ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

ДМИТРИЙ ТРОЦЕНКО

В известной книге [1] А. Д. Александров, в частности, исследует сходимость внутренних метрик семейств выпуклых поверхностей. Для работы с компактными семействами автор выделяет семейства выпуклых поверхностей, лежащих в шаре радиуса R и содержащих шар радиуса r. Легко заметить, что внутренняя метрика таких поверхностей билипшицево эквивалентна внешней, причем билипшицева константа M зависит только от $t = \frac{R}{r}$, $t \geq 1$. Здесь же на с. 92 автор указывает на самостоятельный интерес нахождения точной константы $M(t)$

Гипотеза Александрова.
$M(t) \leq \sqrt{t^2-1} + t \arcsin t^{-1} < t + 1$.

Определение.
Наименьшую из двух частей, на которые гиперплоскость разбивает шар в R^n $(n \geq 2)$ назовем шапочкой.

В личной беседе А. Д. Александров сообщил, что он доказал, что поверхность, реализующая максимальное отношение внутренней метрики к внешней при фиксированном t, есть граница шара с выброшенными двумя непересекающимися шапочками. Приведенная в [1] оценка возникает в предположении, что шапочки равны и их плоскости параллельны. В этом случае экстремальная пара точек, для которой отношение внутреннего расстояния к евклидову максимально, есть центры кругов шапочек.

Здесь утверждается, что гипотеза Александрова не верна ни при каких $t > 1$. У экстремальных поверхностей выброшенные шапочки равны, но их плоскости не параллельны ни при каком t. Рассмотрим угол $\varphi(t)$ между этими плоскостями. Справедлива

Теорема 1.
1. $\varphi(t) > 0$ при $t > 1$ и $\varphi(t) \to 0$ при $t \to 1$ и при $t \to \infty$.
2. Найдется $t_0 = t_0(n)$ такое, что $M(t) = 2t - 1$ при $t \geq t_0(n)$. $\varphi(t)$ монотонно возрастает при $1 < t \leq t_0$ и монотонно убывает при $t \geq t_0$.
3. При $1 \geq t < t_0(n)$ точки экстремальной пары, для которой отношение внешнего расстояния к внутреннему, максимально, не могут быть близки.

Последнее утверждение показывает, что при небольших t свойство экстремальности пары точек становится глобальным, то есть эти точки должны быть далеки друг от друга при фиксированных размерах шаров. Справедливо более общее утверждение. Важную роль играют универсальные константы $t_0 = t_0(n)$ и $M_0 = M(t_0)$.

Теорема 2.
Пусть $A \subset R^n$– выпуклая поверхность, содержащая шар радиуса r и содержащаяся в шаре радиуса R, $t = R/r < t_0$ (из теоремы 1). Тогда для любой пары точек $x, y \in A$ такой, что $\varrho(x,y)/|x-y| = M \geq M_0$ справедливо неравенство

$$|x - y| \geq rF(M, t, n),$$

где $F(M,t,n)$ – положительная непрерывная функция, определенная при $t \in [1, t_0)$, $M \in (M(t_0), M(t)]$. Функция $F(M,t,n)$ монотонно убывает по t и M, и $F(\Pi/2, 1) = 2$.

Есть другие классы поверхностей, у которых оценивается мера сферичности. Рассмотрим границы областей в R^n, звездных относительно шара радиуса r , лежащих в шаре радиуса R Опять положим $t = R/r$.

Теорема 3.
Утверждения теорем 1 и 2 справедливы, если вместо классов выпуклых областей рассматривать соответствующие классы звездных областей.

В теории квазиконформных отображений популярны классы однородных областей. Их границы могут быть неспрямляемыми, и внутренние метрики границ не всегда определены. Также не достаточно одного шара, содержащего область, и одного – содержащегося в области. В работе [2] автор, в частности, рассматривает области, границы которых лежат в сферическом кольце с отношением радиусов $R/r = t$, причем такие, что при любом мебиусовом отображении, переводящем область в ограниченную, образ ее границы лежит в сферическом кольце с тем же отношением t радиусов. При больших t граница может не быть топологическим многообразием, не быть связной – короче, быть очень плохой. При приближении t к единице свойства улучшаются скачками. В частности, найдется $t_1(n)$ такое, что при $t < t_1$ область квазиконформно эквивалентна (значит, гомеоморфна) своему дополнению. Если в формулировках теорем 1 и 2 заменить внутреннюю метрику границы области внутренней метрикой дополнения к области, то для этого класса областей справедливы аналоги теорем 1 и 2.

Список литературы

[1] А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, Москва, (1948).
[2] Д. А. Троценко, “Однородные области, близкие к шару”, *Сиб. мат. журн.*, 52, No. 3, (307), 1178–1194 (2011).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: trotsenk@math.nsc.ru