О ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ НА ФИЛИФОРМОВЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

ЯРОСЛАВНА СЛАВОЛЮБОВА

1. Предварительные сведения. Напомним основные понятия из теории филиформовых алгебр Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли размерности n. Пусть $C^0\mathfrak{g} \supset C^1\mathfrak{g} \supset ...C^{n-2}\mathfrak{g} \supset C^{n-1}\mathfrak{g} = \{0\}$ – центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где $C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $C^i\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}; C^{i-1}\mathfrak{g}]$, $1 \leq i \leq n-1$.

Определение 1 ([3]).
Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ размерности ≥ 3 называется филиформовой, если $C^k\mathfrak{g} = n-k-1$ для $k = 1, ..., n-1$.

Филиформовые алгебры Ли являются наименее нильпотентными.

Определение 2 ([3]).
Две контактные алгебры Ли $(\mathfrak{g}_1, \alpha_1)$ и $(\mathfrak{g}_2, \alpha_2)$ называются контакто-изоморфными, если существует изоморфизм алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, т. ч. $\varphi^*(\alpha_2) = \alpha_1$.

Теорема 1 ([3]).
Пусть $\mathfrak{g}$ – филиформовая $(2p+1)$-мерная алгебра Ли. Пусть $X_0, X_1, ..., X_{2p}$ – адаптированный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{2p}$ – его дуальный базис. Если $\alpha = a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + ... + a_{2p}\alpha_{2p}$ – контактная форма на $\mathfrak{g}$, тогда форма $\beta = a_{2p}\alpha_{2p}$ – также контактная форма на $\mathfrak{g}$ и $(\mathfrak{g}, \alpha)$ – контакто-изоморфна к $(\mathfrak{g}, \beta)$.

2. Левоинвариантная контактная метрическая структура на филиформовой алгебре Ли размерности 5. Среди контактных алгебр Ли размерности 5 филиформовой алгеброй Ли является следующая алгебра Ли $\mathfrak{n}_4 \times_\omega \mathbb{R}e_5$, полученная центральным расширением четырехмерной симплектической алгебры Ли $\mathfrak{n}_4$ классификационного списка [4], заданной в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 коммутационными соотношениями: $[e_1, e_4] = -e_2$, $[e_2, e_4] = -e_3$. Симплектическая форма ω имеет вид $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_4 \times_\omega \mathbb{R}e_5$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 имеет коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_5$, $[e_1, e_4] = -e_2$, $[e_2, e_4] = -e_3$, $[e_3, e_4] = e_5$ и изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}_{5,3}$ классификационного списка разрешимых контактных алгебр Ли А. Диатты [1]. Соответствующую группу Ли обозначим $N_4 \times_\omega \mathbb{R}$. Контактная форма на $N_4 \times_\omega \mathbb{R}$ имеет вид $\eta = -e^5$. Очевидно, что $d\eta = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$. Поле Риба ξ имеет вид $\xi = -e_5$.

Замечание.
Любая 1-форма η вида $\eta = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 e^3 + \alpha_4 e^4 + \alpha_5 e^5$ является контактной, если $\alpha_5 \neq 0$. Действительно, $\eta \wedge (d\eta)^2 = 2\alpha_5^3 e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \wedge e^5 \neq 0$.

Контактное распределение D порождено следующими векторами: $E_1 = e_1$, $E_2 = e_2$, $E_3 = e_3$, $E_4 = e_4$. В качестве пятого вектора можем взять поле Риба, $E_5 = -e_5$. Ненулевые структурные константы в новом базисе: $C_{12}^5 = -1$, $C_{14}^2 = -1$, $C_{24}^3 = -1$, $C_{34}^5 = -1$.

Контактная форма в новом базисе определяется 1-формой $\eta = E^5$. Ее внешний дифференциал: $d\eta = dE^5 = E^1 \wedge E^2 + E^3 \wedge E^4$.

Как известно [2], ассоциированная метрика g контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) при фиксированных η и ξ определяется аффинором φ по следующей формуле: $g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект НШ-544.2012.1).

Запишем аффинор φ в общем виде в базисе $\{E_i\}$. Учитывая, что φ обладает свойством $d\eta(\varphi X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$, $X, Y \in D$, видим, что

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & 0 \\ \psi_{21} & -\psi_{11} & \psi_{23} & \psi_{24} & 0 \\ -\psi_{24} & \psi_{14} & \psi_{33} & \psi_{34} & 0 \\ \psi_{23} & -\psi_{13} & \psi_{43} & -\psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где пераметры ψ_{ij} связаны условиями:

$$\begin{cases} \psi_{11}^2 + \psi_{12}\psi_{21} - \psi_{13}\psi_{24} + \psi_{14}\psi_{23} = -1, \\ \psi_{12}\psi_{23} + \psi_{13}(\psi_{11} + \psi_{33}) + \psi_{14}\psi_{43} = 0, \\ \psi_{12}\psi_{24} + \psi_{13}\psi_{34} + \psi_{14}(\psi_{11} - \psi_{33}) = 0, \\ \psi_{13}\psi_{21} - \psi_{23}(\psi_{11} - \psi_{33}) + \psi_{24}\psi_{43} = 0, \\ \psi_{14}\psi_{21} + \psi_{23}\psi_{34} - \psi_{24}(\psi_{11} + \psi_{33}) = 0, \\ \psi_{33}^2 + \psi_{34}\psi_{43} - \psi_{13}\psi_{24} + \psi_{14}\psi_{23} = -1, \end{cases}$$

вытекающими из равенства $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$.

Теорема 2.

Левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) *на группе* $N_4 \times_\omega \mathbb{R}$ *является* K*-контактной при всех значениях параметров* ψ_{ij}. *Левоинвариантная контактная метрическая структура на группе* $N_4 \times_\omega \mathbb{R}$ *не является структурой Сасаки ни при каких значениях параметров* ψ_{ij}.

Список литературы

[1] A. Diatta, "Left invariant contact structures on Lie groups", (2004), `arXiv: math.DG/0403555v2`
[2] D. Blair, "Contact Manifolds in Riemannian Geometry", *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, (1976).
[3] Yu. Khakimdjanov, M. Goze and A. Medina, "Symplectic or Contact Structures on Lie Groups", *Diff. Geom. Appl.*, V. 21, No. 1, 41–54 (2004).
[4] G. Ovando, "Four dimensional symplectic Lie algebras", (2004), `arXiv: math/0407501v1, [math/DG]`

Кемеровский институт (филиал) Российского государственного торгово-экономического университета, Кемерово, 650992 пр. Кузнецкий 39, Россия
E-mail address: `jar1984@mail.ru`