ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА СФЕРЕ РИМАНА

ИЛЬЯ ВЬЮГИН

Рассматриваются две задачи аналитической теории дифференциальных уравнений. Первая — задача восстановления системы линейных дифференциальных уравнений

$$y' = B(z)y, \qquad y(z) \in \mathbb{C}^n \tag{1}$$

по ее данным монодромии, характеризующим ветвление решений системы. Наиболее известный частный случай этой задачи, когда требуется построить фуксову систему

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{z-a_i}\right) y, \qquad \sum_{i=1}^{m} B_i = 0, \tag{2}$$

решения которой обладают заданной монодроией, называется проблемой Римана–Гильберта. Общий отрицательный ответ в этой задаче был дан в 1989 году А.А. Болибрухом, тогда возник вопрос о построении достаточных условий положительной разрешимости данной проблемы. В работах А.А. Болибруха [1] и докладчика [2] был построен критерий положительной разрешимости аналогичной задачи, сформулированной в более узком классе систем (2) с неприводимым набором матриц-вычетов $B_1, \ldots, B_m$. В докладе будет рассказано об этом и некоторых других результатах, полученных с помощью техники голоморфных векторных расслоений со связностью, образующих стабильную пару.

Вторая задача — задача построения семейства систем (1), зависящего от некоторого набора параметров, имеющих при этом одинаковое ветвление. Такое семейство называется изомонодромной деформацией системы (1). К таким задачам сводятся некоторые известные нелинейные уравнения, в частности уравнения Пенлеве. Для шестого уравнения Пенлеве

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-t}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{w-t}\right)\frac{dw}{dt} + \\ + \frac{w(w-1)(w-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{w^2}+\gamma\frac{t-1}{(w-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(w-t)^2}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

получен следующий результат.

Теорема.
Решения уравнения (3) представляются в окрестности особой точки $t = 0$ в одном из двух видов:

$$w(t) = P(t, t^{\lambda}, t^{-\lambda}),$$

или

$$w(t) = Q(t, \ln t, \ln^{-1} t),$$

где $P(x_1, x_2, x_3)$ и $Q(x_1, x_2, x_3)$ — степенные ряды по переменным x_1, x_2, x_3, а λ — некоторое комплексное число.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-01-00339 и гранта фонда Саймонса за 2012 год.

Список литературы

[1] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, (2009).

[2] А. А. Болибрух, “Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности”, *Тр. МИАН*, 238, 55–69 (2002).

[3] И. В. Вьюгин, “О конструктивных условиях разрешимости проблемы Римана–Гильберта”, *Матем. заметки*, 77, No. 5, 643–655 (2005).

Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия
E-mail address: vyugin@gmail.com