуклых и самопересекающихся многоугольниках. В [1] также показано, что предельный многоугольник является вписанным в эллипс, если $(A_1^1, A_2^1, \dots, A_n^1)^T$ не перпендикулярен собственным векторам соответствующим λ_2.

Результаты [1] для многоугольников обобщены для многогранников в [2].

Список литературы

[1] A.M. Bruckstein, G. Sapiro, D. Shaked, “Evolutions of planar polygons”, *International J. of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 9, No. 6, 991–1014 (1995).

[2] A. Imiya, U. Eckhardt, “Discrete Mean Curvature Flow”, 477–482 // *SCALE-SPACE ’99 Proceedings of the Second International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision*, Springer-Verlag London, (1999).

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск, 677000, Россия
E-mail address: eshamaev@mail.ru

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 12-01-00873-а) и грантами Президента России для государственной поддержки: ведущих научных школ (НШ-544.2012.1) и молодых кандидатов (МК-842.2011.1).