ГЕОМЕТРИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

СЕРГЕЙ ВОДОПЬЯНОВ

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — C^1-гладкие векторные поля класса, определенные в некоторой окрестности U евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $n < N$. Цель лекции состоит в том, чтобы показать условия на векторные поля, при выполнении которых решения уравнения вида

$$-\operatorname{div}_h(|\nabla_0 v|^{p-2}\nabla_0 v) = 0, \quad 1 < p < \infty, \tag{1}$$

(или некоторых его обобщений) имеют определенные свойства регулярности [1] (условие Гёльдера и др.). Концептуально данные векторные поля должны включаться в систему C^1-гладких векторных полей $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_N$, задающих локально структуру многообразия Карно.

Более общо, связное N-мерное гладкое многообразие $\mathbb{M}$ называется *пространством Карно – Каратеодори*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ задана фильтрация

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$$

подрасслоениями такими, что в окрестности каждой точки $U(g) \subset \mathbb{M}$ найдется семейство C^1-гладких векторных полей $X_1, \dots, X_N$, удовлетворяющих следующим двум свойствам:

(1) для каждого $v \in U$ имеем подпространство $H_i\mathbb{M}(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$ постоянной размерности $\dim H_i$, $i = 1, \dots, M$;

(2) $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, \dots, M-1$;

Если, кроме того, выполняется условие

(3) $H_{j+1} = \operatorname{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$, $j = 1, \dots, M-1$, пространство Карно – Каратеодори называется *многообразием Карно*.

Будут рассказаны некоторые результаты работ [2–6], которые обеспечивают регулярность решений уравнения (1) и некоторых его обобщений.

Список литературы

[1] V. M. Chernikov, S. K. Vodop′yanov, "Sobolev Spaces and Hypoelliptic Equations. I.", *Sib. Advances in Math*, 6, No. 3, 27–67 (1996); II. 6, No. 4, 64–96 (1996).

[2] S. K. Vodop′yanov, M. B. Karmanova, "Local approximation theorem on Carnot manifolds under minimal smoothness", *Dokl. AN*, 427, No. 6, 731–736 (2009).

[3] M. Karmanova, S. Vodopyanov, "Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability and coarea formula", *Analysis and Mathematical Physics*, Birkhäuser, 284–387 (2009).

[4] A. V. Greshnov, "A proof of Gromov Theorem on homogeneous nilpotent approximation for C^1-smooth vector fields", *Mathematicheskie Trudy*, 15, No. 2 (2012) (accepted).

[5] S. Basalaev, S. Vodopyanov, "Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces", `arXiv:1206.5197v2`

[6] P. Hajłasz, P. Koskela, "Sobolev Met Poincaré", *Mem. Amer. Math. Soc.* 145 (2000), No. 688, 101 pp.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: vodopis@math.nsc.ru

Работа выполнена при частичной поддержке проектами Научные школы: НШ-921.2012.1; и ФЦПК – заявка № 2012-1.2.1-12-000-1001-025.