ПУЧКИ МОДУЛЕЙ КОНЕЧНОГО ТИПА НА КАТЕГОРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЕВГЕНИЙ СКУРИХИН

Категорные топологические пространства являются общими объектами, которые, тем не менее, могут изучаться методами, разработанными для топологических пространств. В процессе исследований выяснилось, что обычные характеристики топологических пространств, например, лебеговская размерность, или когомологическая размерность, могут иметь интерпретации, более широкие, чем в случае топологических пространств. Например, ассоциируя категорные топологические пространства с алгебраическими многоообразиями, или структурами событий, или частично упорядоченными множествами, или монадами, получаем, что лебеговская и когомологическая размерности соответствующих категорных топологических пространств совпадает с размерностью алгебраического многообразия, длиной или шириной упорядоченного множества, сложностью по В. И. Арнольду, некоторыми характеристиками структур событий.

В связи с этим представляется интересным вопрос о задании геометрических структур на категорных топологических пространствах. В предлагаемом докладе предполагается рассмотреть локально свободные пучки и векторные расслоения.

Назовём G-объектом тройку $(X, \tau, \mathcal{O})$, где X множество, τ топология Гротендика на некотором множестве SX подмножеств X, замкнутом относительно пересечений, $\mathcal{O}$ – τ-пучок колец функций со значением в фиксированном поле k. При этом предполагается, что для любого $(f : U \to k) \in \mathcal{O}(U)$, множество $V = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\} \in SX$ и $\frac{1}{f|V} \in \mathcal{O}(V)$. Отображение $h : U \to k^n$ будем называть регулярным (или $\mathcal{O}$-регулярным), если для всякого $i = 1, ..., n$, $h^i \equiv p^i \circ h \in \mathcal{O}(U)$, где $p^i : k^n \to k$ – проекция на i-й сомножитель. Векторным расслоением на $(X, \tau, \mathcal{O})$ назовем отображение множеств $\xi : E \to X$, если задано τ-покрытие $\alpha = \{U_i \in SX \mid i \in I\}$ и семейство биективных послойных отображений $\{\psi_i : \xi^{-1}(U_i) \to U_i \times k^n \mid i \in I\}$, таких. что для любых i, j отображение $u_{ij} = \psi_j \circ \psi_i^{-1} : U_i \cap U_j \times k^n \to U_i \cap U_j \times k^n$ линейно на слоях и значит задаётся равенством $u_{ij}(x, a^1, ..., a^n) = (x, \sum \delta_{\{ij\}}{}_l^1(x)a^l, ..., \sum \delta_{\{ij\}}{}_l^n(x)a^l)$, так что функции $\delta_{\{ij\}}{}_l^k : U_i \cap U_j \to k$ являются регулярными, то есть принадлежат $\mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Совокупность функций $\delta_\{ij\} = \{\delta_{\{ij\}}{}_l^k \mid k, l = 1, ..., n\}$ может быть отождествлена с (обратимой) матрицей, то есть элементом группы $GL(n, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$.

Формальным топологическим пространством, или F-пространством, называется пара $(u, [\,] : L \to L)$, где $[\,]$ – оператор замыкания на частично упорядоченном множестве L, $u \in L$, если выполняются следующие условия

(F1) L является нижней полурешёткой, и для любых $a, b \in L$, $[a \wedge b] = [a] \wedge [b]$.

(F2) Множество $[L]$ замыканий всех элементов L является полной брауэровой решёткой и u – максимальный элемент $[L]$.

На формальном пространстве естественно задаётся пара топологий Гротендика $(æ, \mu)$, полезных при изучении его структуры и когомологий. А именно, æ – это каноническая топология Гротендика на $[L]$, а μ индуцирована отображением $[\,]$. Пару $(æ, \mu)$ будем называть канонической парой топологий Гротендика на F-пространстве $(u, [\,])$.

Пусть (K, τ) – сайт. Категорным топологическим пространством или (K, τ)-пространством называется F-пространство $(D, [\,]_\tau^D : K_D \to K_D)$, где D – предпучок множеств на K,

Исследование поддержано грантом ДВО РАН 12-III-A-01M-004.

$[\,]^D_\tau : K_D \to K_D$ – оператор τ-замыкания на K_D. Предпучок D в данном контексте также называется категорным топологическим пространством.

Пусть $(u, [\ ] : L \to L)$ $-F$-пространство, $\mathcal{O}$ – μ-пучок колец с 1, $a \in L$, $\varphi : \mathcal{O}^n|a \to \mathcal{O}^m|a$, $[\varphi] \in \mathcal{M}(n, m, \mathcal{O}(a))$ матрица, задаваемая так: $[\varphi] = (\alpha_{ij})$, где $\varphi(e_i) = \sum \alpha_{ij} e_j$, $e_i = (0, ..., 1, ..., 0) \in \mathcal{O}^n(a) = \mathcal{O}(a)^n$.

Как и в случае топологических пространств, соответствие $\varphi \mapsto [\varphi]$ является аддитивным, удовлетворяет соотношению $[\varphi \circ \psi] = [\psi] \circ [\varphi]$ и задаёт биекцию между множеством $Hom_{\mathcal{O}|a-mod}(\mathcal{O}^n|a, \mathcal{O}^m|a)$ гомоморфизмов пучков $\mathcal{O}|a$-модулей и множеством матриц $M(n, m, \mathcal{O}(a))$ с элементами из кольца $\mathcal{O}(a)$, в частности, (анти)изоморфизм между группами $Aut_{\mathcal{O}|a-mod}(\mathcal{O}^n|a)$ и $GL(n, \mathcal{O}(a))$.

Предположим, что $\alpha = \{a_i \in L\} \mid i \in I$ – μ-покрытие u, $\mathcal{M}$ – $\mathcal{O}$-модуль, и заданы изоморфизмы $\varphi_i : \mathcal{O}^n|a_i \to \mathcal{M}|a_i$. Полагая $\varphi_{ij} = \varphi_j{}^{-1} \circ \varphi_i : \mathcal{O}^n|a_{ij} \to \mathcal{O}^n|a_{ij}$, $\delta_{ij} = [\varphi_{ij}]$, получаем 1-коцикл, то есть семейство $\delta = \{\delta_{ij} \in GL(n, \mathcal{O}(a_i \wedge a_j)) \mid i, j \in I\}$, такое, что $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$ в $GL(n, \mathcal{O}(a_i \wedge a_j \wedge a_k))$.

Категория называется тонкой, если множество морфизмов между любыми двумя её объектами не более, чем одноэлементно. В частности, малые тонкие категории могут быть отождествлены с квазиупорядоченными множествами.

Теорема.

Пусть (K, τ) сайт, где K тонкая категория, $(1_K, [\,]_\tau)$ категорное топологическое пространство, где предпучок 1_K определяется так: $1_K(k)$ – одноэлементное множество для каждого объекта k. Зафиксируем τ-пучок колец с единицей $\mathcal{O}$ на K и обозначим через $\widehat{\mathcal{O}}$ æ-пучок на K_D, где $D = 1_K$, задаваемый равенством $\widehat{\mathcal{O}}(A) = Hom_{\widehat{K}}(A, \mathcal{O})$. Категория τ-локально свободных $\mathcal{O}$-модулей на K эквивалентна категории æ-локально свободных $\widehat{\mathcal{O}}$-модулей на 1_K, то есть на $K_{D,\tau}$ и следовательно описывается, как отмечено выше, коциклами, соответствующими каноническим покрытиям 1_K со значениями в предпучках матриц.

2. Пусть $(X, \tau, \mathcal{O})$ G-объект. Рассмотрим (K, τ)-пространство 1_K, где $K = SX$. Тогда категории τ-локально свободных $\mathcal{O}$-модулей на K, æ-локально свободных $\widehat{\mathcal{O}}$-модулей на 1_K и векторных расслоений на $(X, \tau, \mathcal{O})$ эквивалентны.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток,690041,Россия; Дальневосточный Федеральный университет, Владивосток,690950,Россия

E-mail address: eesku@iam.dvo.ru