

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Всероссийская конференция,
приуроченная к 80-летию академика
Сергея Константиновича Годунова

20–24 июля 2009 г.

Тезисы докладов

НОВОСИБИРСК
2009

УДК 519.6:517.9:532:533:539.3
ББК В192+В161.6+В253+В251
М34

Математика в приложениях. Всероссийская конференция, приуроченная к 80-летию академика С. К. Годунова (Новосибирск, 20–24 июля 2009 г.): Тез. докладов / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2009. 334 с.

ISBN 978-5-86134-158-5.

М $\frac{1602070100-03}{Я82(03)-09}$ Без объявл.

ISBN 978-5-86134-158-5

© Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
2009

Организаторы

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет

Программный комитет

Ю. Л. Ершов — председатель, В. Н. Белых — заместитель председателя, В. Л. Мирошниченко — ответственный секретарь, Э. Л. Аким, В. С. Белоносов, В. И. Бердышев, К. В. Брушлинский, В. Л. Васкевич, Ю. С. Волков, А. М. Ильин, В. П. Карликов, А. Н. Коновалов, В. И. Костин, А. Г. Куликовский, А. Н. Малышев, М. В. Масленников, Б. Г. Михайленко, П. И. Плотников, Е. И. Роменский, В. С. Рябенский, И. А. Тайманов, В. М. Фомин

Organizers

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
Novosibirsk State University

Program Committee

Yu. L. Ershov, Chairman, V. N. Belykh, Vice-chairman, V. L. Miroshnichenko, Secretary, E. L. Akim, V. S. Belonosov, V. I. Berdyshev, K. V. Brushlinskii, V. L. Vaskevich, Yu. S. Volkov, A. M. Il'in, V. P. Karlikov, A. N. Konovalov, V. I. Kostin, A. G. Kulikovskii, A. N. Malyshev, M. V. Maslennikov, B. G. Mikhailenko, P. I. Plotnikov, E. I. Romenskii, V. S. Ryaben'kii, I. A. Taimanov, V. M. Fomin

Спонсоры



Российский фонд фундаментальных исследований



Механико-математический факультет
Новосибирского государственного университета



Корпорация Intel

Sponsors



Russian Foundation for Basic Research



Department of Mechanics and Mathematics,
Novosibirsk State University



Intel Corporation

О научной и педагогической деятельности С. К. Годунова

В 2009 году исполняется 80 лет одному из выдающихся представителей отечественной науки, лидеру современной вычислительной математики академику Сергею Константиновичу Годунову.

С. К. Годунов родился 17 июля 1929 г. в Москве. В 1946 г., окончив 1-ю Московскую спецшколу ВВС, поступил в Московский государственный университет на механико-математический факультет. В 1951 г. он, будучи со второго курса Сталинским стипендиатом, закончил МГУ, получив диплом с отличием по специальности “вычислительная математика”. Еще студентом второго курса он решил серьезную проблему из теории непрерывных дробей. Этот его результат в 1948 г. был представлен академиком И. М. Виноградовым к опубликованию в Докладах Академии Наук СССР. В 1954 году С. К. Годунов завершил обучение в аспирантуре Математического института им. В. А. Стеклова и в том же году ему была присвоена ученая степень кандидата физико-математических наук по специальности “вычислительная математика” (тема диссертации закрыта). В научных школах Московского университета С. К. Годунов воспитывался под руководством члена-корреспондента АН СССР Б. Н. Делоне, академиков И. М. Гельфанда и И. Г. Петровского.

В 1966 г. С. К. Годунов получает ученое звание доцента по кафедре дифференциальных уравнений, в том же году ему была присвоена степень доктора физико-математических наук по совокупности работ. В 1968 г. С. К. Годунов получает ученое звание профессора по кафедре дифференциальных уравнений. В 1976 г. он становится членом-корреспондентом АН СССР по Отделению математики, а с 1994 г. — действительным членом Российской академии наук.

Трудовую деятельность С. К. Годунов начал в 1951 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР сначала в должности младшего научного сотрудника, затем — научного сотрудника. С 1953 г. по 1966 г. он работает младшим научным сотрудником, научным сотрудником и старшим научным сотрудником Отделения прикладной математики Математического института им. В. А. Стеклова. С 1966 г. по 1969 г. С. К. Годунов заведует отделом Института прикладной математики им. М. В. Келдыша, с 1952 г. по 1969 г. работает

по совместительству в Московском государственном университете (ассистентом, доцентом, профессором).

В 1969 г. С. К. Годунов по приглашению академика М. А. Лаврентьева переехал в Новосибирск, где заведовал лабораторией в Вычислительном центре Сибирского отделения АН СССР. С 1980 г. С. К. Годунов трудится в Институте математики СО АН СССР (ныне Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН) в должностях заведующего отделом, заместителя директора, и.о. директора (1981 – 1986 гг.), советника РАН.

Более полувека Сергей Константинович Годунов ведёт большую педагогическую работу сначала в Московском, а затем в Новосибирском государственных университетах. В НГУ С. К. Годунов работал по совместительству с 1969 г. профессором кафедры дифференциальных уравнений, а с 1977 г. много лет — заведующим той же кафедрой. На механико-математическом и физическом факультетах НГУ С. К. Годунов читал лекции по основным курсам: “Механика сплошной среды”, “Уравнения математической физики”, “Методы приближенных вычислений”, “Дифференциальные уравнения”, “Численные методы линейной алгебры”, “Современные аспекты линейной алгебры”, а также по спецкурсам “Теория гиперболических систем”, “Уравнения нелинейной теории упругости”.

★ ★ ★

В нынешний век узкой научной специализации академик С. К. Годунов служит ярким примером учёного, с одинаковым успехом работающего как в области создания научных теорий, так и в области их приложений. Теория непрерывных дробей, теория дифференциальных уравнений, разностные схемы, линейная алгебра, газовая динамика и механика сплошных сред — вот далеко не полный перечень тех направлений, в которых его труды составляют весомую долю. Труды С. К. Годунова отличаются необычайной глубиной и сыграли ключевую роль в реформировании и эволюции таких отраслей прикладной науки, как

- теория корректности краевых задач для дифференциальных уравнений,
- механика сплошных сред,
- теория разностных схем и численные методы линейной алгебры,

- разработка алгоритмов решения задач газовой динамики и расчета вязкоупругих деформаций металлов,
- гарантированная точность компьютерных вычислений.

Прикладными задачами С. К. Годунов начал заниматься с пятидесятых годов прошлого века. В 1954 г. он предложил схему расчета нестационарных задач газовой динамики, основанную на использовании решений задачи Римана о распаде разрыва. Созданная им на этой основе разностная схема для расчёта разрывных решений уравнений газовой динамики методом “сквозного счёта” с адекватным “размазыванием” ударных волн приобрела всемирную известность как схема Годунова. На начальном этапе возможность её использования для расчета сложных задач механики стала настоящим сюрпризом как для чистых, так и для прикладных математиков. В последующем схема Годунова оказала глубокое влияние на развитие современных численных методов, став в настоящее время стандартным инструментом численного исследования проблем механики сплошных сред. Под руководством С. К. Годунова изобретенная им схема была модифицирована для использования в подвижных (двумерных) сетках. В 1961 г. по предложению академика И. Г. Петровского по схеме Годунова был впервые произведен расчёт стационарного трансзвукового обтекания с использованием процесса установления нестационарного потока. Этот приём — метод установления — получил в наше время всеобщее признание и нашёл широкое применение как в России, так и за рубежом. Метод Годунова расчета разрывных решений задач стал неотъемлемой частью математической культуры, а его использование в расчетах — это своеобразный знак качества получаемого числового ответа.

В пятидесятые – шестидесятые годы прошлого века С. К. Годунов заложил основы современной теории численных методов в нелинейных уравнениях типа гиперболических систем. Он ввел классы особо хорошо функционирующих систем дифференциальных уравнений, которые теперь называются корректно поставленными, а также провёл глубокое исследование вопросов их численной дискретизации. С. К. Годунов замечательным образом связал свойство гиперболичности задачи механики сплошных сред с понятием корректности её постановки (эта связь совершенно необходима для конструирования качественно функционирующего вычислительного процесса). Исследования С. К. Годунова положили начало систематическому изучению гиперболических краевых

задач механики сплошных сред. При изучении квазилинейных гиперболических уравнений С. К. Годунов обнаружил, в частности, новый эффект резкой зависимости решений от вводимых в гиперболическую систему малых диссипативных членов: различные малые “вязкости” могут накладывать разные запреты на разрывные решения гиперболических квазилинейных систем. Ему же принадлежат оригинальные исследования единственности решения системы квазилинейных гиперболических уравнений.

Много сил и времени Сергей Константинович Годунов посвятил установлению связи между термодинамикой и корректностью задач математической физики, а также выяснению вопроса о месте уравнений механики сплошных сред в теории гиперболических уравнений в консервативной форме. Он выделил важный класс термодинамически согласованных (дважды дивергентных) систем, содержащих в себе систему уравнений газовой динамики. Он же обобщил понятие энтропии и закон её возрастания, а также нашел новые термодинамические соотношения, называемые теперь расширенной термодинамикой.

Параллельно с этим С. К. Годунов работал над построением математических моделей в теории упруго-пластического расчёта вязкоупругих деформаций металлов в промежуточной зоне между областями применимости чисто упругого и газодинамического подходов. Он — автор нелинейной релаксационной модели упруго-пластических деформаций.

С. К. Годунов активно участвовал в создании математической теории процессов, сопровождающих деформацию металлов при сварке взрывом. Проведенные под его руководством исследования позволили предсказать новый эффект — образование затопленной струи. Этот эффект затем был экспериментально подтвержден. Созданная при участии С. К. Годунова теория позволила разработать метод измерения вязкости металлов при высокоскоростных деформациях и установить новый критерий кумулятивного струеобразования.

На вычислительную линейную алгебру С. К. Годунов обратил внимание в связи с использованием ее методов в компьютерных вычислениях, обнаружив вычислительные парадоксы в классических постановках задач линейной алгебры. Это наблюдение привело его к переосмыслению самого понятия точности решения в задачах линейной алгебры с последующим введением в практику вычислений нового понятия — гарантированной точности компьютерных вычислений. Подобное развитие событий привело к созданию нового математического аппарата и развитию новых программно-алгоритмических средств в виде спе-

специализированных библиотек прикладных программ для решения задач линейной алгебры, учитывающих требования, предъявляемые технологиями компьютерных реализаций. Благодаря сформулированной С. К. Годуновым концепции гарантированной точности в вычислительную математику вошли такие новые фундаментальные понятия как спектральный портрет матрицы, критерий качества дихотомии, расщепление спектра, обобщенное уравнение А. М. Ляпунова и др.

С. К. Годунов изобрел и обосновал метод ортогональной прогонки, который успешно применяется, например, для расчёта критических параметров ядерных реакторов.

Важный вклад С. К. Годунов внес в развитие общей теории разностных схем. До сих пор широкой популярностью пользуется написанная им совместно с В. С. Рябеньким монография “Введение в теорию разностных схем”, изданная в 1962 году.

Благодаря разработанным школой С. К. Годунова интеллектуально насыщенным вычислительным методам, а также новому научному языку и необычной точке зрения на процесс компьютерных вычислений, существенный прогресс был достигнут в организации и технологии вычислений на современных многопроцессорных системах.

Труды С. К. Годунова не только изменили наши взгляды на подходы к решению широкого класса прикладных задач, но и указали практические алгоритмы их компьютерной реализации. Его труд первопреходца в науке в значительной степени определил современный облик численного анализа, задав наиболее перспективные направления развития этой важнейшей области прикладной математики.

В свой юбилейный год, работая в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН, академик Сергей Константинович Годунов руководит работой активно действующих и широко известных в России и за рубежом научных семинаров “Математика в приложениях” и “Постановки задач, допускающих распараллеливание на многопроцессорных вычислительных системах”. Он — председатель междисциплинарного диссертационного совета по подготовке научных кадров высшей квалификации по специальностям, определяющим современный облик прикладной математики. С. К. Годунов входит в редколлегии многих зарубежных и отечественных научных журналов.

Годунов — ученый всегда впереди остальных. Его уникальный научный стиль характеризуется удивительной цельностью и глубоким пониманием как значения фундаментальной математики, так и её опре-

деляющей роли в формировании правильных представлений о мире в прикладной науке. Все это — в сочетании с выдающейся способностью находить в математике объединяющие концепты и с повышенной концентрацией внимания на самых трудных и глубоких научных проблемах.

★ ★ ★

Широта и многогранность исследований Сергея Константиновича, его увлеченность, прекрасное владение арсеналом всех математических средств, работоспособность, последовательность в отстаивании своих идей и взглядов способствовали привлечению к научным исследованиям талантливой молодежи. С. К. Годунов широко известен как великолепный педагог. При всей глубине содержания его лекции всегда отличаются необыкновенная четкость и доступность изложения. При освещении почти всех вопросов, и даже следуя каким-либо известным образцам, Сергей Константинович Годунов всегда вносит в свои лекции существенные усовершенствования, проясняющие излагаемый материал в максимально возможной степени. Годунов был и остается неутомимым реформатором преподавания математики, а его труды в области дифференциальных уравнений, механики сплошных сред и линейной алгебры вот уже несколько десятилетий составляют неотъемлемую часть учебных университетских курсов по математике в МГУ и НГУ.

Глубокое влияние на развитие науки академик С. К. Годунов оказал не только своими научными изысканиями, но и своей многогранной педагогической деятельностью, приверженностью идее качественно нового обучения идущих на смену поколений молодых математиков, идейной щедростью по отношению к студенческой молодежи.

В 1975 г. на кафедре дифференциальных уравнений НГУ начал регулярно работать научный семинар по гиперболическим уравнениям, ставший базой научно-педагогической школы С. К. Годунова. Вокруг него образовался цельный коллектив преподавателей, студентов, аспирантов, активно занимающихся проблемами математической физики и составивших ядро школы С. К. Годунова. Одновременно с изучением гиперболических уравнений в этом коллективе активно рассматривались вопросы линейной алгебры, инициированные парадоксальными явлениями в численных расчетах. Эти разработки послужили основой для выработки совершенно новых постановок задач и для создания новых вычислительных алгоритмов. В 2000 г. на механико-

математическом факультете НГУ С. К. Годунов прочитал обязательный лекционный курс для магистрантов “Лекции по современным аспектам линейной алгебры”. Этот курс отличает высочайшая степень новаторства в выборе материала и ярко выраженный авторский подход. В дальнейшем этот курс читался другими лекторами.

Преподавая в университетах, С. К. Годунов был научным руководителем большого числа студентов, аспирантов, стажеров. Многие из его учеников успешно защитили кандидатские и докторские диссертации. Их работы получили заслуженное признание научного сообщества, были отмечены золотыми медалями АН СССР для молодых ученых, именными премиями Академии наук. Созданная С. К. Годуновым научная школа не ограничивается только лишь сотрудниками его отдела в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Его учеников, среди которых есть и члены Российской академии наук, можно встретить в университетах и научных центрах Москвы, Новосибирска, других российских городов, а также за рубежом.

★ ★ ★

За выполнение специальных заданий Правительства и решение важных задач новой оборонной техники С. К. Годунов удостоен звания Лауреата Ленинской премии (1959), награжден орденами “Трудового Красного знамени” (1956, 1957) и “Знак Почёта” (1954, 1981), юбилейной медалью “За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина” (1970), медалью “Ветеран труда” (1996).

За работы в области исследования эффектов, сопутствующих сварке взрывом, С. К. Годунову присуждена премия АН СССР им. А. Н. Крылова (1972), за книгу “Элементы механики сплошных сред” — премия РАН им. М. А. Лаврентьева (1993).

Сергей Константинович Годунов имеет звание почетного доктора Мичиганского университета, США (1997), удостоен знака отличия “За заслуги перед Новосибирской областью” (2004), ему присуждена премия фонда имени академика М. А. Лаврентьева “За выдающийся вклад в фундаментальную математику и её приложения” (2005 г.).

Свидетельством мирового признания выдающихся заслуг академика С. К. Годунова явилось проведение сразу двух Международных конференций, посвященных его методам. Одна из них прошла в США под названием “Godunov’s Method for Dynamics: Current Applications and Future Developments” (Ann-Arbor, 1–3 May 1997), другая — в Велико-

британии под названием “Godunov’s Methods: Theory and Applications” (Oxford, 12–22 October 1999).

★ ★ ★

Сергей Константинович Годунов — автор более 300 научных работ, в том числе 16-ти монографий.

Основные публикации.

Введение в теорию разностных схем. Москва: Физматгиз, 1962. 340 с. (соавтор Рябенский В. С.)

Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1971. 416 с.

Численное решение многомерных задач газовой динамики. Москва: Наука, 1976. 400 с. (соавторы: Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.)

Элементы механики сплошной среды. Москва: Наука, 1978. 304 с.;

Гарантированная точность решения систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, 1992. 360 с. (соавторы: Антонов А. Г., Кирилюк О. П., Костин В. И.)

Guaranteed Accuracy in Numerical Linear Algebra. Dordrecht: Kluwer, 1993. 535 p. (Math. and cts. Appl. 252) (with Antonov A., Kirilyuk O., Kostin V.)

Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994. Т. 1. Краевые задачи. 264 с.

Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Наука, 1997. 390 с.

Modern Aspects of Linear Algebra – Providence: AMS, 1997. 284 p. (Transl. Math. Monogr. Vol. 175).

Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients. – Providence: FMS, 1997. 284 p. (Trans. Math. Monogr.; Vol. 169).

Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002. 204 с. (по конспектам обязательного курса для магистрантов НГУ).

Elements of continuum Mechanics and Conservation Laws. Kluwer Acad/Plenum Publishers, 2003. 367 p. (with Romenskii E.)

В. Н. Бельих

**Индекс однородной самосопряженной краевой
задачи для систем обыкновенных
дифференциальных уравнений**

**The index of a homogeneous self-adjoint boundary
problem for systems of ordinary differential equations**

Абрамов А. А.¹, Ульянова В. И.¹, Юхно Л. Ф.²

¹*Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва,
Россия; alalabr@ccas.ru*

²*Институт математического моделирования РАН, Москва, Россия;
yukhno@imamod.ru*

Для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений вводится понятие индекса однородной самосопряженной краевой задачи, имеющей нетривиальное решение. Устанавливается связь между номером собственного значения нелинейной спектральной задачи и индексом возникающей однородной задачи. Выясняются некоторые свойства индекса задачи и соответствующего собственного значения. В случае общей нелинейной самосопряженной спектральной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений предлагается метод сведения ее к задаче для гамильтоновой системы. Рассматривается перенесение на исходную систему некоторых результатов для гамильтоновой системы, полученных ранее авторами. В частности, при некоторых предположениях о монотонной зависимости исходных данных от спектрального параметра дается эффективный метод вычисления количества собственных значений задачи с учетом их кратности, лежащих на заданном интервале изменения спектрального параметра, без вычисления самих собственных значений.

В докладе кратко излагаются некоторые результаты работ [1–3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00139).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф. Об индексе краевой задачи для однородной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 3. С. 490–497.

2. Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф. Об общей нелинейной сопряженной спектральной задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 4. С. 624–627.
3. Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф. О некоторых свойствах нелинейной спектральной задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 638–645.

**Математическое моделирование ударных течений
вязкого теплопроводного газа на основе
асимптотической модели**

**Mathematical modelling of shock flows of viscous
heat-conducting gas based on the asymptotic model**

Адрианов А. Л.

*Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. М. Ф. Решетнева, Сибирский федеральный университет,
Красноярск, Россия; riso@icm.krasn.ru*

Моделируется процесс взаимодействия скачка уплотнения (СУ) со сдвиговым слоем в *вязкой* и *невязкой* постановках задачи. СУ схематизируется поверхностью сильного газодинамического разрыва [1], на которой выполняются обобщенные асимптотические соотношения 0-го и 1-го порядков, учитывающие фактор *вязкости-теплопроводности* [2]. Газодинамический процесс предполагается стационарным, газ — совершенным; режим течения — сверхзвуковым ламинарным при больших числах Рейнольдса; реальный краевой эффект за СУ заменяется, посредством дополнительной дифференциальной связи, *модельным* [3]; невозмущенное течение в слое перед СУ рассматривается как источник с гладким распределением параметров [4]. При этих допущениях решаемую краевую задачу удастся свести к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, так что возмущенное решение ищется только за фронтом СУ и в малой его окрестности. Данная система интегрируется без приведения ее к нормальному виду, что позволяет легко осуществлять предельный переход (для возмущенной задачи) в невязкий нетеплопроводный газ с целью сравнения соответствующих *вязких* и *невязких* решений. Расчетному этапу предшествует аналитический этап получения системы “*рабочих уравнений*” из дифференциальных законов сохранения на СУ и в его гладкой окрестности, проводимый с учетом асимптотических преобразований. Эта сложная разовая процедура выполняется с помощью системы аналитических преобразований на ЭВМ типа REDUCE для фиксированных значений ряда газодинамических констант, после чего, полученная система “*рабочих уравнений*” и якобиан к ней компилируются в FORTRAN-среде. Существенно, что при интегрировании данной си-

системы, соотношения 0-го порядка на СУ (в частности, обычные *соотношения на косом скачке*) в любой его расчетной точке выполняются автоматически (!).

Аналитическая (в расширенном смысле) модель позволяет сложное действие фактора *вязкости-теплопроводности* расщепить и исследовать отдельно (на всех уровнях модели), что невозможно при решении рассматриваемой краевой задачи, например, с помощью однородных конечно-разностных алгоритмов на основе полных нестационарных *уравнений вязкого теплопроводного газа*.

Показано, что при определенных параметрах течения, не учет или учет в явном виде фактора *вязкости-теплопроводности* при расчете возмущенного течения в слое приводит к двум значительно различающимся математическим решениям задачи, первое из которых соответствует *газодинамическому приближению*, второе — вязкому *диффузионному*, когда роль указанного фактора велика [4]. Рассмотрен способ искусственной генерации дополнительных периодических возмущений в течении непосредственно перед скачком, чем достигается снижение его интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995.
2. Адрианов А. Л. Дифференциальные соотношения на скачке уплотнения в вязком газе при больших числах Рейнольдса // Тр. семинара “Математическое моделирование в механике”. Красноярск: ВЦК СО РАН, 1996. 18 с. Деп. в ВИНТИ 01.04.96. № 1052. В-96.
3. Адрианов А. Л. О модельной кривизне скачка уплотнения в неравномерном потоке // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 6. С. 6–10.
4. Адрианов А. Л. Другой подход к математическому моделированию течений вязкого теплопроводного газа с ударными волнами // Наука и технологии: Тр. XXVI Российской школы. Т. 1. М.: РАН, 2006. С. 108–122.

**К вопросу о построении расчетных сеток
в двумерных областях с помощью отображений**

**On grid construction problem in 2D domains
by means of mappings**

Азаренок Б. Н.

*Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва,
Россия; azarenok@ccas.ru*

Рассматривается задача построения структурированных разностных сеток в двумерных областях с помощью отображения $\mathbf{F} : \overline{\mathcal{P}} \rightarrow \overline{\Omega}$, параметрической области $\mathcal{P}$ с заданной невырожденной (квадратной) сеткой на физическую область Ω , где необходимо построить сетку. С этой целью сначала используется гармоническое отображение, для которого справедлива следующая

Теорема (Радó [1]). Пусть Ω_1, Ω_2 — односвязные ограниченные области в $\mathbb{R}^2$ с жордановой границей, Ω_2 — выпуклая, $\mathbf{f} : \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2$ является гомеоморфизмом. Тогда гармоническое продолжение отображения $\mathbf{F} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ является диффеоморфизмом.

Поскольку, как правило, физическая область Ω имеет сложную форму, то рассматривают гармоническое отображение $\Phi : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\mathcal{P}}$. Уравнения Лапласа обращаются и решается задача Дирихле для нахождения функций, осуществляющих обратное гармоническое отображение [2].

Несмотря на диффеоморфизм гармонического отображения, в невыпуклых областях с сильно изогнутыми границами его дискретная реализация может порождать вырожденные сетки. Приводится пример подковообразной области, для которой при не слишком большом количестве узлов сетка вырождена, а сильно измельченные сетки являются невырожденными, но с очень вытянутыми четырехугольными ячейками около изогнутой границы области. Показывается, что вырождение ячеек сетки происходит из-за ошибок аппроксимации, возникающих при дискретизации обращенных уравнений Лапласа.

С целью управления координатными линиями сетки используется дополнительное отображение и решается задача Дирихле для эллиптических дифференциальных уравнений [3]. Эти уравнения являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для универсального функционала,

предложенного в [4]. Идея использования дополнительного преобразования координат была предложена в [5]. Использование дополнительного отображения позволяет получать не только невырожденную сетку с небольшим числом узлов в невыпуклых областях, но и сетку с ячейками заданной формы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00173) и Отделения математических наук РАН (программа № 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Radó T. Aufgabe 41 // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1926. V. 35. P. 49.
2. Winslow A. M. Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh // J. Comput. Phys. 1966. V. 1. P. 149–172.
3. Азаренок Б. Н. О построении структурированных сеток в двумерных невыпуклых областях с помощью отображений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 48, № 5. С. 1–13.
4. Иваненко С. А. Управление формой ячеек в процессе построения сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 1. С. 1662–1684.
5. Годунов С. К., Прокопов Г. П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 5. С. 1031–1059.

Итерационный метод вычисления оптимального по расходу ресурсов управления линейными системами

Iterative method of computing optimal resource consumption control of linear systems

Александров В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; vladalex@math.nsc.ru

Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V, \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u — m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Предполагается, что система (1) полностью управляема, т. е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n, \quad (3)$$

и переводима в начало координат ограниченным управлением (2), т. е. x_0 принадлежит области управляемости V . Здесь $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений уравнения (1); $*$ — знак транспонирования.

ЗАДАЧА. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее систему (1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$ ($T \geq T_0$) и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (4)$$

Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

Предлагается новый численный метод решения задачи. Метод основан на оригинальном способе формирования финитного управления из начальных условий управляемой системы. Финитное управление представляет собой чередующуюся последовательность разнополярных воздействий, величины которых пропорциональны начальным условиям, взятыми с некоторыми весовыми коэффициентами. Финитное управление переводит линейную систему за фиксированное время из любого начального состояния в требуемое конечное состояние и дает приближенное решение задачи минимизации расхода ресурсов. Показано, что структура финитного управления позволяет определить структуру оптимального по расходу ресурсов управления. Дан способ задания начального приближения и предложен итерационный алгоритм вычисления оптимального по расходу ресурсов управления. Получена система линейных алгебраических уравнений, связывающая отклонения начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовых координат в конечный момент времени от заданного конечного состояния. Найдена зависимость между отклонениями моментов переключений и отклонениями начальных условий сопряженной системы. Приведен вычислительный алгоритм. Итерационный процесс вычисления оптимального управления сводится к последовательности решений систем линейных алгебраических уравнений и интегрированию матричного уравнения на интервалах перемещения моментов переключений. Найден радиус и установлена квадратичная скорость локальной сходимости. Доказана сходимость вычислительного процесса и последовательности управлений к оптимальному по расходу ресурсов управлению.

Работа выполнена при поддержке СО РАН (проект № 85).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Приближенное решение линейной задачи на минимум расхода ресурсов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 3. С. 418–430.
2. Александров В. М. Численный метод решения задачи линейного быстродействия // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 6. С. 918–931.

Численный анализ задач граничного управления для нестационарных уравнений тепловой конвекции

Numerical analysis of boundary control problems for nonstationary equations of heat convection

Алексеев Г. В.¹, Терешко Д. А.²

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия; ¹alekseev@iam.dvo.ru, ²ter@iam.dvo.ru

В ограниченной области Ω с границей Γ , состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N , рассматривается начально-краевая задача

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\beta T \mathbf{G} \text{ в } Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } Q, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Sigma, \quad (2)$$

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda \Delta T = f \text{ в } Q, \quad T|_{t=0} = T_0 \text{ в } \Omega, \quad (3)$$

$$T = \psi \text{ на } \Sigma_D, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Sigma_N, \quad (4)$$

описывающая процесс распространения тепла. Здесь $\mathbf{u}$, p и T — вектор скорости, давление и температура жидкости, $\nu = \text{const} > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, β — объемный коэффициент теплового расширения, $\mathbf{G}$ — вектор ускорения свободного падения, $\lambda = \text{const} > 0$ — коэффициент теплопроводности, f — объемная плотность источников тепла, $\mathbf{g}$, ψ и χ — некоторые функции, $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $Q = \Omega \times (0, t_{\max})$, $\Sigma = \Gamma \times (0, t_{\max})$, $\Sigma_D = \Gamma_D \times (0, t_{\max})$, $\Sigma_N = \Gamma_N \times (0, t_{\max})$.

Для данной модели ставятся задачи граничного управления, которые формулируются в виде задач условной минимизации функционалов качества, зависящих как от слабых решений исходной начально-краевой задачи, так и управлений. Роль последних играют неизвестные значения вектора скорости и потока тепла на определенных участках границы области течения. На основе методов работ [1, 2] выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия минимума.

Система оптимальности состоит из трех частей. Первая ее часть представляет собой начально-краевую задачу (1)–(4) для вектора скорости $\mathbf{u}$, давления p и температуры T . Роль второй части играет сопряженная задача для сопряженной скорости $\mathbf{q}$, сопряженного давления σ

и сопряженной температуры θ . Третьей частью является равенство, связывающее между собой управления, входящие в первую часть, и сопряженное состояние из второй части системы оптимальности. Если, например, в качестве единственного управления выступает поток тепла $\chi \in L^2(\Sigma_N)$, то для задачи минимизации функционала

$$(1/2)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_Q^2 + (\mu/2)\|\chi\|_{\Sigma_N}^2$$

вторая и третья части системы оптимальности имеют следующий вид:

$$-\mathbf{q}_t - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{q} + (\nabla \mathbf{u})^t \mathbf{q} - \nu \Delta \mathbf{q} + \nabla \sigma = -(\mathbf{u} - \mathbf{u}_d) - \theta \nabla T \text{ в } Q,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \text{ в } Q, \quad \mathbf{q}|_{t=t_{max}} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{q} = \mathbf{0} \text{ на } \Sigma,$$

$$-\theta_t - \mathbf{u} \cdot \nabla \theta - \lambda \Delta \theta = -\beta \mathbf{G} \cdot \mathbf{q} \text{ в } Q, \quad \theta|_{t=t_{max}} = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\theta = 0 \text{ на } \Sigma_D, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_N, \quad \chi = \theta/\mu \text{ на } \Sigma_N.$$

На основе развитой теории разрабатываются эффективные численные алгоритмы решения рассматриваемых задач. Указанные алгоритмы основаны на методе конечных элементов дискретизации краевых задач и методе Ньютона численного решения нелинейных уравнений. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по решению конкретных экстремальных задач. Исследуется зависимость решений от основных параметров: числа Рейнольдса, числа Рэлея, а также параметра регуляризации, входящего в выражение минимизируемого функционала качества.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-2810.2008.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-98518-р-восток-а) и ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-II-СУ03-003 и 09-III-A-03-07).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев Г. В. Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепловой конвекции // Вестн. НГУ. Сер. Мат., мех., информат. 2006. Т. 6, № 2. С. 6–32.
2. Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008.

**Сингулярные граничные интегральные уравнения
краевых задач динамики упругих сред
при движущихся нагрузках**

**Singular boundary integral equations in boundary
value problems of the elastic medium dynamics
under moving loads**

Алексеева Л. А.¹, Кайшибаева Г. К.²

Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан;

¹alexeeva@math.kz, ²gulnarkaishi@mail.ru

Явления с движущимися нагрузками широко распространены на практике. К ним относятся разнообразные процессы, связанные с передвижением транспорта в различных средах, либо перемещением транспортируемых грузов в тоннелях и трубопроводах различного назначения. К данному классу задач можно отнести и задачи дифракции сейсмических волн на протяженных подземных сооружениях. При математическом моделировании таких процессов приходится строить решения краевых задач в классе “бегущих” функций, параметрических и автомодельных по ряду переменных. Параметр задачи — скорость движения источника возмущений в среде — существенно влияет на тип уравнений движения, который зависит от скоростей распространения волн в средах, так называемых звуковых скоростей. Их может быть несколько в зависимости от вида волн. В изотропной упругой среде их две: одна определяет скорость распространения волн объемной деформации, а вторая — сдвиговой. В многокомпонентных средах звуковых скоростей становится больше. Тип дифференциальных уравнений, описывающих движение среды, меняется в зависимости от отношения скорости источника возмущений к звуковым скоростям (чисел Маха). При этом приходится решать краевые задачи эллиптического, гиперболического и смешанного типов.

Здесь подобный класс краевых задач рассмотрен для изотропных упругих сред, движение которых описывается системой уравнений Ламе. Для их решения разработан метод обобщенных функций [1, 2]. Здесь этот метод излагается для построения решений стационарных краевых задач для уравнений Ламе при сверхзвуковых скоростях движения бегущих нагрузок по поверхности цилиндрической полости в

упругом пространстве. В этом случае тип уравнений в подвижной системе координат гиперболический и стандартные методы построения граничных интегральных уравнений, характерных для эллиптических задач, становятся непригодными из-за особенностей фундаментальных решений на волновых фронтах.

С использованием аппарата теории обобщенных функций построен тензор Грина и другие фундаментальные решения уравнений Ламе в классе бегущих вектор-функций, а так же динамические аналоги формул Грина и Гаусса в пространстве обобщенных вектор-функций и их регулярные интегральные представления. Получены сингулярные граничные интегральные уравнения, определяющие решение первой и второй краевой задачи динамики упругой среды при действии бегущих нагрузок.

Разработан алгоритм численной реализации решения первой краевой задачи. Приводятся результаты расчета динамики среды при разных типах и скоростях бегущих нагрузок [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Alekseyeva L. A. Boundary element method of boundary value problems of elastodynamics by stationary running loads // Int. J. Eng. Anal. Bound. Elem. 1998. N 11. P. 37–44.
2. Алексеева Л. А. Обобщенные решения краевых задач для одного класса бегущих решений волнового уравнения // Мат. журн. 2006. Т. 8, № 2(28). С. 5–24.
3. Кайшибаева Г. К. Напряженно-деформированное состояние упругой среды при действии сосредоточенных сверхзвуковых нагрузок // Мат. журн. 2006. Т. 6, № 4(22). С. 57–65.

**Задача типа Стефана для сингулярного
интегрального уравнения первого рода**
**Stephan problem for the singular integral equation
of the first kind**

Аниконов Д. С.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; anik@math.nsc.ru*

В ограниченной области рассматривается нелинейное сингулярное интегральное уравнение первого рода. Подынтегральная функция по переменной интегрирования может иметь разрывы первого рода на некоторых гиперповерхностях внутри области интегрирования. Особенностью ситуации является тот факт, что неизвестная подынтегральная функция зависит от большего числа переменных, чем сам интеграл, который считается известным. В таких условиях ставится задача определения указанных гиперповерхностей и доказывается теорема единственности, при условии выполнения некоторого неравенства. Метод исследования основан на изучении характера особенности сингулярного интеграла вблизи поверхности разрыва подынтегральной функции. Эта предварительная часть работы выполнена при довольно общих ограничениях. Затем при более жестких предположениях доказывается сама теорема единственности. Прослежена связь исследованной задачи с задачами интегральной геометрии, играющими важную роль в теории обратных задач для уравнений математической физики. Кроме того, указано и на самостоятельную теоретическую ценность указанного подхода, как одного из возможных направлений исследования интегральных уравнений.

**Численное решение задачи Коши для уравнений
идеальной пластичности с условием текучести,
зависящим от среднего напряжения**

**Numerical solution of the Cauchy problem
for equations of ideal plasticity with yield condition
depending on the mean stress**

Аннин Б. Д., Алёхин В. В.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; annin@hydro.nsc.ru*

Квазистатические уравнения идеальной пластичности для определения напряжений и скоростей перемещений в случае полной пластичности имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1)$$

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|) = 2(k_s - m\sigma), \quad (2)$$

$$\sigma < k_s/m, \quad \sigma_2 = \sigma_3, \quad (3)$$

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \quad (5)$$

Здесь σ_{ij} — компоненты симметричного тензора напряжений в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 ; $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ — среднее напряжение; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3; запятая перед индексом означает частную производную по соответствующей пространственной координате; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; $k_s > 0, m > 0$ — постоянные; e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации; u_i — компоненты вектора скоростей перемещений; n_i — компоненты единичного собственного вектора тензора напряжений, соответствующего некрратному собственному значению (главному напряжению) σ_1 .

Равенство (2) означает линейную зависимость максимального касательного напряжения от среднего давления [1] (такая зависимость характерна для некоторых грунтов). Равенство (3) — условие полной

пластичности Хаара — Кармана [1]. Равенство (4) — условие несжимаемости. Соотношение (5) — условие изотропии [2].

Система (1)–(5) является гиперболической. Для этой системы рассматривается задача о распространении зон пластического состояния в безграничной среде от границы выпуклой осесимметричной полости, на которой действуют нормальное давление, касательные усилия и заданные скорости перемещений. В [3] для системы (1)–(5) при $m = 0$ предложен численный метод решения задачи Коши в ортогональной криволинейной системе координат. Этот метод может быть применен к решению задачи Коши для системы (1)–(5) при $m \neq 0$.

Предложенный алгоритм проиллюстрирован на решении тестовых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН № 40.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория пластичности: Сб. статей / Под ред. Работнова Ю.Н. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948.
2. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001.
3. Аннин Б. Д., Алёхин В. В., Остапенко В. В. Алгоритм численного решения задачи Коши для уравнений пластичности Треска // Вычисл. мех. сплош. сред. 2008. Т. 1, № 1. С. 5–13.

**Алгоритм построения ротационных сеток
без вырождений**
**Algorithm for construction of rotational grids
without singularities**

Артемова Н. А.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
Россия; ana@imm.uran.ru*

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с конструированием блочно-структурированных криволинейных сеток в осесимметричных трехмерных односвязных и многосвязных областях простых и сложных топологий, когда угол φ поворота образующей вокруг оси равен 2π . Алгоритм построения криволинейной сетки в заданной трехмерной осесимметричной области осуществляется ротационным методом и основан на вращении двумерного радиального сечения области, расположенного в плоскости xz , вокруг оси z [1].

Сечение может быть односвязным или многосвязным с однозначным и неоднозначным отображением в плоскость криволинейных координат. При этом в сечении генерируется двумерная структурированная или блочно-структурированная оптимальная сетка с использованием алгоритма МОПС-2Aw [2–3].

Критерием оптимальности является близость сеток к равномерным и ортогональным при заданной расстановке узлов на границе.

Если ось вращения находится вне расчетной области, то сетка построится без особенностей. Если радиальное сечение примыкает к оси вращения, то на ней образуются особенности сеток типа O , H и C . В результате исследования возникающих особенностей выделены три вида блоков радиального сечения, приводящие к ним. Это блоки, одна из сторон которых примыкает к оси симметрии полностью (первый вид), частично (второй вид) или одной точкой — вершиной (третий вид).

Блоки второго вида можно свести к совокупности блоков двух других видов.

В блоках первого вида возникает особенность, свойственная цилиндрической системе координат внутри всего блока вдоль оси вращения. На оси вращения шестигранные ячейки вырождаются в призмы с треугольным основанием [4]. Для исключения такой особенности часть

блока, примыкающая к оси вращения, “вырезается”. В вырезанном блоке специальным алгоритмом, основанным на геометрическом подходе, строится сетка без особенностей. Для построения невырожденной сетки используется алгоритм линейной интерполяции.

В блоках третьего вида особенность возникает в точке примыкания к оси вращения. В данной точке шестигранные ячейки также вырождаются в призмы с треугольным основанием. Предлагаемый алгоритм устранения особенностей в блоках данного вида основан на геометрическом подходе.

На начальном этапе алгоритмы разрабатывались совместно с О. Б. Хайруллиной.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00173).

ЛИТЕРАТУРА

1. Артемова Н. А., Хайруллина О. Б. Конструирование трехмерных блочно-структурированных сеток, основанных на вращении двумерных многосвязных сечений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 11. С. 2058–2066.
2. Khairullina O.B. Method of constructing block regular optimal grids in two-dimensional multiply connected domains of complicated geometries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 1996. V. 11, N 4. P. 343–358.
3. Хайруллин А. Ф., Хайруллина О. Б. Автоматическое построение начального приближения блочно-структурированной криволинейной сетки // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 5. С. 96–107.
4. Ушакова О. В. Классификация шестигранных ячеек // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 8. С. 1406–1428.

О решениях начально–краевой задачи одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси

On solutions to the initial–boundary problem for the one–dimensional heat–conducting motion of a two–phase mixture

Ахмерова И. Г.¹, Папин А. А.²

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;

¹iakhmerova@mail.ru, ²papin@math.asu.ru

Рассматривается одномерное движение между непроницаемыми теплоизолированными стенками двухфазной смеси, состоящей из твердых частиц и газа. В основу математической модели положены уравнения сохранения массы и импульса для каждой из фаз и уравнение энергии для среды [1, 2]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho_1^0 s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1^0 s v_1)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial(\rho_2^0(1-s))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2^0(1-s)v_2)}{\partial x} = 0, \\ \rho_1^0 s \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial(sp_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(s) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + F + \rho_1^0 s g, \\ \rho_2^0(1-s) \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial((1-s)p_2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_2(s) \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - F + \rho_2^0(1-s)g, \\ F &= B(s)(v_2 - v_1) + p_2 \frac{\partial s}{\partial x}, \quad p_1 - p_2 = p_c(s), \quad p_2 = R\rho_2^0 \theta, \\ c_1 \rho_1^0 s \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &+ c_2 \rho_2^0(1-s) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\chi(s) \frac{\partial \theta}{\partial x}).\end{aligned}$$

Здесь x, t — переменные Эйлера; ρ_i^0, v_i — соответственно истинная плотность и скорость i -ой фазы ($i = 1$ — твердые частицы, $i = 2$ — газ), s — объемная концентрация твердых частиц, θ — абсолютная температура смеси, p_1 — эффективное давление твердых частиц, p_2 — внутреннее давление газа, g — плотность массовых сил, $c_i = \text{const} > 0$ — теплоемкость при постоянном объеме, $R = \text{const} > 0$ — универсальная газовая постоянная; кроме того, $\mu_i(s)$ — вязкости фаз, $B(s)$ — коэффициент взаимодействия фаз, $\chi(s)$ — коэффициент теплопроводности

смеси, $p_c(s)$ — разность давлений (заданные функции). Истинная плотность твердых частиц ρ_1^0 принимается постоянной. Искомыми являются величины $s, \theta, \rho_2^0, v_i, p_i, i = 1, 2$.

В докладе излагаются результаты о разрешимости начально-краевой задачи для сформулированной системы уравнений.

Работа выполнена в рамках программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)” (проект № 2.2.2.4/4278).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gard S. K., Pritchett J. W. Dynamics of gas-fluidized beds // J. Appl. Phys. 1975. V. 46, № 10, P. 4493–4500.
2. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
3. Папин А. А. О локальной разрешимости краевой задачи тепловой двухфазной фильтрации // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1(37). С. 114–126.

История и анализ развития компьютерной архитектуры

The history and analysis of computer architecture development

Бабаян Б. А.

Intel® Corporation, Москва, Россия; boris.a.babayan@intel.com

1. Введение. За долгую историю развития компьютеров компьютерная архитектура претерпела многие изменения и улучшения. Имея за плечами более 50 лет опыта работы в проектировании компьютеров, автор проводит анализ развития архитектуры с самого начала эры компьютеров. Особое внимание уделяется важному вкладу, который внесли советские и российские ученые в проектирование и построение микропроцессоров и компьютерных систем. Обзор эволюции компьютерных архитектур начинается с периода ранних последовательных машин и, после обсуждения различных инноваций параллельных машин, завершается анализом суперскалярных компьютерных архитектур. Автор делится знаниями, пониманием и наблюдениями в области разработки нескольких поколений компьютеров Эльбрус, которые применялись в важнейших сферах деятельности как в бывшем СССР, так и в нынешней России. Сегодня развитие компьютерной архитектуры достигло уровня, когда приходится учитывать и обходить ограничения суперскалярной архитектуры. Проводится анализ и дается оценка возможностей и ограничений современной суперскалярной архитектуры. Обсуждается критическая ситуация в области компьютерных архитектур, возникающая, в связи с ограничением роста производительности суперскаляра, а также пути решения этой проблемы.

2. Анализ эволюции компьютерной архитектуры. Производительность первых последовательных компьютеров зависела от производительности арифметических устройств. Для улучшения скорости и надежности этих устройств использовались базовые архитектурные решения, включая метод двухрядовых кодов (двоичное умножение, деление, вычисление квадратного корня из числа), сегодня известный как “carry-safe” устойчивость к отказам и так далее. Эти решения были воплощены в машинах М-40, 5Э926. В начале 50-ых годов одной из основных проблем в исследованиях и проектировании была проблема

разработки и реализации параллельных вычислений. В России первые шаги в области параллелизма были сделаны Сергеем Лебедевым, который создал БЭСМ — предшественницу российских параллельных вычислений. С увеличением числа арифметических устройств перед проектировщиками встала задача, как заставить их работать параллельно. Появились первые суперскаляры. В России — Эльбрус-1, в Intel — PentiumPro. Эльбрус-1 был спроектирован в 1978 году и имел усовершенствованную суперскалярную процессорную архитектуру со стековой организацией, мультипроцессорной поддержкой, с использованием тегов для обеспечения высокой надежности и другими характеристиками, которые соответствовали современному техническому уровню. Одной из наиболее важных технологий, реализованных в Эльбрусе-1, была технология защищенных вычислений или типовая защита (type-safety). До 80-ых годов многие университеты и компании активно занимались исследованиями в этой области, они создавали экспериментальные и опытные образцы систем, нацеленных на решение защиты этих систем от пагубных последствий ошибок в программах, вирусов и внешних атак злоумышленников. В начале 80-ых годов Intel создал систему iAPX 432. Эта разработка включала типовую защиту, однако ее реализация не была успешной, так как Intel не стал вводить теги и вместо этого использовал традиционный подход. Подход к типовой защите в Эльбрусе основан на контроле данных на всех уровнях системы: в аппаратуре, в языке и в операционной системе. Преимущества такой безшовной интеграции аппаратуры и программного обеспечения состоят в исключении возможности распространения вируса, значительном повышении эффективности отладки и качества разработанных программ. Это решение было в последствие улучшено и внедрено в новые поколения компьютеров Эльбрус.

Технологии Эльбрус получили свое развитие в серии еще более продвинутых разработок. Эльбрус-2 — 10-процессорный суперкомпьютер был выпущен в 1984 году, он использовался для решения важных стратегических задач государства, включая Российскую противоракетную систему. В 1985 году, за 15 лет до того, как Intel и HP начали рассматривать архитектуру, основывающуюся на явном параллелизме на уровне операций (EPIC), началась разработка новой линии суперкомпьютеров Эльбрус-3, ориентированных на архитектуру с широким командным словом (VLIW). Инновационные конструкторские концепции и особенности этого компьютера до сих пор опережают подобные западные разработки. Ключевая технология — Very Long Instruction Word

(VLIW)/Explicitly Parallel Instruction Computing (EPIC). Эта технология позднее использовалась в семействе процессоров Intel R ItaniumR, выпущенном в 2000 году. Микропроцессоры Crusoe и Efficeon были разработаны корпорацией Transmeta также на основе VLIW/EPIC с использованием двоичной трансляции (code morphing) в качестве основной технологии.

В связи с быстрым развитием технологий компьютеры становятся все более сложными. Высокая сложность суперскаляров не позволяет говорить о дальнейшем росте производительности. Распараллеливание последовательных операций должно осуществляться прямо во время исполнения, “на лету”. Суперскаляр должен определять информационные зависимости, он должен знать, какие команды должны выполняться с перестановкой, он должен выполнять переименование регистров. Техническое решение, использовавшееся в Эльбрусе-3, позволяло компилятору и аппаратуре совместно отвечать за сложность выполнения вычислительных задач. Реализация Эльбруса 3, основанного на VLIW/EPIC, опиралась на мощные компиляторы и явный параллелизм, чтобы обеспечить высокий уровень производительности. Наряду с VLIW/EPIC в Эльбрусе-3 велась разработка технологии двоичной трансляции. Эта технология решает проблему совместимости старых и новых архитектур. Микропроцессор Эльбрус-3М, выпущенный в 2007 году, в котором были реализованы многие усовершенствованные технологии предыдущих поколений компьютеров Эльбрус, продемонстрировал значительные преимущества такого подхода.

Сегодня много говорят о технологии двоичной трансляции. Многие компьютерные умы работают над этой идеей, потому что суперскаляр достиг своего предела и больше не может обеспечивать существенного роста производительности. Эффективная двоичная трансляция, подержанная архитектурно, может открыть новые пути проектирования процессоров. Она обладает потенциалом, способным изменить компьютерный мир и спасти его от застоя.

Совершенствование проточной части гидротурбины методами математического моделирования

Improvement hydroturbine flow passage shape using mathematical modeling methods

Банников Д. В.¹, Черный С. Г.², Чирков Д. В.²,
Скороспелов В. А.³, Турук П. А.³

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

²Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск,
Россия; cher@ict.nsc.ru

³Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия

Постоянно повышающиеся требования к коэффициенту полезного действия, кавитационным и прочностным характеристикам гидротурбины делают актуальной разработку новых подходов численного анализа их энергетических характеристик. Актуальной также остаётся проблема развития и совершенствования методов оптимального проектирования форм проточных частей гидротурбин.

В [1] авторы предложили систему автоматического оптимизационного проектирования рабочего колеса, одного из основных элементов гидротурбины. Система основана на последовательности расчетов течений невязкой, несжимаемой жидкости для нескольких тысяч вариаций геометрии и поиске формы, которая обеспечит минимум ряда заданных целевых функционалов одновременно. Использование уравнений Эйлера для моделирования пространственного потока позволило существенно сократить время оптимизационных расчетов.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию предложенных авторами методов. Разработана экономичная параметризация спиральной камеры, статора и отсасывающей трубы, позволяющая эффективно варьировать их геометрии изменением небольшого числа параметров.

Использование невязкой модели жидкости не позволяет непосредственно рассчитывать вязкие потери энергии в проточном тракте, а значит оценивать коэффициент полезного действия гидротурбины — основной характеристики турбомашин. Расчёт КПД с использованием вязких турбулентных моделей требует больших временных затрат

и трудно применим в задачах глобальной оптимизации. Поэтому актуальными остаются подходы, сочетающие сложные и упрощенные модели. Авторами предложена комбинированная методика, позволяющая оценивать потери энергии в проточной части на основе кинематики пространственного невязкого потока и эмпирических зависимостей, полученным обобщением экспериментальных данных. Такой подход позволяет за короткое время определять КПД всей гидротурбины.

Проведена серия численных расчетов по максимизации КПД турбины Сангтудинской ГЭС (Таджикистан). В докладе представлен анализ полученных решений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00364).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный С.Г., Чирков Д.В., Лапин В.Н., Скороспелов В.А., Шаров С.В. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006.

**Численное решение нелинейного уравнения
Гельмгольца**
**Numerical solution of the nonlinear Helmholtz
equation**

Барух Г.¹, Фибих Г.², Цынков С.³

¹Тель-Авивский университет, Тель-Авив, Израиль;
guybar@post.tau.ac.il

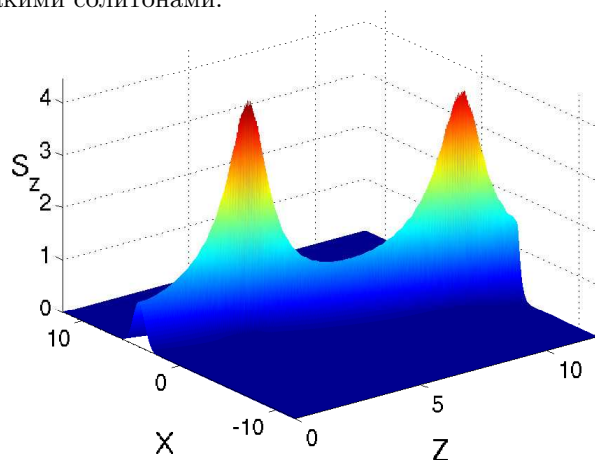
²Тель-Авивский университет, Тель-Авив, Израиль;
fibich@post.tau.ac.il

³Университет штата Северная Каролина, Ралейх, Северная
Каролина, США; tsynkov@math.ncsu.edu

Нелинейное уравнение Гельмгольца описывает распространение интенсивных пучков лазерного излучения в (прозрачных) диэлектриках типа Керра, когда основным явлением, представляющим интерес с точки зрения физики, является самофокусировка. В докладе описывается разностный метод высокого порядка точности для решения этого уравнения, позволяющий проводить расчеты в том числе и для сред с разрывными оптическими характеристиками. Метод использует компактные разности четвертого порядка, включая односторонние компактные разности для аппроксимации условий на поверхностях разрыва. Ключевыми элементами метода являются высокоточные нелокальные искусственные краевые условия, обеспечивающие прозрачность внешних границ для всех исходящих волн и одновременно задающие входящие лазерные пучки, а также способ решения получающейся системы разностных уравнений, основанный на линеаризации по Ньютону и требующий специального подхода из-за того, что нелинейность типа Керра недифференцируема для комплекснозначных решений.

Предлагаемый метод эффективен для исследования важного и долго остававшегося нерешенным вопроса в нелинейной оптике, а именно вопроса о возникновении особенности решения в случае, когда рассеяние света в среде предполагается направленным преимущественно вперед (так называемое параксиальное приближение). Впервые удалось получить решения без особенности для тех режимов, для которых решение в параксиальном приближении, которое описывается нелинейным уравнением Шредингера, перестает существовать уже на конеч-

ных длинах распространения пучка. Кроме того, были рассчитаны решения в виде ‘узких’ (порядка одной длины волны) непараксиальных солитонов, а также промоделированы взаимодействия (‘столкновения’) между такими солитонами.



На рисунке представлено решение нелинейного уравнения Гельмгольца (плотность потока энергии электромагнитного поля) с двумя циклами фокусировки-дефокусировки, полученное для случая, когда энергия падающего лазерного пучка на 28% превосходит критическое значение, при котором в решении нелинейного уравнения Шредингера образуется особенность.

Работа третьего автора выполнялась при поддержке Национального научного фонда США (гранты DMS-0509695 и DMS-0810963) и Бюро научных исследований ВВС США (грант FA9550-07-1-0170).

ЛИТЕРАТУРА

1. Baruch G., Fibich G., and Tsynkov S. High-order numerical method for the nonlinear Helmholtz equation with material discontinuities in one space dimension // J. Comput. Phys. 2007. V. 227. С. 820–850.
2. Baruch G., Fibich G., and Tsynkov S. Simulations of the Nonlinear Helmholtz equation: arrest of beam collapse, nonparaxial solitons, and counter-propagating beams // Optics Express. 2008. V. 16, N 17. С. 13323–13329.
3. Baruch G., Fibich G., and Tsynkov S. A high-order numerical method for the nonlinear Helmholtz equation in multidimensional layered media // J. Comput. Phys. (To appear).

Метод усреднения в теории нелинейных почти периодических колебаний

Averaging method in the theory of nonlinear almost periodic oscillations

Белоносов В. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; bvs@math.nsc.ru

В банаховом пространстве B рассматривается дифференциальное уравнение в нормальной в смысле Н. Н. Боголюбова форме

$$u_t = \varepsilon f(t, u). \quad (1)$$

Здесь $u(t)$ — неизвестная функция, отображение f непрерывно по (t, u) и почти периодически по t , ε — малый параметр. К таким уравнениям сводятся многие задачи теории возмущений многочастотных колебаний в распределенных системах. Возьмем, например, абстрактное гиперболическое уравнение в гильбертовом пространстве H

$$v_{tt} = -A^2 v + \varepsilon g(t, v), \quad (2)$$

где A — линейный самосопряженный положительный оператор с компактной резольвентой, g — непрерывная оператор-функция, периодическая или почти периодическая по t . Заменой переменных

$$v = A^{-1}(e^{iAt}x + e^{-iAt}y), \quad v_t = ie^{iAt}x - ie^{-iAt}y$$

уравнение (2) сводится к системе типа (1) относительно вектора $u = (x, y)$ в пространстве $B = H \otimes H$.

Каждой почти периодической функции $F(t)$ соответствует ее формальный ряд Фурье $\sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{i\lambda_m t}$ (см. [1]). Однако в отличие от случая периодических функций этот ряд, вообще говоря, нельзя интегрировать почленно, так как показатели λ_m могут сколь угодно быстро стремиться к нулю. Во многих задачах данное обстоятельство приводит к сложным вопросам, известным под общим названием “проблемы малых знаменателей”. В частности, эта проблема возникает при попытке применить к уравнению (1) классический метод усреднения Крылова — Боголюбова [2, 3].

Мы предлагаем так модифицировать метод усреднения, чтобы избежать проблемы малых знаменателей. Пусть $0 < \alpha < 1$, а функция f имеет непрерывные и ограниченные производные $D_u^k f$ порядков $k \leq n + 1$. Тогда существует замена переменных

$$u = v + \varepsilon^\alpha \varphi_1(t, v, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{n\alpha} \varphi_n(t, v, \varepsilon),$$

приводящая исходное уравнение к виду

$$v_t = \varepsilon f_1(t, v, \varepsilon) + \varepsilon^{1+\alpha} f_2(t, v, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{1+n\alpha} f_{n+1}(t, v, \varepsilon).$$

Функции φ_k и f_k почти периодичны по t , непрерывны и ограничены вместе с производными первого порядка по v , а их ряды Фурье при $k \leq n$ таковы, что

$$f_k \sim \sum_m f_{km} e^{i\mu_{km}t}, \quad |\mu_{km}| < 2\varepsilon^{1-\alpha}, \quad \varphi_k \sim \sum_m \varphi_{km} e^{i\nu_{km}t}, \quad |\nu_{km}| > \varepsilon^{1-\alpha}.$$

Укороченное уравнение

$$v_t = \varepsilon f_1(t, v, \varepsilon) + \varepsilon^{1+\alpha} f_2(t, v, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{1+(n-1)\alpha} f_n(t, v, \varepsilon)$$

приблизительно описывает медленный «дрейф» искомого решения, на который накладываются быстрые осцилляции, определяемые отображением

$$\tilde{u} = v + \varepsilon^\alpha \varphi_1(t, v, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{(n-1)\alpha} \varphi_{n-1}(t, v, \varepsilon).$$

Для всякого $T > 0$ погрешность приближенного решения $\tilde{u}$ при условии $\tilde{u}(0) = u(0)$ удовлетворяет неравенству

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq C(T)\varepsilon^{n\alpha}, \quad 0 \leq \varepsilon t \leq T,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве B .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00221), Президиума РАН (Программа фундаментальных исследований № 2), АБЦП Рособразования (проект 2.1.1.4918).

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

**К проблеме численного решения
эллиптических задач**

**On the problem of the numerical solution
to the elliptic problems**

Белых В. Н.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; belykh@math.nsc.ru*

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идет об аппроксимации континуальных объектов конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих финитную формализацию. При этом качество дискретизаций оценивается сравнением ее характеристик (точности и объема) с асимптотиками двух числовых параметров $\alpha_n(X)$ и $H_\varepsilon(X)$, характеризующих аппроксимационные возможности компакта X решений задачи [1]. Точнее, с асимптотиками александровского n -поперечника $\alpha_n(X)$ при $n \rightarrow \infty$ и колмогоровской ε -энтропии $H_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Напомним, что поперечник $\alpha_n(X)$ характеризует способность компакта X “хорошо” приближаться компактами топологической размерности $\leq n$, а энтропия $H_\varepsilon(X)$, определяемая двоичным логарифмом от минимального числа элементов в наиболее экономном 2ε -покрытии X , задает минимальный объем информации в битах, требуемый для различения элементов компакта X с точностью $\varepsilon > 0$.

Величины асимптотик $\alpha_n(X)$ и $H_\varepsilon(X)$ определяются гладкостью составляющих компакт X элементов, поэтому грань, отличающая качественную дискретизацию от всех прочих, характеризуется наследованием дифференциальных свойств решений. Иначе говоря, практическая эффективность численного метода зависит от того, насколько полно конечномерные задачи, получаемые дискретизацией исходной краевой, наследуют дифференциальные свойства решений последней. Именно по этой причине уникальные аппроксимационные возможности компактов решений эллиптических задач (характеризующиеся наличием шаудеровских оценок) находятся в конфликте с точностью, которую способны обеспечивать численные методы с главным членом погрешности (квадратур, конечных разностей, конечных элементов и т. п.).

В докладе указан принципиально новый — *ненасыщаемый* (см. [1, 2]) — метод численного решения осесимметричных краевых задач для

уравнения Лапласа в случае гладких тел вращения достаточно произвольной формы. Специфическая его особенность — отсутствие главного члена погрешности и, как результат — способность автоматически подстраиваться к любым естественным для задач классам корректности. В результате экстраординарные запасы гладкости отыскиваемых решений задач, к примеру, бесконечная дифференцируемость и аналитичность, прежде находившиеся на периферии насущных интересов реальных вычислений, становятся их активным персонажем.

Полученный результат имеет принципиальный интерес, поскольку в случае C^∞ -гладких решений построенный численный метод с точностью до медленно растущего множителя $O(\ln^2 n)$ реализует абсолютно неулучшаемую экспоненциальную оценку погрешности $O(e^{-n\varrho})$, $\varrho = \text{const}$, n — число свободных параметров у функций, из которых конструируется приближение. Неулучшаемость оценки обусловлена асимптотикой $\alpha_n(X)$ компакта X аналитических функций, содержащего точное решение задачи. Эта асимптотика также имеет вид $O(e^{-n\varrho})$.

В качестве примера с высокой точностью численно решена задача внешнего безотрывного обтекания потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости эллипсоида вращения с удлинением, равным 1000 (см. [2]). Отметим, что эллипсоид вращения, с удлинением, равным 25, становится уже непреодолимым препятствием для методов с главным членом погрешности — *насыщаемых*, т. е. таких, как методы конечных разностей, конечных элементов, квадратур и подобные им.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00207-а), Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-4292.2008.1) и междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН № 40.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва-Ижевск: РХД, 2002.
2. Белых В. Н. Внешняя осесимметричная задача Неймана для уравнения Лапласа: ненасыщаемые методы численного решения // Докл. АН. 2007. Т. 417, № 4. С. 442–445.

Относительная видимость объекта в задаче навигации

Relative visibility of an object in navigation problem

Бердышев В. И.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
Россия; bvi@imm.uran.ru

Пусть наблюдаемый объект t движется в $\mathbb{R}^3$, задано замкнутое множество $G \subset \mathbb{R}^3$, препятствующее видимости, f — наблюдатель, местоположение которого задано с погрешностью $h = h(f) > 0$, т. е. известно лишь, что наблюдатель находится в шаре $V_h(f) = \{v \in \mathbb{R}^3: |v - f| \leq h\}$, где $|\cdot|$ — евклидова норма. Для наблюдателя предпочтительна ситуация, когда из точек шара $V_h(f)$ видны все точки шара $V_r(t)$ при некотором $r > 0$, точнее, когда $K_{r,h}(t, f) \cap G = \emptyset$, где $K_{r,h} = K_{r,h}(t, f) = \text{conv}(V_r(t) \cup V_h(f)) \setminus V_h(f)$, $V_h(f) = \{v: |v - f| \leq h\}$, conv — выпуклая оболочка множества. Функция

$$r_h(t) = r(t, f, h, G) = \min\{r: K_{r,h}(t, f) \cap G \neq \emptyset\}$$

характеризует видимость объекта t для наблюдателя f , а функция

$$A(t, f, h) = r_h(t) / |t - f|$$

— относительную видимость. Пусть выбрано направление $\tilde{t}$, $|\tilde{t}| = 1$, движения точки t . Естественно предположить, что, когда наблюдаемый объект окажется в точке $t_\lambda = t + \lambda \tilde{t}$ ($\lambda \geq 0$), наблюдатель, стремясь сохранить t_λ в зоне видимости, переместится в точку $f_\lambda = f + c(\lambda)(t_\lambda - f) / |t_\lambda - f|$, при этом погрешность в определении положения наблюдателя может измениться: $h_\lambda = h(f_\lambda)$. Пусть функции h_λ и $c_\lambda = c(\lambda)$ дифференцируемы, $c(0) = 0$, $h(0) = h$.

При выборе маршрута движения объекта t важно знать величину производной по направлению

$$\frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{A(t_\lambda, f_\lambda, h_\lambda) - A(t, f, h)}{\lambda}.$$

Пусть $g \in V_{|t-f|}(t) \setminus \text{conv}\{V_h(f) \cup t\}$,

$$R = R(t, f, h, g) = \min\{r: g \in K_{r,h}\}.$$

Граница $\text{bd } K_{r,h}$ множества $K_{r,h}$ есть объединение трех поверхностей: конической $k_{r,h}$ и двух сферических $s_r(t) \subset S_r(t)$, $s_h(f) \subset S_h(f)$, где $S_r(t) = \{v: |t-v| = r\}$. В случае $g \in k_{R,h}$ обозначим: L_g — образующая поверхности $k_{R,h}$ ($g \in L_g$), $p(g) = S_R(t) \cap L_g$, $t_g \in [t, f]$ — точка, для которой отрезок $[t_g, g]$ ортогонален прямой L_g .

Теорема 1. В случаях: 1) $g \in s_R(t)$, 2) $g \in k_{R,h}$ справедливы формулы

$$1) \frac{\partial R}{\partial \tilde{t}} = \cos \xi, \quad 2) \frac{\partial R}{\partial \tilde{t}} = \cos \xi + \frac{|t-f| - |t_g-f|}{|t_g-f|} \frac{d}{d\lambda} (c_\lambda - h_\lambda)_{\lambda=0}, \quad (1)$$

где ξ — угол между векторами $t-g$, $\tilde{t}$ в случае 1) и угол между векторами $t-p(g)$, $\tilde{t}$ в случае 2).

С использованием этой теоремы и теоремы В. Ф. Демьянова о дифференцировании функции максимума устанавливается

Теорема 2. Функция $r = r(t, f, h, G)$ дифференцируема по любому направлению $\tilde{t}$, $|\tilde{t}| = 1$, и

$$\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}} = \min \left\{ \frac{\partial R(t, f, h, g)}{\partial \tilde{t}} : g \in G(t) \right\},$$

где

$$G(t) = \left\{ g \in G : R(t, f, h, g) = r(t, f, h, G) \right\}$$

и производная $\partial R / \partial \tilde{t}$ вычисляется по формулам (1).

Теорема 3. Имеет место равенство

$$\frac{\partial A(t, f, h)}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{|t-f|} \frac{\partial r(t, f, h, G)}{\partial \tilde{t}} + \frac{r(t, f, h, G)}{|t-f|^2} \left(\frac{dc(0)}{d\lambda} + \cos \gamma \right),$$

где γ — угол между векторами $f-t$, $\tilde{t}$.

Работа выполнена по программе фундаментальных исследований Президиума РАН № 29 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00325).

Моделирование артериальной системы человека на основе 1D модели гемодинамики

Modelling of human arterial system on the basis of 1D hemodynamics model

Бибердорф Э. А.¹, Колпаков Ф. А.², Леонова Т. И.³

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
biberdorf@ngs.ru

²Новосибирский государственный университет,
Конструкторско-технологический институт вычислительной
техники СО РАН, Новосибирск, Россия;
fedor@developmentontheedge.com

³Конструкторско-технологический институт вычислительной
техники СО РАН, Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия; zlove.t@gmail.com

Моделирование регуляции артериального давления у человека является актуальной задачей математической биологии. В данной работе рассматривается одномерная гемодинамическая модель, состоящая из 55 артерий, описывающая физические процессы, протекающие в артериальной системе человека.

Для численного решения построенной модели использовались метод прямых и ортогональной прогонки. Создана программа на языке MATLAB и программный модуль на языке Java для системы BioUML (<http://www.biouml.org>), позволяющий представлять модель в виде редактируемого графа. Проведены вычислительные эксперименты с созданной моделью, в ходе которых рассматривались различные состояния сердечно-сосудистой системы: нормальное функционирование в покое, при физической нагрузке и в случае патологии — тахикардии. Для всех 55 артерий человека получены графики зависимости давления в них от времени, и подтверждено их соответствие диапазону реальных физиологических значений параметров живого организма.

Численная модель верифицирована путем сравнения результатов применения различных методов интегрирования, тестированием на задаче с известным точным решением, а также посредством сравнения результатов вычислений с различными параметрами дискретизации и интегрирования.

Для валидации модели исследована зависимость пульсовой волны от жесткости стенок кровеносных сосудов. Результаты сопоставлены с известной формулой Юнга.

С целью создания замкнутой модели системы кровообращения, на примере простого графа проведено моделирование фильтрации крови в тканях. Блок фильтрации включен в модель артериальной системы.

Работа выполнена при поддержке программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)” (проект № 2.1.1/4591; подраздел 2.1.1, раздел 2.1, мероприятие 2), Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-4299.2008.1) и Президиума СО РАН (интеграционный проект № 91-2009).

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохин А. М., Бибердорф Э. А., Колпаков Ф. А., Леонова Т. И. и др. Система кровообращения и артериальная гипертензия: биофизические и генетико-физиологические механизмы, математическое и компьютерное моделирование. Новосибирск: Наука СО РАН, 2008.
2. Lamponi D. N. One dimensional and multiscale models for blood flow circulation. Universita di Bologna, Italie, 2004.
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–175.

**Алгебры Клиффорда и краевые задачи
анизотропной теории упругости**
**Clifford algebras and boundary value problems
in anisotropic theory of elasticity**

Боган Ю. А.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; bogan@hydro.nsc.ru*

В двумерных краевых задачах теории упругости хорошо известен и давно используется метод интегралов типа Коши при решении краевых задач. Он очень удобен для приведения краевой задачи к системе интегральных уравнений, исследования ее дифференциальных свойств и численного решения. В трехмерном случае аналогом алгебры комплексных чисел является ассоциативная алгебра кватернионов. Алгебра кватернионов — это частный случай общей многомерной алгебры Клиффорда. Известно, что при помощи алгебры Клиффорда можно построить многомерный аналог интеграла типа Коши на плоскости. Его свойства достаточно хорошо изучены в настоящее время [1]. В настоящем докладе сделана первая (насколько известно автору) попытка применить трехмерный аналог интеграла типа Коши к решению трехмерных задач анизотропной теории упругости. Показано, что наличие анизотропии материала существенно упрощает исследование. Работа метода проиллюстрирована на примере трансверсально-изотропной среды. Этим методом построено решение первой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства (на границе задан вектор перемещений). Построена система интегральных уравнений для решения первой краевой задачи в ограниченной области с ляпуновской границей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blaya A. R., Peña P. D., Reyes B. J. Clifford Cauchy type integrals on Ahlfors–David regular surfaces in $\mathbb{R}^{m+1}$ // Adv. Appl. Clifford Algebr. 2003. V. 13, N 1. P. 133–156.

Кубическая сплайн-интерполяция, наследующая кусочную монотонность

Cubic spline interpolation inheriting piecewise monotonicity

Богданов В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; bogdanov@math.nsc.ru

Пусть в узлах сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ известны значения некоторой функции $f(x)$: $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Кусочно монотонной интерполяцией называем построение функции $S(x)$, такой что 1) $S(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$; 2) число перемен знака производной $S'(x)$ на $[a, b]$, совпадает с числом перемен знаков в наборе разделённых разностей $f[x_i, x_{i+1}]$.

Известно, что для локальных эрмитовых сплайнов задача сохранения монотонного неубывания данных не всегда разрешима (F. N. Fritsch, R. E. Carlson, 1980). Для того, чтобы интерполяционный кубический сплайн был монотонным на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ необходимо и достаточно, чтобы первые производные $m_i = S'(x_i)$ удовлетворяли условию $(\bar{m}_i, \bar{m}_{i+1}) \in G_i \subseteq \mathbb{R}^2$, $\bar{m}_k = m_k / f[x_i, x_{i+1}]$, $k = i, i+1$, ($m_i = m_{i+1} = 0$, если $f[x_i, x_{i+1}] = 0$) для всех i , причём область G_i является выпуклой и ограничена частью дуги эллипса в положительной четверти.

Некоторые достаточные условия можно записать совсем просто: эрмитов кубический сплайн сохраняет свойство монотонности данных, если все $\bar{m}_i \leq 3$. Отметим, что если первые производные в узлах не задаются, а выбираются, то монотонная интерполяция всегда разрешима. Легко заметить, что задача кусочно монотонной интерполяции такими сплайнами решается с теми же ограничениями, а на промежутках, где заданные производные разных знаков, вообще без ограничений.

В случае нелокальной монотонной интерполяции кубическими сплайнами класса C^2 В. Л. Мирошниченко разработал технику, основанную на получении достаточных условий положительности решения трёхдиагональных систем линейных уравнений с диагональным преобладанием по строке. В дальнейшем эта техника была распространена

на более широкий класс матриц, что позволяет установить достаточные условия сохранения классическим кубическим сплайном кусочной монотонности исходных данных.

Рассмотрим кубический сплайн, построенный по разложению его производной в базисе из параболических B -сплайнов.

$$S'(x) = \sum_k \beta_k B_k(x).$$

В силу положительности базисных функций неотрицательность всех β_k гарантирует монотонность $S(x)$. Внутренние уравнения системы относительно коэффициентов β_k имеют вид (Ю. С. Волков, 2002)

$$\lambda_{i-1}\beta_{i-1} + (1 + \mu_{i-1} + \lambda_i)\beta_i + \mu_i\beta_{i+1} = 3f[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$; система замыкается уравнениями из краевых условий. В конечном итоге построение сплайна сводится к нахождению набора β параметров сплайна из системы линейных уравнений $A\beta = d$ с правой частью, составленной из разделённых разностей. Оказывается, применить преобразование В. Л. Мирошниченко $GA\beta = Gd$ (где G — зависящая от A трёхдиагональная матрица) можно и в этом случае (при отсутствии традиционного диагонального преобладания). При этом система с матрицей GA монотонного вида дает возможность установить требуемые ограничения на данные. Таким образом, сплайн является монотонным, если выполнено легко проверяемое условие $Gd \geq 0$. В частности, на равномерной сетке достаточным условием монотонности является ограниченность отношений соседних разделённых разностей $1/2 \leq f[x_i, x_{i+1}]/f[x_{i-1}, x_i] \leq 2$.

В докладе предлагается дальнейшее обобщение результатов на случай большого класса систем без диагонального преобладания в задаче кусочно монотонной интерполяции. Приводятся достаточные условия на данные, при которых задача разрешима. В качестве примера приводятся условия для случая одной смены характера монотонности данных. Установлено, что ограничения на участках монотонности, остаются теми же, а на четырёх соседних промежутках сетки, примыкающих к узлу смены знака в последовательности разделённых разностей, становятся жёстче. В частности, на равномерной сетке на этих участках недостаточно, чтобы отношение соседних разделённых разностей не превосходило 2.

Работа выполнена при поддержке Отделения математических наук РАН (проект № 2009-3.8), интеграционного проекта СО РАН № 2009-81 и совместного интеграционного проекта СО РАН и УрО РАН № 2009-14.

О скорости сходимости некоторых итерационных методов для уравнений Навье — Стокса

On the rate of convergence of certain iterative methods for the Navier–Stokes equations

Боговский М. Е.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
mbogovskii@gmail.com

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$, основание которого $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является ограниченной областью с границей $\partial\Omega \in C^2$, рассматривается начально-краевая задача для нелинейной системы Навье — Стокса

$$\begin{cases} v_t + (v, \nabla)v - \nu \Delta v + \nabla p = f, & \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{t=0} = a, & v|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} a = 0, a|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

с постоянным коэффициентом кинематической вязкости $\nu > 0$. При заданных $f \in L_2(Q_T)$ и $a \in W_2^1(\Omega)$ сильное решение задачи (1) определяется как упорядоченная пара $\{v, \nabla p\}$ с полем скоростей $v : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ из анизотропного пространства Соболева $W_{2,x,t}^{2,1}(Q_T)$ и с давлением $p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$ класса $p \in W_{2,x,t}^{1,0}(Q_T)$. Подпространство соленоидальных векторных полей $v \in W_{2,x,t}^{2,1}(Q_T)$ удобно рассматривать как гильбертово пространство H_T с индуцированной нормой.

В предположении существования сильного решения задачи (1) итерационная последовательность сильных решений $\{v^n, \nabla p^n\}$ линейных начально-краевых задач

$$\begin{cases} v_t^n + (v^{n-1}, \nabla)v^n - \nu \Delta v^n + \nabla p^n = f, & \operatorname{div} v^n = 0, \\ v^n|_{t=0} = a, & v^n|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} a = 0, a|_{\partial\Omega} = 0, n \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

сходится к сильному решению задачи (1) со скоростью

$$\|v - v^n\|_{H_T} + \|\nabla p - \nabla p^n\|_{L_2(Q_T)} \leq C(\lambda)\lambda^{-n}, \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad (3)$$

где постоянная $C(\lambda)$, зависит только от числа λ при условии, что f , a и начальное приближение $\{v^0, \nabla p^0\}$ фиксированы. В качестве начального приближения удобно принять $v^0 = 0$ и $p^0 = 0$.

Оценка (3) означает сходимость последовательных приближений $\{v^n, \nabla p^n\}$ со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой λ сколь угодно близок к нулю, без каких-либо условий малости и с одним лишь предположением, что при заданных ν , T и f , a сильное решение задачи (1) существует. Оценка (3) устанавливается с помощью функционально-аналитических разложений сильных решений задачи (2), построенных в работе [1]. При этом для каждого $n \geq 2$ решение задачи (2) может быть получено как предел итерационной последовательности сильных решений $\{v^{n,m}, \nabla p^{n,m}\}$ задач Стокса

$$\begin{cases} v_t^{n,m} - \nu \Delta v^{n,m} + \nabla p^{n,m} = f - (v^{n-1}, \nabla) v^{n,m-1}, \operatorname{div} v^{n,m} = 0, \\ v^{n,m}|_{t=0} = a, v^{n,m}|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} a = 0, a|_{\partial\Omega} = 0, m \geq 1, \end{cases}$$

где $v^{n,0} = 0$ и $p^{n,0} = 0$. Устанавливается, что последовательные приближения $\{v^{n,m}, \nabla p^{n,m}\}$, являясь частичными суммами построенных в [1] рядов, сходятся при каждом значении $n \geq 2$ к сильному решению $\{v^n, \nabla p^n\}$ задачи (2) также со скоростью геометрической прогрессии со сколь угодно малым знаменателем.

С практической точки зрения важно, что при построении итерационной последовательности $\{v^{n,m}, \nabla p^{n,m}\}$ используется только разрешающий оператор линейной задачи Стокса без конвективных членов. Таким же важным свойством обладает и итерационная последовательность сильных решений $\{u^n, \nabla q^n\}$ задач Стокса

$$\begin{cases} u_t^n - \nu \Delta u^n + \nabla q^n = g - (v, \nabla) u^{n-1} - (u^{n-1}, \nabla) v, \operatorname{div} u^n = 0, \\ u^n|_{t=0} = b, u^n|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} b = 0, b|_{\partial\Omega} = 0, n \geq 1, \end{cases}$$

где $u^0 = 0$ и $q^0 = 0$. Для заданного $v \in H_T$ последовательные приближения $\{u^n, \nabla q^n\}$ сходятся со скоростью геометрической прогрессии со сколь угодно малым знаменателем к сильному решению начально-краевой задачи, которая обращает на заданном $v \in H_T$ производную Фреше нелинейного отображения, соответствующего (1). Таким образом, практическую реализацию метода Ньютона для задачи (1) можно свести к решению линейных задач Стокса без конвективных членов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00661).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боговский М. Е. О некоторых аспектах применения метода Ньютона к уравнениям Навье — Стокса // Докл. АН. 2009. Т. 426, № 3. С. 295–299.

**Об одной численной схеме решения трехмерной
задачи динамики упругих тел**
**On numerical method for three-dimensional dynamic
elasticity problems**

Богульский И. О.¹, Волчков Ю. М.²

¹ *Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск,
Россия; bogul@icm.krasn.ru*

² *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; volk@hydro.nsc.ru*

В работе предложен численный алгоритм решения трехмерной динамической задачи теории упругости. Метод основан на локальной аппроксимации решения линейными полиномами и последующем расщеплении исходной трехмерной задачи на одномерные.

Предположим, что расчетная область представляет собой объединение параллелепипедов. В каждом из них неизвестные функции и их производные аппроксимируются линейными полиномами. Только уравнения движения и закон Гука не позволяют получить замкнутую систему уравнений для определения коэффициентов этих полиномов. Для замыкания системы необходимо сформулировать дополнительные уравнения. Они строятся на основе энергетического тождества. Получается явная форма искусственной диссипации энергии, с использованием которой формулируются дополнительные уравнения. При этом решение задачи расщепляется на ряд одномерных задач.

Если алгоритм реализовать на этом этапе, то построенная явная схема будет иметь достаточно жесткое ограничение на шаг по времени. Это, в свою очередь, приведет к сильному размазыванию фронтов волн при расчете задач ударного взаимодействия.

В двумерном случае была предложена и исследована итерационная (как правило, двухэтапная) процедура решения одномерных задач, обеспечивающая и качество решения и минимально возможное для устойчивости ограничение на шаг по времени [1].

В трехмерном случае так же удалось построить такой алгоритм. Однако в отличие от плоской задачи здесь возникла неоднозначность в выборе варианта расщепления. Наиболее удачный из вариантов и предлагается в работе.

Таким образом, в работе построена явная симметричная разностная схема, удовлетворяющая требованиям устойчивости и сходимости и обладающая рядом положительных качеств, а именно:

- у численного решения задачи о распространении ударных волн отсутствуют нефизические (паразитические) осцилляции;

- необходимое для устойчивости ограничение на шаг по времени точно такое же, как и в одномерных задачах, на которые расщепляется трехмерная;

- при определенном выборе шагов по времени и по пространственным координатам приближенное решение точно описывает разрыв.

Предложенный алгоритм проиллюстрирован на решении тестовых задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00749).

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2002.

Алгоритм построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения

An algorithm of constructing initial three-dimensional structured grids for domains of revolution

Бронина Т. Н.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
Россия; btn@imm.uran.ru*

В данной работе изложен алгоритм построения начальных трехмерных структурированных сеток в областях вращения. Предлагаемый алгоритм не сводится к “ротационному алгоритму”, который, как правило, применяется при построении сеток в областях вращения, что приводит к появлению около оси вращения вырожденных (не шестигранных) ячеек и ячеек малого объема. Предлагаемый алгоритм позволяет избежать указанных недостатков. Алгоритм основан на геометрическом подходе к построению сеток.

В декартовой системе координат $\{x^1, x^2, x^3\}$ в плоскости $(x^1 x^3)$, $x^1 \geq 0$ задана односвязная область U с границей ∂U , определяемой как множество $\partial U = \bigcup_{i=1}^I \{e_i, t_i\}$, где e_i — элемент (дуга окружности или эллипса, отрезок прямой и т. п.), t_i — конечная точка элемента. Кривую ∂U будем называть образующей. Преобразование $x^1 = \bar{x}^1 \cos \alpha$, $x^2 = \bar{x}^1 \sin \alpha$, $x^3 = \bar{x}^3$, $0 < \alpha \leq \varphi \leq \pi$, либо $\varphi = 2\pi$, где $(\bar{x}^1, \bar{x}^3) \in \bar{U}$, определяет область вращения G ; ось координат x^3 — ось вращения.

Задача состоит в построении в области G структурированной 3D-сетки T_{NML} , не имеющей особенностей на оси вращения и самопересекающихся параметрических поверхностей. Под ячейкой сетки в данной работе понимается двенадцатигранник с плоскими треугольными гранями.

В зависимости от особенностей образующей и заданного угла разворота φ все рассматриваемые области вращения предлагается отнести к одному из трех типов G^q , $q = 1, 2, 3$. Для построения регулярной сетки T_{NML} определяется отображение Ξ^r определенной последовательности восьми точек (вершин шестигранника), часть из которых — точки $t_i \in \partial U$, часть расположена симметрично относительно оси вращения,

на вершины параметрического куба. Предлагается три способа отображения $\Xi^r, r = 1, 2, 3$. Выбрав для области G^q желаемый способ отображения Ξ^r , определим тем самым структуру сетки. Комбинацию типа области G^q и отображения Ξ^r назовем конфигурацией сетки.

В основе алгоритма лежит идея [1] представления трехмерной сетки как набора L пространственных двумерных сеток, узлы которых лежат на некоторых поверхностях вращения и координаты узла сетки на поверхностях вращения рассчитываются как $x_{nmk_1}^1 = \bar{x}_{mk_1}^1 \cos \alpha_{nm}(G^q, \Xi^r)$, $x_{nmk_1}^2 = \bar{x}_{mk_1}^1 \sin \alpha_{nm}(G^q, \Xi^r)$, $x_{nmk_1}^3 = \bar{x}_{mk_1}^3$, где $\bar{x}_{mk_1}^i \in S$, S – двумерная сетка в области $\bar{U}$. Значение угла $\alpha_{nm}(G^q, \Xi^r)$ зависит как от номера точки в двумерной сетке S , так и от выбранной конфигурации (G^q, Ξ^r) . Таким образом, для одной и той же области G выбором комбинации (G^q, Ξ^r) можно построить различные сетки.

Предлагаемый алгоритм имеет следующую структуру:

- задание конфигурации (G^q, Ξ^r) области G ;
- построение двумерной S (двухмерных) сетки в области $\bar{U}$, с границами, определяемыми выбранной конфигурацией; оптимизация сетки S и получение сетки с заданными свойствами (равномерность, квазиортогональность и т. п.)
- построение и оптимизация двумерных сеток на поверхностях вращения, образующими для которых выбираются параметрические линии $l_{mk_1} \subset S$;
- оптимизация трехмерной сетки.

Алгоритм использовался для расчетов сеток во многих областях сложной конфигурации. К достоинствам алгоритма можно отнести следующие моменты: отсутствие неоднозначности и вырожденных ячеек на оси вращения; получаемая 3D сетка сохраняет конструктивные особенности исходной области (симметрия, изломы границы, соответствующие точкам $t_i \subseteq \partial U$); алгоритм сохраняет свойства двумерной S сетки на параметрических поверхностях трехмерной сетки; позволяет рассчитывать многослойные (блочные) конструкции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00173).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронина Т. Н. Алгоритм построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // Тр. Инст. математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 3–10.

**Численные модели ускорения плазмы
в магнитном поле**

**Computational models of plasma acceleration
in the magnetic field**

Брушлинский К. В., Жданова Н. С.

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Москва, Россия; brush@keldysh.ru*

Успешный опыт математического моделирования и численных исследований течений плазмы в каналах плазменных ускорителей стал частью разработки этого вида новой техники. Одновременно поставлены и решены ряд общих вопросов вычислительной плазмодинамики — фундаментальной области современной науки с широкими перспективами приложений. Схема ускорителя, предложена А. И. Морозовым [1]. В канале, образованном двумя коаксиальными электродами, взаимодействие электрического тока радиального направления с азимутальным магнитным полем ускоряет плазму силой Ампера в осевом направлении. Если канал профилирован в виде сопла, то в нем устанавливается трансзвуковое течение с рекордными параметрами скорости и энергии, намного превосходящими параметры, например, жидкостно-реактивных двигателей, так как ускорение здесь обязано не только тепловой, но и электромагнитной энергии.

Эффективность и количественные характеристики ускорения определяются свойствами стационарных течений плазмы в каналах. Их расчеты выполнены в основном в осесимметричной МГД-модели. Рассмотрение отдельных деталей потребовало дополнительно учесть в ней эффект Холла и процесс ионизации. Результаты подробных исследований вносят вклад в теорию двумерных течений плазмы в поперечном магнитном поле, приложения которой не ограничиваются плазменными ускорителями.

Доклад посвящен работам последних лет, в которых авторы уделили внимание течениям плазмы в каналах, в присутствии также и продольного магнитного поля, создаваемого внешними проводниками с током. Математические и вычислительные вопросы при этом усложняются. В исследовании механизма ускорения получены качественно новые результаты. Некоторые закономерности стационарных течений в

соплах рассмотрены в квазиодномерном (гидравлическом) приближении. Дана классификация типов течения с весьма различными свойствами в зависимости от отношения скорости потока к каждой из трех скоростей магнитного звука: быстрой, медленной и продольной альфвеновской. В двумерной МГД-модели стационарные режимы получены в расчетах установлением. Рассмотрены сверх- и доальфвеновские течения, а также комбинированные, тип которых может быть разным в разных частях канала. Принципиальное отличие доальфвеновских течений от сверхальфвеновских и от течений только в поперечном поле проявляется в первую очередь в переходах трех видов энергии — кинетической, тепловой и магнитной друг в друга [2].

Некоторые результаты о влиянии продольного поля и эффекта Холла на ускорение плазмы в каналах получены А. Н. Козловым [3]. Модели ускорения плазмы в каналах изложены в [4], где имеется подробная библиография на обсуждаемую тему.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00181).

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006.
2. Брушлинский К. В., Жданова Н. С. МГД-течения в каналах плазменных ускорителей с продольным магнитным полем // Физика плазмы. 2008. Т. 34, № 12. С. 1120–1128.
3. Козлов А. Н. Динамика вращающихся потоков плазмы в канале плазменного ускорителя с продольным магнитным полем // Физика плазмы. 2006. Т. 32, № 5. С. 413–422.
4. Брушлинский К. В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином, Лаборатория знаний, 2009. (В печати).

Гарантированная точность вычисления многомерных приближенных формул

The guaranteed computing accuracy of multidimensional approximate formulas

Васкевич В. Л.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vask@math.nsc.ru*

Сфера приложений приближенных формул при моделировании самых разных природных процессов расширяется бурно и лавинообразно. Объектами приближения служат при этом как решения краевых задач для уравнений и систем уравнений с частными производными, принадлежащие известным функциональным компактам, так и обобщенные функции — когда речь идет о кубатурных формулах. В любом случае использование квалифицированных приближенных формул связано с обширными компьютерными вычислениями и в этой связи важно знать, в какой степени гарантирована близость получаемого численного результата к искомому теоретическому. Ответ на этот вопрос зависит от многих факторов, среди которых особо выделяется один: величина N числа узлов приближенной формулы. Под числом узлов N приближенной формулы понимается число базисных функций, используемых в типичной приближающей сумме с ненулевыми весами:

$$\varphi(x) \approx \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x) \quad \forall x \in \Omega; \quad \int_{\Omega} \varphi(x) \approx \sum_{k=1}^N c_k \varphi(x_k).$$

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, в рамках которой производятся численные измерения, а $\varphi(x)$ — функция, подверженная этим измерениям. Еще один важный для получения гарантированных оценок фактор — это априорная информация о принадлежности функции $\varphi(x)$ компакту нормированного функционального пространства X , т. е. информация о верхней оценке энергии физической системы, описываемой наблюдаемой функцией φ .

В теории приближений погрешность формулы с N узлами на банаховом пространстве X функций n переменных принято характеризовать с помощью нормы соответствующего оператора (функционала)

погрешности l_N [1]. Малые возмущения весов $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ формулы, возникающие при ее компьютерной реализации в силу ошибок округления, приводят к рассмотрению вместо l_N возмущенного оператора (функционала) погрешности $\widehat{l}_N$ с весами $\widehat{c} = (\widehat{c}_1, \widehat{c}_2, \dots, \widehat{c}_N)$. При этом $|\widehat{c}_k - c_k| \leq \varepsilon_1 |c_k| + \varepsilon_0$, $k = 1, 2, \dots, N$, где ε_1 и ε_0 — заданные машинные константы, $0 < \varepsilon_0 \ll \varepsilon_1$. Уклонение нормы $\|\widehat{l}_N | X^*\|$ от невозмущенной характеризуется неравенством вида

$$\left| \|\widehat{l}_N | X^*\| - \|l_N | X^*\| \right| \leq p_N(X, n) \cdot \varepsilon_1.$$

С увеличением N норма $\|l_N | X^*\|$ стремится к нулю (чем быстрее, тем лучше). В то же время величина $p_N(X, n)$ с ростом N неограниченно возрастает. Чтобы возмущенная норма $\|\widehat{l}_N | X^*\|$ не слишком отличалась от принятого теоретического значения $\|l_N | X^*\|$, требуется подчинять число узлов N условию вида $p_N(X, n) \cdot \varepsilon_1 \leq \frac{1}{2} \|l_N | X^*\|$. Этому неравенству соответствует, вообще говоря, нелинейное относительно N уравнение. Корень $N_0 = N_0(X, n)$ этого уравнения имеет то практическое значение, что явно указывает порог, до которого имеет смысл увеличивать число узлов формулы с сохранением ее приемлемой и гарантированной точности. При $N > N_0(X, n)$ формула с N узлами не может гарантировать приемлемой точности на всем классе и в этом случае оценки погрешности имеют вероятностный характер.

В докладе проблематика вычислений с гарантированной точностью рассматривается в применении к конкретным функциональным пространствам X (типа пространств Соболева). При этом существенно используется информация о константах вложения пространств X в пространство непрерывных функций [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00207, № 07-01-00585).

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л., Васкевич В. Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
2. Васкевич В. Л. Константы вложения периодических пространств Соболева дробного порядка // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1019–1027.

Оценки скорости сходимости метода Галеркина для квазилинейного дифференциально–операторного уравнения

Convergence estimates of Galerkin method for quasilinear operator–differential equation

Виноградова П. В.

Дальневосточный государственный университет путей сообщения,
Хабаровск, Россия; vpolina17@hotmail.com

Пусть H_1 — сепарабельное гильбертово пространство, плотно и компактно вложенное в сепарабельное гильбертово пространство H с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим задачу Коши

$$u'(t) + A(t)u(t) + F(u(t)) = h(t), \quad u(0) = 0. \quad (1)$$

Операторы $A(t)$, $F(\cdot)$ и функции $u(t)$, $h(t)$ определены на $[0, T]$, $T < \infty$. Через $L_2(0, T; H)$ обозначим гильбертово пространство всех сильно измеримых на $[0, T]$ функций, для которых конечна норма $\|u(t)\|_{0,2} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$. Рассмотрим функции $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) со значениями в H_1 . Пусть $u(t)$ имеет непрерывную производную $u'(t)$ в пространстве H . В множестве таких функций определим норму $\|u(t)\|_{1,2} = \left(\int_0^T (\|u'(t)\|^2 + \|A(0)u(t)\|^2) dt \right)^{1/2}$. Пополнение данного множества по этой норме дает гильбертово пространство $W_2^1(H, H_1)$.

Решением задачи (1) назовем функцию $u(t) \in W_2^1(H, H_1)$, которая почти при всех t удовлетворяет уравнению и начальному условию (1).

Операторы $A(t)$ и $F(\cdot)$ обладают следующими свойствами.

1) $A(t)$ ($0 \leq t \leq T$) — самосопряженный, положительно-определенный оператор в H с областью определения $D(A(t)) = H_1$.

2) Оператор $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем по t .

3) Существует число $\beta \geq 0$ такое, что для любого $v \in H_1$ выполняется неравенство $(A'(t)v, v)_H \leq \beta(A(0)v, v)_H$.

4) Нелинейный оператор $F(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $\|F(v)\| \leq \|A(t)v\|^\tau \varphi(\|v\|^2)$, $\forall v \in H_1$, $\forall t \in [0, T]$, $0 \leq \tau < 1$, где $\varphi(\xi)$ — непрерывная положительная функция на $[0, \infty)$. Оператор $F(\cdot)$ вполне непрерывен.

5) Оператор B — сходный с оператором $A(0)$. Для любого элемента $v \in H_1$ существует положительная постоянная m , независимая от t и v , такая, что $(A(t)v, Bv)_H \geq m\|A(0)v\|\|Bv\|$.

Пусть $e_1, \dots, e_n, \dots$ — полная ортонормированная система собственных элементов оператора B ; $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ — соответствующие собственные числа, такие, что $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$; $\lambda_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, P_n — ортопроектор в H на линейную оболочку H^n элементов $e_1, \dots, e_n$. Проекционная задача для (1) имеет вид

$$u'_n(t) + P_n A(t)u_n(t) + P_n F(u_n(t)) = P_n h(t), \quad u_n(0) = 0. \quad (2)$$

Множество решений задачи (1) обозначим через $\mathcal{M}$, а множество решений задачи (2) — через $\mathcal{M}_n$.

Положим $S(0, R) = \{z(t) \in W_2^1(H, H_1); \|z(t)\|_{1,2} \leq R\}$.

Теорема. Пусть $h(t) \in L_2(0, T; H)$, выполнены условия 1)–5) и для $\forall z(t) \in S(0, R)$, $\forall v \in H_1$ справедливо неравенство

$$\|F'(z(t))v\| \leq \gamma(R)\|A(0)v\|^\alpha \|v\|^{1-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

где $\gamma(\xi)$ — положительная непрерывная функция при $\xi \in [0; \infty)$ и F' — производная Фреше. Пусть существует число $0 \leq \mu < 1$, такое, что для любой последовательности $u_n(t) \in \mathcal{M}_n$, сходящейся к $u(t)$ в пространстве $W_2^1(H, H_1)$, имеет место равенство

$$\lim_{\|u_n(t) - u(t)\|_{1,2} \rightarrow 0} \frac{\|\omega(u(t), u_n(t) - u(t))\|_{0,2}}{\|B^\mu(u_n(t) - u(t))\|_{0,2}^{1/(1-\mu)}} = 0,$$

где $\omega(u, h)$ — остаток дифференциала Фреше.

Тогда существует число $n_1 > 0$, такое, что для всех $n > n_1$ верны оценки

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t) - u(t)\| \leq C\lambda_{n+1}^{(\alpha-1)/2},$$

$$\|A^s(t)(u_n(t) - u(t))\|_{0,2} \leq C\lambda_{n+1}^{(\alpha-1)(1-s)/2}, \quad 0 < s < 1.$$

Приведены приложения разработанного метода к решению начально-краевых задач для параболических уравнений.

**Применение графических ускорителей
для выявления вырожденных олигонуклеотидных
мотивов в регуляторных районах генов эукариот**
**Application of the graphics accelerators for detection
of degenerate oligonucleotide motifs in the regulatory
regions of eukaryotic genes**

Вишневский О. В.¹, Лаврентьев М. М.², Романенко А. А.³

¹*Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирский
государственный университет, Новосибирск, Россия;
oleg@bionet.nsc.ru*

²*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
mmlavr@nsu.ru*

³*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
arom@ccfit.nsu.ru*

Сборка базального транскрипционного комплекса, ткане- и стадие-специфические особенности транскрипции эукариотических генов зависят от контекстной и структурной организации корового промотора и присутствия в 5'-регуляторном районе гена сайтов связывания транскрипционных факторов. Сайты связывания представляют собой короткие (8–12 пар оснований) участки ДНК, распознаваемые белками — транскрипционными факторами. Связывание транскрипционных факторов с соответствующими сайтами является обязательным условием формирования преинициационного комплекса и инициации транскрипции. Обнаружение сайтов связывания в регуляторных районах генов необходимо как для понимания механизмов регуляции экспрессии генетической информации и выявления структурно-функциональной организации регуляторных районов, так и для разработки методов распознавания регуляторных районов генов в геномных последовательностях. Решение этой задачи осложняется тем, что каждый транскрипционный фактор может связываться с участками ДНК, существенно различающимися по нуклеотидному контексту.

Нами предложен метод выявления вырожденных район-специфичных олигонуклеотидных мотивов — коротких слов фиксированной длины, записанных в 15-буквенном IUPAC коде (A,T,G,C, R=G/A, Y=T/C,

$M=A/C$, $K=G/T$, $W=A/T$, $S=G/C$, $B=T/G/C$, $V=A/G/C$, $H=A/T/C$, $D=A/T/G$, $N=A/T/G/C$), значимых для структурно-функциональной организации регуляторных районов генов и играющих важную роль в регуляции экспрессии генов [1]. Функционально значимыми считаются мотивы, характеризующиеся высокой частотой присутствия в регуляторных районах генов, по сравнению со случайными последовательностями и высокой статистической значимостью, оцениваемой с использованием биномиального критерия. Получаемые таким образом мотивы могут соответствовать как сайтам связывания транскрипционных факторов, так и некоторым структурным и физико-химическим особенностям регуляторных районов.

Одним из наиболее ресурсно-затратных этапов предложенного нами алгоритма является оценка представленности каждого из вырожденных мотивов в выборке анализируемых регуляторных районов и выборке негативных последовательностей. Так, оценка свойств всех мотивов длины 8 требует рассмотрения $15^8 \sim 2,5 \cdot 10^9$ вариантов мотивов. Для решения этой задачи мы использовали высокопроизводительные графические устройства nVidia, позволяющие проводить параллельные вычисления в многопоточном режиме, используя технологию CUDA. В таблице 1 приведены результаты оценки времени расчета представленности всех мотивов длины 8 в выборке из 1000 последовательностей длины 50 пар оснований на различных устройствах. Полученные результаты демонстрируют высокую эффективность применения графических ускорителей для решения задачи поиска вырожденных сигналов в геномных последовательностях.

Платформа	Затраченное время
GeForce 8800 GTX	9,5 часов
Tesla C1060	5,7 часов
Intel Pentium Dual CPU 1.73GHz	14 дней

Таблица 1. Временные затраты при оценке представленности всех возможных вырожденных мотивов длины 8 в выборке из 1000 последовательностей длины 50 пар оснований на различных платформах

ЛИТЕРАТУРА

1. Vishnevsky O. V., Kolchanov N. A. ARGO: a web system for the detection of degenerate motifs and large-scale recognition of eukaryotic promoters // Nucleic Acids Res. 2005. V. 33. P. 417–422.

Численные методы для расчета неустановившихся течений воды в системах открытых русел и водотоков на основе неявной схемы Годунова

Numerical methods for calculation of unsteady flows in systems of open channels and water passages by the implicit Godunov scheme

Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; vovodin@hydro.nsc.ru*

Для исследования волновых процессов в системах открытых русел и водотоков разработаны математические модели, численные методы и комплексы программ на ЭВМ. Математические модели основаны на базе одномерных, осредненных по поперечному сечению уравнений гидродинамики (уравнения Сен-Венана) и двумерных, осредненных по ширине русла или водотока (продольно-вертикальная модель) [1, 2]. Одномерные модели используются для исследования волновых процессов в системах речных русел или каналов, а двумерные в системах глубоких слабопроточных водоемов и водотоков. С математической точки зрения решение рассматриваемых задач сводится к решению начально-краевых задач для эволюционных квазилинейных уравнений в областях сложной структуры, топологическая структура которых описывается графом [1, 2].

Использование элементов теории систем и системного анализа позволило создать эффективные алгоритмы расчета волновых процессов при неустановившихся течениях как для разветвленных (граф типа “дерево”), так и для сложно разветвленных (граф с циклами) систем открытых водотоков и водоемов, в устьевых областях рек [3].

Численные методы для решения подобных задач разработаны на основе неявных абсолютно устойчивых разностных схем [4] и методов расщепления по физическим процессам. При этом предложенные оригинальные алгоритмы для решения систем разностных уравнений эффективно учитывают структуру матрицы системы, что обеспечивает экономичность методов в случае задач большой размерности.

Разработанные математические модели, численные методы и алгоритмы могут быть успешно использованы для решения широкого круга

научно-исследовательских и практических задач по гидрологическому обоснованию водохозяйственных проектов, оценки возможных отрицательных воздействий их на окружающую среду, разработки эффективных защитных мероприятий при катастрофических явлениях на водных объектах.

В качестве примеров использования рассматриваемых численных моделей, разработанных методов расчета, алгоритмов и комплекса программ, приводятся результаты решения следующих задач [2, 5]:

- а) распространение волн весеннего половодья в эстуарии р. Енисей;
- б) исследование возможности образования на реке Томи противотока в экстремальных условиях, обусловленных антропогенными в сочетании с природными факторами;
- в) распространение волны излива при разрушении каскада плотин в Усть-Манычской водохозяйственной системе (Краснодарский край);
- г) гидротермического режима в слабопроточном вытянутой формы глубококом стратифицированном водоеме.

Анализ результатов расчетов, их сравнение с данными натурных наблюдений показывают эффективность разработанных математических моделей, экономичность численных методов, алгоритмов и программ для использования их при решении широкого круга прикладных задач инженерной гидромеханики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект № 16.7), Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-2260.2008.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-98001-Р-Сибирь а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993.
2. Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С. Численное моделирование температурно-стратифицированных течений в системах глубоких водоемов // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 29–38.
3. Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С., Овчарова А. С. Численные методы решения задачи о неустановившемся движении воды на устьевых участках рек // Тр. Аркт. и Антаркт. науч.-исслед. ин-та. 1983. Т. 378. С. 23–34.
4. Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970.
5. Никифоровская В. С. Использование математического моделирования для оценки влияния антропогенных факторов на водный режим р. Томи // Метеорология и гидрология. 2009. (В печати).

Оценки элементов и норм обратных циклических ленточных матриц

The estimates for entries and norms of matrices inverse to the cyclic band matrices

Волков Ю. С.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
volkov@math.nsc.ru*

Как обычно, норма вектора $\mathbf{x}$ есть $\|\mathbf{x}\|_q = \{\sum |x_i|^q\}^{1/q}$, $1 \leq q < \infty$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$. Норма матрицы $\|\mathbf{A}\|_q = \sup\{\|\mathbf{Ax}\|_q : \|\mathbf{x}\|_q = 1\}$ соответствует рассматриваемой норме вектора.

Во многих задачах теории приближения (и не только) возникает необходимость вычисления или оценки нормы обратной матрицы. Довольно простой путь известен для матриц с диагональным преобладанием. Однако большой класс задач в этом случае остаётся не охваченным. В задачах полиномиальной сплайн-интерполяции, например, отмеченный путь применим только в простейших случаях кубических и параболических сплайнов. А уже для сплайнов выше пятой степени диагональное преобладание пропадает даже на равномерной сетке. Но поскольку матрицы, возникающие в задачах сплайн-интерполяции, обычно являются ленточными, то оценку нормы обратной позволяет установить свойство экспоненциального убывания элементов обратных ленточных матриц при удалении их от главной диагонали [1].

Тем не менее проблемы остаются в задачах периодической сплайн-интерполяции, так как в этом случае матрицы оказываются циклическими ленточными, и мы уже не можем утверждать, что элементы обратной, удаляясь от главной диагонали, экспоненциально убывают.

В работе [2] были установлены оценки погрешности интерполяции для периодических сплайнов нечётной степени $2n - 1$ через нормы обратных матриц к некоторым циклическим ленточным. В частности, было предложено решение проблемы К. де Бора [3] о безусловной сходимости $(n - 1)$ -й производной, опирающееся на не доказываемую там возможность оценки $\|(\mathbf{A}^T)^{-1}\|_\infty$ через $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$.

В настоящей работе для доказательства опущенного в [2] факта мы устанавливаем, что для элементов матриц, обратных к циклическим

ленточным, экспоненциальное затухание при удалении от главной диагонали сменяется на их экспоненциальный рост, т. е. наблюдается эффект цикличности. Оценки элементов и нормы обратной матрицы мы получаем путём развития идеи работы [1]. Эти оценки дают возможность одновременного оценивания норм матрицы и её транспонированной. Ранее подобные оценки для циклических ленточных матриц были получены в случае диагонального преобладания [4].

Теорема. Пусть для циклической m -ленточной $N \times N$ матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ выполнены условия $\|\mathbf{A}\|_q \leq 1$ и $\|\mathbf{A}^{-1}\|_q \leq R$, $1 \leq q \leq \infty$.

Тогда для элементов обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1} = (a'_{ij})$ существуют $\lambda \in (0, 1)$ и K , зависящие только от R и m , такие, что

$$|a'_{ij}| \leq \begin{cases} K\lambda^{|i-j|}, & \text{при } |i-j| \leq N/2, \\ K\lambda^{N-|i-j|}, & \text{при } |i-j| > N/2. \end{cases}$$

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы, тогда справедливы неравенства

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_q \leq K \frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad q = 1, 2, \infty.$$

Константы $\lambda \in (0, 1)$ и K зависят только от R и m , но не от N .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Отделения математических наук РАН (проект 2009-3.8), интеграционного проекта СО РАН № 2009-81 и совместного интеграционного проекта СО РАН и УрО РАН № 2009-14.

ЛИТЕРАТУРА

1. Demko S. Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14, N 4. P. 616–619.
2. Волков Ю. С. Безусловная сходимость ещё одной средней производной для интерполяционных сплайнов нечётной степени // Докл. АН. 2005. Т. 401, № 5. С. 592–594.
3. de Boor C. On bounding spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. V. 14, N 3. P. 191–203.
4. Волков Ю. С. Об оценке элементов матрицы, обратной к циклической ленточной матрице // Сиб. журн. вычисл. математики. 2003. Т. 6, № 3. С. 263–267.

Взаимодействие зоны турбулентного смешения и локального возмущения поля плотности в пикноклине

The interaction of turbulent spot and local density perturbation in pycnocline

Воропаева О. Ф.¹, Черных Г. Г.²

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск,
Россия; ¹vorop@ict.nsc.ru, ²chernykh@ict.nsc.ru*

Динамика локальных возмущений поля плотности и турбулентных образований (зон турбулентного смешения, пятен турбулентности) оказывает существенное влияние на формирование тонкой микроструктуры гидрофизических полей в устойчиво стратифицированной жидкости [1]. Численное моделирование подобных течений начато в СО РАН в 70-е годы [2]. В настоящее время экспериментальное, теоретическое и численное исследование эволюции одиночных локальных турбулентных и ламинарных образований в пикноклине — жидкости с модельным устойчивым распределением поля плотности по глубине, являющимся непрерывным аналогом двухслойной жидкости — проводится весьма активно (в [3] можно найти обзор работ). Развитие локальных возмущений в пикноклине с достаточно узкой высокоградиентной прослойкой характеризуется генерацией внутренних волн солитонного типа, приводящих к хорошо выраженному осредненному движению [3].

В настоящей работе представлена численная модель и исследовано плоское течение, возникающее при взаимодействии зоны турбулентных возмущений и локального ламинарного возмущения поля плотности в пикноклине. Задача рассмотрена с привлечением осредненных по Рейнольдсу уравнений гидродинамики в приближении Обербека — Буссинеска, замкнутых на основе модифицированной ($\epsilon - \epsilon$) модели турбулентности. Численное интегрирование уравнений основано на использовании метода расщепления по пространственным переменным [3].

В начальный момент времени в высокоградиентной прослойке пикноклина задаются два возмущения — турбулентное пятно и локальное возмущение поля плотности. Локальное возмущение поля плотности генерирует две уединенные внутренние волны, одна из которых встречается с эволюционирующим турбулентным пятном и порождается

им внутренними волнами. Расчеты показывают, что, если энергия локального возмущения поля плотности достаточно велика, то генерируемое им осредненное движение может поддерживать турбулентность в зоне турбулентного смешения и “продлевать жизнь” последней.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00363а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Озмидов Р. В. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
2. Васильев О. Ф., Кузнецов Б. Г., Лыткин Ю. М., Черных Г. Г. Развитие области турбулизированной жидкости в стратифицированной среде // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. 1974. № 3. С. 45–52.
3. Chashechkin Yu. D., Chernykh G. G., Voropayeva O. F. The propagation of a passive admixture from a local instantaneous source in a turbulent mixing zone // Int. J. Comput. Fluid Dyn. 2005. V. 19, N 7. P. 517–529.

**Исследование погрешностей метода
частиц–в–ячейках**
An analysis of particle–in–cell method error

Вшивков В. А., Месяц Е. А.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; vsh@ssd.sccc.ru*

Для развития многих современных технологий очень важным является детальный анализ различных физических процессов, описываемых сложными математическими моделями. Изучение этих процессов невозможно без использования методов численного моделирования. В настоящее время мощности компьютеров позволяют решать трехмерные нестационарные задачи физики плазмы и астрофизики. Известно, что плазма является одной из наиболее сложных для исследования природных сред. К процессам, в которых существенно проявляются плазменные эффекты, относятся управляемый термоядерный синтез, плазменные технологии, взрывы Сверхновых звезд, процессы на Солнце, взаимодействие солнечного ветра с магнитосферами планет и искусственными объектами, активные эксперименты в космосе. Трудность, а иногда и невозможность, получения достоверной информации в наблюдениях и экспериментах привела к необходимости численного моделирования. Плазма является средой, в которой могут одновременно существовать различные временные и пространственные масштабы. Обычным явлением в плазме являются неустойчивости, приводящие к ее турбулизации. Из-за этого гидродинамическое приближение для описания динамики плазмы применимо в ограниченном числе случаев. Считается, что хорошим приближением для описания плазмы является система уравнений Власова для каждой компоненты плазмы и система уравнений Максвелла для электромагнитных полей. Задачи, возникающие в физике плазмы, обычно имеют двумерный и трехмерный характер, и следовательно функции распределения ионов и электронов зависят от большого числа переменных: времени, двух или трех координат и трех компонент скорости. В связи с этим обычные конечно-разностные методы для решения кинетических уравнений не применимы. К задачам физики плазмы тесно примыкают некоторые задачи астрофизики. Галактики, пылевая компонента протопланетного диска также могут быть описаны кинетическим уравнением Власова. Это уравнение

дополняется уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. Здесь одной из принципиальных трудностей является гравитационная неустойчивость, не позволяющая прямо использовать разработанные для других задач методы. Поэтому проблема создания эффективных численных алгоритмов для решения нестационарных многомерных задач физики плазмы и астрофизики является очень актуальной. При решении кинетического уравнения Власова широко применяется метод частиц-в-ячейках. Идея метода частиц-в-ячейках заключается в применении схемы расщепления с последующим разделением решения на два этапа: лагранжев, на котором по известному значению сил отыскиваются новые положения модельных частиц (узлов лагранжевой сетки) из уравнения движения частиц, и эйлеров, на котором по новым координатам частиц определяются значения полей на неподвижной эйлеровой сетке. Важным моментом здесь является переход с лагранжевой сетки на эйлерову и обратно, который осуществляется при помощи ядра частицы (функции, которая задает размер модельной частицы и распределение плотности заряда внутри нее). Основным недостатком метода частиц-в-ячейках является наличие в решении нефизических эффектов (так называемых шумов), которые ограничивают применение метода при решении практических задач. Использование точечных модельных частиц ведет к сильным флуктуациям плотности. Увеличение количества модельных частиц не может полностью устранить недостатки метода. Поэтому в методе частиц используются частицы конечных размеров, которые могут свободно проходить друг через друга. Нами исследованы различные причины возникновения численных шумов в методе частиц в ячейках и предлагаются различные методы уменьшения численных погрешностей: 1) Усовершенствование алгоритма, минимизирующего “самодействие” частиц, для решения двумерных и трехмерных задач. Для этого предлагаются новые ядра метода частиц. 2) Создание алгоритма, уменьшающего стохастичность распределения модельных частиц при небольшом их количестве.

Работа выполнена при поддержке СО РАН (интеграционный проект № 113) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00615).

О точных решениях уравнений ветрового движения стратифицированной жидкости (двумерный случай)

On the exact solutions of the stratified fluid wind motion equations (two-dimensional case)

Гаврилова Л. В.¹, Компаниец Л. А.²

¹ Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;

lvg@front.ru

² Институт вычислительного моделирования СО РАН,

Красноярск, Россия; kla@icm.krasn.ru

Аналитические решения для стационарных ветровых движений однородной жидкости (модели типа Экмана) хорошо изучены и широко применяются для анализа течений как в трехмерном, так и в двумерном случае (движение в вертикальной плоскости), для замкнутых и проточных водоемов. Первое решение, параметрически зависящее от градиентов свободной поверхности, для бассейна бесконечной глубины получено Экманом еще в 1905 г., и в некоторых модификациях стало основой для анализа течений при различных параметрах (глубина бассейна, условия на дне и т. д.) [1].

Некоторые сложности возникают в трехмерном случае при расчете градиентов свободной поверхности, для нахождения которых приходится решать уравнение эллиптического типа в области, ограниченной береговой линией. Аналитическое решение при этом удается выписать только в исключительных случаях, а чаще всего это уравнение решается численно. Таких проблем не возникает в двумерном случае — этот параметр легко исключается и решение получено для произвольно заданного коэффициента вертикального турбулентного обмена [1, 2].

Для двумерного движения неоднородной жидкости также удалось получить точное решение, при этом функция распределения температуры подбирается таким образом, чтобы можно было, с одной стороны, моделировать область ее резких изменений, что характерно для большинства замкнутых водоемов в летний период, а с другой — чтобы можно было получить аналитическое решение. Коэффициент турбулентного обмена при этом — постоянный или кусочно-постоянный по глубине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Компаниец Л. А., Якубайлик Т. В., Гаврилова Л. В., Гуревич К. Ю. Модели экмановского типа в задачах гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2007.
2. Зырянов В. Н., Фролов А. П. Природные компенсационные противотечения в водохранилищах равнинного типа // Водные ресурсы. 2006. Т. 1, № 1. С. 5–13.

Существование и устойчивость обобщенного решения системы уравнений каталитического процесса в кипящем слое

Existence and stability of the generalized solution to the system of equations for a fluidized-bed catalytic process

Гаевой В. П.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; gaev@math.nsc.ru

Математические модели, учитывающие влияние реакционной среды на нестационарное состояние активной поверхности катализатора, широко используются для описания каталитических процессов в кипящем слое. В данной работе рассматривается циркуляционная модель слоя, в которой движение частиц катализатора представляется в виде двух взаимопроникающих потоков: восходящего потока, доля частиц которого равна a , $0 < a < 1$ и нисходящего потока с долей частиц $b = 1 - a$. Для двухстадийной каталитической реакции первого порядка по промежуточному веществу математическая модель процесса в слое сводится к смешанной задаче в полуполосе $\Pi = \{(x, t) : x \in [0, h], t \geq 0\}$

$$\begin{aligned} c_x &= -p f(c) (1 - a u - b v), \quad c(0, t) = c_0, \\ a u_t + u_x &= q (v - u) - a (1 + f(c)) u + a f(c), \\ b v_t - v_x &= q (u - v) - b (1 + f(c)) v + b f(c), \\ u(\xi, t) &= v(\xi, t), \quad \xi = 0, h, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x), \quad x \in [0, h], \end{aligned} \tag{1}$$

где $c(x, t)$, $u(x, t)$, $v(x, t)$ — концентрации вещества в газовой фазе, в восходящем и нисходящем потоках частиц катализатора соответственно, $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$, $p > 0$, $q \geq 0$, $c_0 \geq 0$ — константы.

В соответствии с реальными представлениями о каталитических процессах предполагается, что $f(c) = 0$ при $c \leq 0$ и $f(c) > 0$ при $c > 0$. Физический смысл имеют только решения удовлетворяющие неравенствам $0 \leq c(x, t) \leq c_0$, $0 \leq u(x, t) \leq 1$, $0 \leq v(x, t) \leq 1$. Существование и

устойчивость непрерывного обобщенного решения задачи (1) рассмотрены в работе [1]. В приложениях $u^0(x)$ и $v^0(x)$ могут быть разрывными функциями.

Обозначим через S^0 множество векторных функций $U^0(x) = (u^0(x), v^0(x))$, где $u^0(x)$ и $v^0(x)$ суммируемы на отрезке $[0, h]$ и удовлетворяют неравенствам $0 \leq u^0(x), v^0(x) \leq 1$. Через $M(\Pi)$ обозначим множество векторных функций $V(x, t) = (c(x, t), u(x, t), v(x, t))$ таких, что $c(x, t) \in C(\Pi)$, $u(x, t), v(x, t) \in L_2(\Pi)$ ограничены и суммируемы по всем характеристикам системы (1).

Векторную функцию $V(x, t) \in M(\Pi)$ будем называть *суммируемым обобщенным решением* задачи (1), если $V(x, t)$ всюду в Π удовлетворяет системе интегральных уравнений, полученных путем интегрирования по характеристикам уравнений (1).

При $f(c) \in C[0, c_0]$ и $U^0(x) \in S^0$ доказывается существование обобщенного решения $V(x, t) \in M(\Pi)$ задачи (1) и стабилизация при $t \rightarrow \infty$ физически значимых функционалов от решения $c(h, t)$, и $\int_1^h (au(\xi, t) + bu(\xi, t))d\xi$, а в случае непрерывности $f(c)$ по Липшицу — единственность решения.

В предположении, что $f(c) \in H^1[0, c_0]$ и $ph \max f(c) \|f(c)\|_{H^1[0, c_0]} \leq 1$ и при условии, что исходные и возмущенные начальные данные принадлежат множеству S^0 доказывается экспоненциальная устойчивость обобщенного решения в банаховых пространствах с нормами

$$\|V(x)\|_{H_{1/2}^*[0, h]} = \max\{\|c(x)\|_{H^{1/2}[0, h]}, \|u(x)\|_{L_2(0, h)}, \|v(x)\|_{L_2(0, h)}\},$$

$$\|V(x)\|_{H_1^*[0, h]} = \max\{\|c(x)\|_{H^1[0, h]}, \sup_x |u(x)|, \sup_x |v(x)|\},$$

где $H^{1/2}[0, h]$ и $H^1[0, h]$ — пространства Гёльдера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаевой В. П. Существование и устойчивость непрерывного обобщенного решения нестационарной модели каталитического процесса в кипящем слое // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 10, № 4(32). С. 10–20.

Одна модель генной сети, исправляющей повреждение ДНК

DNA-repairment gene network model

Гайдов Ю. А.¹, Голубятников В. П.²

¹Новосибирский государственный педагогический университет,

Новосибирск, Россия; gja822@ngs.ru

²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; glbtn@math.nsc.ru

Мы изучаем топологические свойства фазового портрета нелинейной динамической системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha_0 z + \frac{\alpha_1 x^n}{k_1 + x^n} - \gamma_1 xy - \gamma_2 x; & \dot{y} &= \alpha_2 + \frac{\alpha_3 x^4}{k_2 + x^4} - \frac{\alpha_2}{\beta} y; \\ \dot{z} &= \frac{\alpha_{1s} z(B - z)}{k_{1s} + B - z} - \frac{\alpha_{2s} z}{(k_{0d} + D)(k_{2s} + z)}; & \dot{D} &= -\alpha_d D x z,\end{aligned}\quad (1)$$

моделирующей генную сеть, которая исправляет некоторые повреждения ДНК. Биохимическая интерпретация этой системы подробно описана в [1]. Аналогичные механизмы такого исправления обсуждаются в [2]. Переменные $x = [p53]$, $y = [Mdm2]$, $z = [AtmP]$ обозначают концентрации соответствующих веществ, участвующих в реакциях. Функция $D(t)$ — это объём повреждения в ДНК; постоянная $B = [Atm] + z$ появляется из закона сохранения.

Мы строим область $Q = [0, C_1] \times [\beta, C_2] \times [a, B] \subset R_+^3$, размеры которой определяются параметрами системы (1). Здесь $a, \beta > 0$ и R_+^3 — положительный октант в $R^3(x, y, z) \subset R^4(x, y, z, D)$. Показано, что при малых t сумма индексов особых точек векторного поля скоростей $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ в Q равна -1 , а при $t \gg 0$ эта сумма равна нулю (см. [3]).

При малых $z(0)$ и больших начальных повреждениях $D(0)$ проекции траекторий системы (1) на R_+^3 попадают в область Q через “нижнюю” грань $z = a$ и осциллируют там до тех пор, пока $D(t)$ не станет достаточно малым. $D(t) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow \beta$, $z \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Эти предельные значения концентраций x, y, z , по видимому, соответствуют “здоровому” состоянию генной сети в рамках изучаемой модели. Проекция траекторий, начинающихся в точках $x(0) = 0$, $y(0) = \beta$,

$z(0) \approx 0$, $D(0) \gg 0$, на R_+^3 почти замыкаются в петлю. В наших численных экспериментах величины параметров α_m, γ_j и др. были близки к значениям, указанным в [1].

При изучении стационарных точек, замкнутых траекторий, бифуркаций и других динамических характеристик таких генных сетей геометрические свойства графиков правых частей рассматриваемых уравнений играют более важную роль, чем их конкретные аналитические представления.

Прямая связь суммарного индекса особых точек динамической системы (1) с наличием повреждения в ДНК демонстрирует полезный подход к описанию качественных свойств генных сетей с помощью декомпозиции фазового пространства на блоки, подобные области Q . В основе этого подхода лежит сравнение свойств (в частности, сложности) непрерывных моделей генных сетей с соответствующими дискретными моделями (см. [4, 5]). В стационарном случае, когда векторные поля скоростей моделируемых процессов не зависят от времени, такие декомпозиции использовались в теории индекса Конли (см., например, [6, 7]).

Авторы выражают искреннюю благодарность Э. Мьелснесу за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00070), СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 119) и программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)” (проект № 2.1.1/3707).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chikarmane V., Ray A., Sauro H. M., Nadim A. A model for p53 triggered by DNA damage // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2007. V. 6, N 1. P. 61–76.
2. Zhang T., Brazhnik P., Tyson J. J. Exploring mechanisms of the DNA-damage response // Cell Cycle. 2007. V. 6, N 1. P. 85–94.
3. Golubyatnikov V. P., Mjolsness E., Gaidov Yu. A. Topological index of the p53-Mdm2 circuit // Информ. вестн. ВОГиС. 2009. Т. 13, № 1. С. 160–162.
4. Гайдов Ю. А., Голубятников В. П. О некоторых нелинейных динамических системах, моделирующих несимметричные генные сети // Вестн. НГУ. Сер. Мат., мех., информат. 2007. Т. 7, № 2. С. 23–32.
5. Лихошвай В. А., Голубятников В. П., Демиденко Г. В., Фадеев С. И., Евдокимов А. А. Теория генных сетей // Системная компьютерная биология. Новосибирск: СО РАН, 2008. С. 395–480.
6. Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. Providence, RI: AMS, 1978. (Reg. Conf. Ser. Math.; 38).
7. Franzosa R., Mischaikow K. Algebraic transition matrices in the Conley index theory // Trans. Am. Math. Soc. 1998. V. 350, N 3. P. 889–912.

Способ расчета непотенциальных смешанных течений газа

A method for calculation of non potential mixed gas flow

Галкин В. М.

Томский политехнический университет, Томск, Россия; vlg@tpu.ru

При численном решении стационарных уравнений Эйлера наибольшие трудности возникают при изменении типа уравнений в расчетной области. Классическим примером является расчет осесимметричного течения идеального газа в сопле Лаваля с переходом через скорость звука.

В [1] предложено исходную систему уравнений разделять на две подсистемы, одна из которых гиперболического, а вторая — смешанного типа. Этот прием получил свое дальнейшее развитие в [2] с использованием в качестве системы координат функции тока ψ и ее ортогонального дополнения φ . В этом случае выделялась подсистема двух уравнений первого порядка гиперболического типа относительно H — энтропийной и S — энтальпийной функций с граничными условиями на входе в сопло и подсистема смешанного типа, которая содержала два уравнения второго порядка относительно θ — угла наклона вектора скорости и z — квадрата числа Маха (M). Граничные условия для этой подсистемы задавались на входе, оси и стенке. Левая граница находилась в сверхзвуковой области, поэтому граничное условие на ней не требовалось. Первая подсистема интегрировалась вдоль линий тока вниз по течению. Для решения каждого из уравнений смешанного типа второй подсистемы использовался метод приближенной факторизации. Это позволило ускорить время расчета по сравнению с методом установления более чем на порядок.

В некоторых, интересных для практики случаях, известно, что вдоль каждой линии тока число Маха M монотонно возрастает и имеется только одна точка, в которой $M = 1$. Это позволяет во второй подсистеме оставить только одно уравнение смешанного типа второго порядка относительно θ и перенести в первую подсистему уравнение первого порядка для q — газодинамической функции плотности потока массы. Последнее уравнение интегрируется вдоль линий тока вверх

и вниз по течению от звуковой линии, которая является внутренним граничным условием для этого уравнения. Используемые уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left((1-z)L \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) + N &= 0, \\ (\theta, \psi)|_{M=1} &= \arg \left(\frac{By\rho}{c\psi} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \frac{\sin \theta}{ycw} + A = 0 \right), \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} &= F_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = F_2, \quad \frac{\partial \ln q}{\partial \varphi} = -\frac{By\rho}{c\psi} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} - \frac{\sin \theta}{ycw} - A. \end{aligned}$$

Здесь $H = \frac{P}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{w^2}{2}$; $S = \frac{P}{\rho^\gamma}$; $q = M \left(\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$; y — ордината; ρ — плотность; w — модуль вектора скорости; P — давление; γ — показатель адиабаты; $A, K, L, N, F_1, F_2, c, B$ являются аналогично [2] функциями независимых и зависимых переменных, а также правых частей исходных уравнений. Правые части отражают непотенциальные процессы.

Таким образом, предлагается следующий алгоритм:

- 1) задается начальное приближение;
- 2) во всей области решается уравнение второго порядка;
- 3) находится положение звуковой линии;
- 4) уравнение для q интегрируется от звуковой линии вверх и вниз по течению вдоль линий тока, из q находится число Маха;
- 5) от входа в сопло, вдоль линий тока интегрируются H и S ;
- 6) возврат на пункт 2 при необходимости продолжения итераций.

Расчеты показывают, что предложенный метод по точности совпадает с методом [2], но поскольку решается только одно уравнение второго порядка, то трудоемкость предложенного подхода по сравнению с [2] в два раза меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуров Б. Г., Яненко Н. Н., Яушев И. К. Численный расчет непотенциальных течений идеальной жидкости в плоских каналах // Числ. методы механики сплош. среды. 1970. Т. 2, № 1. С. 3–16.
2. Бутов В. Г., Халимов С. Б. Расчет непотенциальных течений идеального газа в осесимметричных соплах методом приближенной факторизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 12. С. 1861–1867.

Наилучшие в среднем квазиконформные отображения

The best in average quasiconformal maps

Гарипов Р. М.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; R.M.Garipov@mail.ru

При численном решении дифференциальных уравнений разностными методами возникает задача: по заданному граничному значению $u|_{\partial\Omega}$ найти непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм $u : \Omega \rightarrow G$, максимально близкий к конформному. Здесь Ω, G — заданные области в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Такой гомеоморфизм u отображает кубическую сетку в стандартной области Ω в разностную сетку в области G , ячейки которой наиболее близки к кубам. Даже на плоскости ($n = 2$) эта задача не имеет конформного решения. Поэтому решение надо искать в классе квазиконформных отображений.

В теории квазиконформных отображений в качестве меры искажения конформности $K = K(x)$ в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ берётся отношение длины наибольшей полуоси к длине наименьшей полуоси эллипсоида, в который отображается бесконечно малый шар с центром x . Отображение называется квазиконформным, если функция $K(x)$ ограничена в области Ω . Указанное отношение равно $K = \sqrt{\lambda_1}/\sqrt{\lambda_n} \geq 1$, где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ — собственные числа матрицы $u'(x)^T u'(x)$, $u'(x) = (\partial u_i / \partial x_j)$ — матрица Якоби, $\det u' \neq 0$, знак T обозначает транспонирование. Величина

$$k = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^{1/2} (\lambda_1^{-1} + \dots + \lambda_n^{-1})^{1/2}$$

удовлетворяет неравенствам $\max\{K, n\} \leq k \leq nK$, поэтому сама может быть взята за меру искажения конформности вместо K . С другой стороны, k^2 рационально выражается через матрицу Якоби: $k = |u'| |u'^{-1}|$ (через $|A|^2$ обозначается сумма квадратов элементов матрицы A). Далее величину k будем называть *искажением конформности*. Можно определить интегральное искажение конформности

$$S_s(u) = \int_{\Omega} k^s |\det u'|^{1/2} dx,$$

где параметр $s > 0$ введён для общности. Искомое отображение $y = u(x)$ найдём из условия минимума функционала $S_s(u)$. Благодаря весу $|\det u'|^{1/2}$ обратное отображение $x = v(y)$ является экстремалью того же самого функционала.

Плотность $F = k^s |\det u'|^{1/2}$ функционала $S_s(u)$ невыпукла, и поэтому известное достаточное условие существования экстремали не выполняется. Но при $s \geq n/2$ для функции F справедлива оценка снизу, которая обеспечивает корректность граничного условия в смысле теорем вложения Соболева.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия эллиптичности по И. Г. Петровскому [1] системы уравнений Эйлера на экстремаль функционала $S_s(u)$: $\det u' \neq 0$, $s > 1/2$ при $n = 2$; искажение конформности $k < k_2 \cong 24.84$ при $n = 3$, $s = 2$. Линеаризованная на решении с искажением конформности $k < k_2$ система уравнений экстремали тоже будет эллиптической по И. Г. Петровскому. Доказана однозначная разрешимость в малом граничных задач для системы уравнений экстремали в случае $n = 2$, $s = 1$. В случае произвольных $n \geq 2$ и $s > (1/16)n^2/(n-1)$ установлена однозначная разрешимость граничных задач для линеаризованных в окрестности тождественного отображения уравнений Эйлера.

В ряде работ рассматриваются экстремальные задачи для функционалов, обеспечивающих квазиконформность отображения в среднем [2]. Строго говоря, экстремаль функционала $S_s(u)$ не является квазиконформным в среднем отображением в смысле [2] из-за веса $|\det u'|^{1/2}$ в плотности функционала. В работе [3] изучаются билипшицевы отображения, которые используются для построения оптимальных разностных сеток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. О системах дифференциальных уравнений, все решения которых аналитичны // Докл. АН СССР. 1937. Т. 17. С. 339–342.
2. Стругов Ю. Ф., Сычев А. В. Различные классы пространственных отображений, квазиконформных в среднем // Межвузовский сб. "Алгебра и математический анализ". Новосибирск: Изд-во НГУ, 1990. С. 104–125.
3. Гаранжа В. А. Управление метрическими свойствами пространственных отображений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 6. С. 818–829.

**О задачах электродинамики, моделируемых
псевдопараболическими уравнениями
в нецилиндрических областях**

**On problems of electrodynamics modelled
by pseudoparabolic equations in noncylindrical
domains**

Глазатов С. Н.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия; glaz@math.nsc.ru*

Рассмотрим в области $Q \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3$ (в общем случае нецилиндрической) следующее уравнение

$$A_1 u \equiv u_t - \Delta_x u_t - \operatorname{div}(|\nabla_x u|^2 \nabla_x u) + \lambda |u|^q u = f(x, t), \quad (1)$$

где параметры $\lambda \in \mathbb{R}, q \geq 0$ характеризуют свойства среды. Это уравнение выведено в [1, гл. 3, п. 2.2] и описывает квазистационарные процессы в кристаллических полупроводниках.

Функция $f(x, t)$ играет роль внешних источников, а $u(x, t)$ — потенциал электрического поля, создаваемого связанными электронами кристаллического полупроводника, который может изменять свою форму с течением времени.

Будем считать, что $\lambda \neq 0$.

Область Q ограничена участками гиперплоскостей $t = 0$ и $t = T$ и некоторой гладкой поверхностью Γ . Подробное описание Q имеется в [2]. Обозначим через D_t пересечение Q и гиперплоскости $\tau = t$.

Присоединим к (1) начально-краевые условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D_0, \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. Найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям (2), (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем функцию $u(x, t) \in L^\infty(0, T; \overset{\circ}{W}_4^1(D_t))$ такую, что $u_t \in L^2(0, T; W_2^1(D_t))$, *обобщенным решением* начально-краевой

задачи (1)–(3), если она удовлетворяет начальному условию (2) и, если для любой функции $v(x, t) \in L^\infty(0, T; \mathring{W}_4^1(D_t))$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{D_t} u_t v dx dt + \int_0^T \int_{D_t} \nabla_x u_t \nabla_x v dx dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{D_t} |\nabla_x u|^2 u_{x_i} v_{x_i} dx dt \\ + \lambda \int_0^T \int_{D_t} |u|^q u v dx dt = \int_0^T \int_{D_t} f v dx dt. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть выполнены все требуемые условия на область Q . Пусть $q \in [0, \infty)$ при $\lambda > 0$ и $q \in [0, 2)$ при $\lambda < 0$. Тогда для любой функции $f(x, t) \in L^2(Q)$ и для любой функции $u_0(x) \in \mathring{W}_4^1(D_0)$ существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи (1)–(3).

Далее рассматриваются различные задачи, связанные с уравнением

$$A_2 u \equiv u_t - u_{xxt} - u^3 = f(x, t). \quad (4)$$

Уравнение (4), возникающее в описании процессов в полупроводниках, также выведено в [1, гл. 7, п. 4.1]. Оно рассматривается в области Q (в общем случае нецилиндрической) на плоскости переменных (x, t) . Эта область ограничена отрезками прямых $t = 0$ и $t = T$ и двумя кривыми γ_1 и γ_2 . Ее подробное описание имеется в работе [2].

Здесь сначала доказывается существование и единственность решения вариационного неравенства с ограничением на решение, затем на основе этого результата при некоторых дополнительных условиях на начальную функцию доказывается существование локального обобщенного решения, а при очень жестких условиях на начальную функцию и на область Q — существование глобального обобщенного решения начально-краевой задачи, аналогичной задаче (1)–(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
2. Глазатов С. Н. О некоторых задачах для нелинейных псевдопараболических уравнений в нецилиндрических областях // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, №2. С. 272–289.

**Вычислительное моделирование сплошной среды
при помощи ячеистых дискретных структур**
**Computational modelling of continuous medium
using discrete structures**

Годунов С. К.¹, Куликов И. М.², Пешков И. М.¹

¹*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; peshkov@math.nsc.ru*

²*Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия; kulikov@ssd.sccc.ru*

В докладе рассматриваются некоторые варианты моделирования газовой динамики и нелинейных упруго-пластических сред ячеистыми дискретными структурами, в которых взаимодействие между ячейками осуществляется с помощью одномерных линейаризованных задач Римана. Обращается внимание на ряд вопросов, требующих экспериментального и теоретического исследования.

В частности, приводится математическая модель нелинейной упруго-пластической изотропной среды, нацеленной на описание больших деформаций. Модель формулируется в лагранжевых координатах в терминах несимметричных тензоров напряжений Пиола — Кирхгофа и градиентов деформаций. Исходная модель переформулируется в более удобной (как для численного, так и для теоретического исследования) форме законов сохранения, предложенной в 1961 г. С. К. Годуновым [1] и основанной на теории термодинамических потенциалов, которые обычно предполагаются выпуклыми функциями. Замечательным следствием такой формы является другая — симметрическая гиперболическая по Фридрихсу форма записи уравнений, которая по сути и служит обоснованием гиперболичности (корректности задачи Коши) исследуемой системы уравнений. Стоит отметить, что к форме Годунова на настоящий момент сводятся многие уравнения классической математической физики: уравнения газовой и гидродинамики, магнитной и релятивистской гидродинамики, теории упругости и упруго-пластичности, система уравнений Максвелла и т. д.

Так же в работе исследуются условия обеспечивающие симметрическую гиперболичность уравнений нелинейной теории упругости. При этом оказывается, что в одномерном случае уравнения удовлетворяют

полученным в работе условиям, в то время как в многомерном (2D и 3D) это не так. Для обеспечения гиперболичности в многомерном случае приходится вводить некоторые принципиальные изменения в постановку задачи [2].

На основе упомянутой формы записи законов сохранения и другого важного понятия из теории численных методов решения гиперболических систем — схемы Годунова, строится вычислительный алгоритм для нахождения решения исследуемой нелинейной системы уравнений упруго-пластической среды. Интересно отметить, что решение многомерной задачи строится при помощи процедуры расщепления из одномерных задач по координатным направлениям, корректность которых как раз обеспечена полученными условиями гиперболичности.

В заключении приводятся результаты расчетов нескольких задач о высокоскоростном деформировании металлов в одномерной и двумерной постановке. В частности, рассматриваются задачи о столкновении металлических пластин под разными углами. Результаты расчетов сравниваются с данными натурных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-9019.2009.1) и междисциплинарного интеграционного проекта фундаментальных исследований СО РАН № 40.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 3. С. 520–523.
3. Годунов С. К., Пешков И. М. Симметрические гиперболические уравнения нелинейной теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 6. С. 1034–1055.

Параллельный алгоритм метода встречных циклических прогонок с циклическим разбиением

A parallel algorithm in the cyclic counter-sweep method with cycle decomposition

Головашкин Д. Л.¹, Логанова Л. В.²

Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия; ¹dimitriy@smr.ru, ²tk@smr.ru

Моделирование физических процессов часто сводится к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с ленточной матрицей. Например, задачи дифракционной оптики при исследовании периодических оптических элементов [1] приводят к матрицам, содержащим, кроме ленты на центральных диагоналях, ненулевые элементы в верхнем правом и левом нижнем углах. Экономичность метода встречных прогонок и тот факт, что ограничение на масштабируемость может быть снято в случае многомерной сеточной области, определили выбор авторов в пользу его применения для решения СЛАУ с матрицей ленточного вида.

Произведя функциональную декомпозицию вслед за авторами [2, 4], предпишем всем процессорам выполнять вычисления прогоночных коэффициентов, значений промежуточных сеточных функций, искомых сеточных функций для своих участков различных СЛАУ, составляющих двумерную сеточную область w_2 . В случае распараллеливания алгоритма метода встречных циклических прогонок [3] для двумерной сеточной области на P задач, где $P=2^q$ и $q \in N$, каждая задача производит вычисления для $P/4$ подобластей w_2 и соседствует с $\log_2 P$ другими задачами. При этом никакие две подобласти, принадлежащие одной задаче, не содержат одну и ту же строку или столбец сеточной области. Для данного алгоритма характерна топология коммуникаций — гиперкуб. Время пересылок составляет $3 * (1 - \frac{2}{P}) * (N + M) * \tau_k$, где $N \times M$ — размер сеточной области, τ_k — длительность одной коммуникации между задачами алгоритма в рамках пакетной модели.

В [5] приведен параллельный алгоритм данного метода с линейным разбиением. Из теоретических соображений очевидно, что на прямоугольных областях, где $M \gg N$ предпочтение следует отдавать алгоритму из [5], характеризующемуся меньшим объемом пересылок. Для

квадратных областей следует выбирать алгоритм с циклическим разбиением. Что и подтверждают результаты вычислительных экспериментов, представленные на рисунке 1.

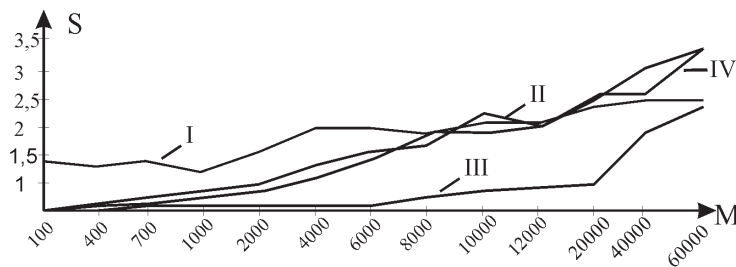


Рис. 1. Зависимость ускорения вычислительного процесса, порожденного 4-х задачным алгоритмом, от размерности сеточной области. Графики I — с линейным разбиением, II — с циклическим разбиением для различных M . Графики III — с линейным разбиением, IV — с циклическим разбиением на квадратной сеточной области

Исследование ускорения алгоритма, основанного на методе встречных циклических прогонок, с циклическим разбиением сеточной области показали эффективность его применения, начиная с линейного размера $M > 4000$. Полученный алгоритм является масштабируемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сойфер В. А. Методы компьютерной оптики. Изд. 2-е, испр. М.: Физматлит, 2003.
2. Миренков Н. Н. Параллельные алгоритмы для решения задач на однородных вычислительных системах // Вычисл. системы. 1973. Вып. 57. С. 3–32.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
4. Головашкин Д. Л. Параллельные алгоритмы решения сеточных уравнений трёхдиагонального вида, основанного на методе встречных прогонок // Мат. моделирование. 2005. Т. 17, № 11. С. 118–128.
5. Логанова Л. В. Параллельный алгоритм метода встречных циклических прогонок // Вестн. СГАУ. 2008. № 2(15). С. 167–174.

О концентрации кинетической энергии при фазовых переходах

On concentration of kinetic energy at phase transitions

Голубятников А. Н.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, Россия; golubiat@mail.ru*

1. Хорошо известна постановка задачи о точечном взрыве, предложенная в свое время Л. И. Седовым [1], о последующем распространении вначале сосредоточенной энергии. Можно также поставить вопрос: возможна ли концентрация в точке конечной энергии в результате некоторых механических или физико-химических процессов?

По-видимому, впервые наблюдение “отделения энергии от массы” было получено в теории образования космических лучей, связанной с разгоном частиц ударной волной, движущейся по фону со степенным падением плотности. В рамках ньютоновской механики автомодельная задача была решена еще Л. И. Седовым [1], но хотя скорость и температура за ударной волной стремились к бесконечности, такого отделения не было. Однако уже при численном решении задачи в рамках теории относительности этот эффект был обнаружен в работе [2]. Затем было построено точное неавтомодельное решение релятивистской задачи о поршне, обладающее таким эффектом [3]. Кроме того, была обнаружена концентрация энергии в задаче Г. Герца о распространении волны упругих столкновений в бесконечной дискретной системе частиц с конечной полной массой [3]. Настоящая работа посвящена исследованию эффекта концентрации кинетической энергии при прохождении волны фазового перехода или другого физико-химического превращения в локально несжимаемой среде при наличии сферической симметрии.

2. Пусть по покоящейся среде к центру идет фронт $r = R(t)$ изменения плотности ρ_0 на ρ_1 . Снаружи распределение скорости имеет вид $v = Q(t)/r^2$. Из условия сохранения потока массы на разрыве имеем $R^2 \dot{R} = Q/\delta < 0$, $\delta = 1 - \rho_0/\rho_1$.

Сохранение потока количества движения вместе с уравнениями движения определяет только распределение давления. Остается условие сохранения потока энергии. Здесь надо рассматривать два случая: переход с выделением энергии (горение) и с поглощением (плавление).

В случае выделения энергии можно пренебречь теплопроводностью, считая процесс локально адиабатическим. В результате, интегрируя уравнение энергии, а также пренебрегая скачком внутренней энергии и работой давления на бесконечности (обычно малыми) получаем

$$Q = -\text{sign } \delta \left(\frac{2\rho_0}{3\rho_1} \lambda R(R_0^3 - R^3) \right)^{1/2}, \quad E = \frac{\rho_1 Q^2}{8\pi R} \rightarrow \lambda M_0.$$

Здесь $\lambda > 0$ — удельная теплота фазового перехода; R_0, M_0 — начальные радиус и масса частицы. Отметим, что при $R = 0$ скорость v почти всюду равна нулю, но кинетическая энергия жидкости E остается конечной. Таким образом, мы приходим к постановке задачи о точечном взрыве в несжимаемой жидкости [1]. В результате образуется вакуумный пузырь.

При поглощении энергии $\lambda < 0$ и надо дополнительно решать уравнение теплопроводности, задавая кроме краевых условий T_0, T_∞ начальное распределение температуры, от которого зависит ответ. Ограничимся качественной оценкой концентрации энергии при малом Q , полагая температуру $T = T_\infty - (T_\infty - T_0)R(t)/r$. Тогда интегральное уравнение энергии сводится к дифференциальному уравнению для функции $E = E(R)$ с параметром

$$\varepsilon = \frac{|\delta| \kappa (T_\infty - T_0)}{\rho_0 R_0 |\lambda|^{3/2}} \sqrt{\frac{3\rho_1}{2\rho_0}},$$

где κ — коэффициент теплопроводности. Исследуя дифференциальное уравнение при малом ε , имеем $E \rightarrow (4/49) |\lambda| M_0 \varepsilon^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00026, 08-01-00401) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-610.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
2. Shapiro P. L. Relativistic blast waves in two dimensions. I. The adiabatic case // Astrophys. J. 1979. V. 233, N 3, Part 1. P. 831–850.
3. Голубятников А. Н. О механизме отделения энергии-импульса от массы покоя // Механика. Современные проблемы. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 152–157.

Применение кватернионов в теории волнового уравнения

Application of quaternions to the theory of the wave equation

Гордиенко В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева РАН, Новосибирск,
Россия; gordienk@math.nsc.ru

Пусть функция $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$, вещественная или комплексно-значная, удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f.$$

Опишем симметрические x_0 -гиперболические по Фридрихсу системы, к которым может быть сведено волновое уравнение.

Пусть $\vec{k} = (k_0, k_1, k_2, k_3)^\top$ и $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)^\top$ два вещественных четырёхмерных вектора. Образует из их компонент эрмитовы матрицы

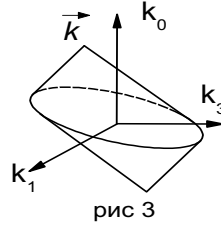
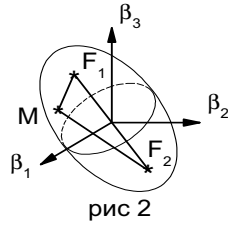
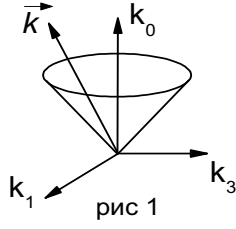
$$A_0 = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ k_2 & i\beta_3 & k_0 & -i\beta_1 \\ k_3 & -i\beta_2 & i\beta_1 & k_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} k_1 & k_0 & -i\beta_3 & i\beta_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ i\beta_3 & k_2 & -k_1 & i\beta_0 \\ -i\beta_2 & k_3 & -i\beta_0 & -k_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} k_2 & i\beta_3 & k_0 & -i\beta_1 \\ -i\beta_3 & -k_2 & k_1 & -i\beta_0 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ i\beta_1 & i\beta_0 & k_3 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} k_3 & -i\beta_2 & i\beta_1 & k_0 \\ i\beta_2 & -k_3 & i\beta_0 & k_1 \\ -i\beta_1 & -i\beta_0 & -k_3 & k_2 \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Утверждается, что вектор-функция $U = (u_{x_0}, -u_{x_1}, -u_{x_2}, -u_{x_3})^\top$, образованная первыми производными функции u , удовлетворяет системе

$$\left(A_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) U = f \vec{k}. \quad (1)$$

Утверждается, что системы вида (1) это все системы первого порядка с эрмитовыми матрицами, к которым может быть сведено волновое уравнение.



Система (1) является симметрической x_0 -гиперболической по Фридрихсу (то есть $A_0 > 0$), если вектор $\vec{k}$ расположен внутри прямого кругового конуса (рис. 1), а трёхмерный вектор $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)^\top$ с концом в точке M расположен внутри эллипсоида, полученного вращением эллипса с фокусами $F_1(k_1, k_2, k_3)$, $F_2(-k_1, -k_2, -k_3)$ и большой полуосью k_0 , то есть $|F_1M| + |F_2M| < 2k_0$ (рис. 2).

Чтобы скорости распространения возмущений у системы (1) и у волнового уравнения совпадали, вектор $\vec{k}$ по-прежнему должен быть расположен внутри конуса, а четырёхмерный вектор $\vec{\beta}$ при этом должен располагаться внутри фигуры, образованной пересечением двух пол конусов — нижней, выпущенной из точки (k_0, k_1, k_2, k_3) , и верхней, выпущенной из точки $(-k_0, -k_1, -k_2, -k_3)$. Причём допускается расположение вектора $\vec{\beta}$ и на границе описанной фигуры, но не на ребре (рис. 3).

Пусть координаты $(x_0, x_1, x_2, x_3)^\top$ преобразованы с помощью преобразования Лоренца W . Тогда, как известно, вектор U преобразуется тем же преобразованием W . Оказывается, преобразованный вектор U удовлетворяет системе вида (1), построенной по векторам $\vec{k}$ и $\vec{\beta}$, преобразованным с помощью преобразования Лоренца $W^{-\top}$.

Уравнение конуса характеристических нормалей системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} & \det[\xi_0 A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3] \equiv \\ & \equiv (\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)[(k_0 \beta_0 - k_1 \beta_1 - k_2 \beta_2 - k_3 \beta_3)^2 (\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) - \\ & - 2(k_0 \beta_0 - k_1 \beta_1 - k_2 \beta_2 - k_3 \beta_3)(k_0 \xi_0 - k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 - k_3 \xi_3)(\beta_0 \xi_0 - \beta_1 \xi_1 - \beta_2 \xi_2 - \beta_3 \xi_3) + \\ & + (k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 + \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2)(k_0 \xi_0 - k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 - k_3 \xi_3)^2] = 0. \end{aligned}$$

Обоснование сформулированных утверждений основано на использовании кватернионов и инвариантов преобразования Лоренца.

Численное моделирование плазмохимического травления кремния

Numerical modeling of plasma–chemical silicon etching

Григорьев Ю. Н.¹, Горобчук А. Г.²

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск,
Россия; ¹grigor@ict.nsc.ru, ²al@ict.nsc.ru*

На основе численного моделирования исследуются особенности тепломассобмена в плазмохимическом реакторе травления с неоднородным ВЧ-разрядом. Расчеты выполнены с использованием двумерной математической модели неизотермического реактора, в которой движение газовой смеси описывалось уравнениями многокомпонентной гидродинамики с учетом конвективно-диффузионного переноса отдельных компонент смеси [1]. Для определения внутренних характеристик низкотемпературной плазмы в диапазоне рабочих давлений 0.1–1.0 торр использовалась гидродинамическая модель аксиально-симметричного ВЧ-разряда в трехмоментном приближении. Модель включает уравнения непрерывности для электронов и положительных ионов, уравнение баланса энергии электронов и уравнение Пуассона для электрического потенциала. Для численного решения системы уравнений кинетики ВЧ-разряда были разработаны экономичные конечно-разностные методы на основе модифицированной схемы Шарфетера — Гуммеля, обеспечивающие положительность средней энергии и концентраций компонент плазмы.

Исследовано влияние ВЧ-разряда на скорость и однородность травления кремниевых образцов в смеси тетрафторметана CF_4 с кислородом. Найдено, что однородность травления образцов существенно зависит от изменения электронной плотности в радиальном направлении, которым часто пренебрегают, рассчитывая разряд в одномерной постановке. Показано, что присадка кислорода к CF_4 понижает среднюю плотность электронов и эффективность диссоциации молекул исходной газовой смеси CF_4/O_2 . Понижение средней плотности энергетичных электронов в реакторе, вызванное добавкой кислорода, может снизить скорость травления в пределах до 30%.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-00315, № 08-01-00116) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-931.2008.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев Ю. Н., Горобчук А. Г. Особенности интенсификации травления кремния в CF_4/O_2 // Микроэлектроника. 2007. Т. 36, № 4. С. 283–294.

Об устойчивости струйных магнитогидродинамических течений

On a stability of jet MGD flows

Губарев Ю. Г.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
gubarev@hydro.nsc.ru*

Струйные течения жидкости как объект теоретических исследований вызывают к себе интерес со стороны ученых уже без малого три столетия, что объясняется той важной ролью, которую они играют для широкого круга явлений природы и практических приложений.

При этом едва ли не главное место в данных исследованиях занимает проблема устойчивости струйных течений жидкости. Настоящий доклад посвящен такому существенному аспекту этой проблемы, как магнитогидродинамическая (МГД) устойчивость и токовое разрушение жидких проводящих струй. Работы по данному направлению интенсивно публикуются, начиная с 60-х годов прошлого века, когда струйные МГД течения стали активно применяться в целом ряде значимых разделов науки и отраслей промышленности (например, в физике плазмы, порошковой металлургии, электрофизике, машиностроении и т. д.).

К сегодняшнему дню в области изучения МГД устойчивости и механизмов токового разрушения жидких проводящих струй достигнут впечатляющий прогресс. Действительно, аналитически и/или численно рассмотрено внушительное количество задач устойчивости струйных МГД течений, в процессе решения которых в той либо иной степени учитывались разного рода физические свойства вещества струй, различные виды возмущений, а также разные типы окружающих струи сред. Итоги этих теоретических исследований во многих случаях сопоставлялись с накопленным богатым экспериментальным материалом, причем нередко между ними обнаруживалось вполне приемлемое соответствие, правда, скорее в качественном, нежели количественном плане.

Вместе с тем, нельзя не отметить очевидную ограниченность аналитических результатов изучения устойчивости осесимметричных струйных МГД течений жидкости. Дело в том, что они, как правило, установлены для простейших стационарных течений (постоянная осевая

скорость, линейное по радиусу распределение азимутального магнитного поля и т. п.), а также малых (в форме нормальных мод) или слабо нелинейных осесимметричных возмущений.

В представляемом докладе развивается новый, более общий подход к рассмотрению МГД устойчивости и токового разрушения жидких проводящих струй на примере исследования линейной задачи устойчивости установившихся осесимметричных сдвиговых течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной границей во “вмороженном” полоидальном магнитном поле по отношению к малым длинноволновым возмущениям той же симметрии. Суть данного подхода заключается в построении на регулярной основе функционалов Ляпунова, обладающих способностью нарастать со временем в силу тех либо других начально-краевых задач, решения которых описывают эволюцию малых возмущений изучаемых стационарных течений жидкости. Посредством этого алгоритма конструирования растущих во времени функционалов Ляпунова удается получать достаточные условия и теоретической (на полубесконечных интервалах времени), и практической (на конечных временных промежутках) линейной неустойчивости, строить априорные экспоненциальные нижние оценки и доказывать существование начальных данных для нарастающих со временем малых возмущений.

В предлагаемой работе, сначала из энергетических соображений, установлены достаточные условия теоретической устойчивости стационарных осесимметричных сдвиговых течений однородной по плотности невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и “вмороженным” полоидальным магнитным полем относительно малых длинноволновых возмущений того же типа симметрии. После этого, уже при помощи упомянутой выше методики конструирования растущих во времени функционалов Ляпунова, произведено частичное обращение данных условий устойчивости, получены достаточные условия практической неустойчивости, и построена априорная экспоненциальная оценка снизу роста рассматриваемых малых возмущений. В завершение, сконструирован иллюстративный аналитический пример исследуемых установившихся течений и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений, которые нарастают во времени согласно построенной оценке.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00585) и Федерального агентства по образованию Министерства образования и науки РФ (проект № 2.1.1/4591).

**Пороговое поведение поля напряжений
в неевклидовой модели сплошной среды**

**Threshold behaviour of stress field
in non-euclidean model of continuum**

Гузов М. А.

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток,
Россия; guzev@iam.dvo.ru*

С. К. Годуновым [1] исследовалось влияние термомеханического состояния материала при деформировании на его внутреннюю геометрическую структуру. В наиболее четкой форме им было указано, что отождествление изменений внутренней метрики материала, определяющей изменение его внутренней энергии, и соответствующее изменение формы тела в евклидовой метрике внешнего наблюдателя, является дополнительной гипотезой, постулируемой в классической теории упругости. Он предложил ввести эффективный метрический тензор, вычисляемый с помощью реологических соотношений через тензор напряжений и температуру среды. Для этого тензора не выполняются условия совместности в общем случае, поэтому его можно рассматривать в качестве неевклидовой геометрической характеристики материала, а соответствующее обобщение классической теории означает переход к неевклидовой модели сплошной среды.

С точки зрения физики включение неевклидовых геометрических характеристик в качестве внутренних переменных модели сплошной среды позволяет описать дефекты различных типов в среде [2–4]. Наличие дефектов следует учитывать при рассмотрении микроскопических механизмов упруго-пластического деформирования материалов. Последние, как известно из экспериментальных исследований, обладают свойством порогового поведения их макроскопических физико-механических характеристик при внешнем воздействии, что проявляется, например, в переходе материала из упругого состояния в пластическое, если интенсивность напряжений достигает предела текучести.

В данной работе на основе неевклидовой модели ставится задача описания порогового поведения микроструктуры материала при механическом воздействии. Рассматривается бесконечный цилиндр, содержащий дефекты структуры и находящийся в условиях равномерного

бокового сжатия. Предполагается, что дефекты имеют континуальное распределение, описание которых дается в терминах тензора кручения, который определяет тензор Бюргерса. Модельные соотношения включают уравнение равновесия среды и стационарное уравнение для тензора кручения. Конкретизация уравнения состояния рассматриваемой системы определяется заданием структуры внутренней энергии и источника диссипации. Энергия равна сумме слагаемых, характеризующих упругую энергию среды, энергию дефектной структуры и энергию взаимодействия упругого поля с дефектной структурой. Источник диссипации представляет выражение в виде суммы первого инварианта упругого поля и потокового слагаемого.

В рамках предложенной модели в линейном приближении по полю дефектов получено решение для распределения компонент напряжений. Дополнительное слагаемое к классическому полю напряжений определяется дефектами в материале и имеет неевклидову геометрическую природу. Из полученного решения следует, что при достижении внешней нагрузки некоторой величины изменяется поведение компонент напряжений и происходит переход от монотонного поведения к осциллирующему. Установлена связь порогового значения этой нагрузки с феноменологическими параметрами модели.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00581).

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
2. Панин В. Е., Гриняев Ю. В., Данилов В. И. и др. Структурные уровни пластической деформации и разрушения. Новосибирск: Наука, 1990.
3. Гузев М. А., Мясников В. П. Термомеханическая модель упругопластического материала с дефектами // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1998. № 4. С. 156–172.
4. Мясников В. П., Гузев М. А. Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях // Физ. мезомеханика. 2000. Т. 3, № 1. С. 5–16.

Перемежаемость спектра матрицы, имеющей блочную структуру

Intermittency of spectrum of matrix with block structure

Гузев М. А.¹, Дмитриев А. А.²

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток,
Россия; ¹guzev@iam.dvo.ru, ²dmitriev@iam.dvo.ru

Хорошо известно свойство перемежаемости спектра симметричной матрицы $\mathbf{D}_n$ и матрицы $\mathbf{D}_{n+1}$, полученной из $\mathbf{D}_n$ добавлением строки и столбца [1]. Необходимость исследования поведения неоднородных систем методом молекулярной динамики приводит к постановке задачи спектрального анализа моделей, содержащей трёхдиагональные матрицы, составленные из блоков.

Рассмотрим симметричную трёхдиагональную матрицу $\mathbf{D}_n$, элементы k -ой строки обозначим через a_k, c_k, b_k . Выделим в матрице $\mathbf{D}_n$ трёхдиагональную квадратную подматрицу $\mathbf{D}_{l,m}$ ($1 \leq l \leq m \leq n$) размерности $m-l+1$, для которой первой строкой является l -я строка матрицы $\mathbf{D}_n$, а последней — её m -я строка. Известное [2] рекуррентное соотношение для детерминантов трёхдиагональной матрицы для блоков можно записать в виде

$$D_{m+n} = D_{1,m}D_{m+1,m+n} - a_{m+1}b_mD_{1,m-1}D_{m+2,m+n}, \quad (D_{l+1,l} = 1).$$

Используя это соотношение, можно указать расположение корней полинома $D_{m+n}(\lambda)$, если известны корни полиномов $D_{1,m}(\lambda)$, $D_{1,m-1}(\lambda)$, $D_{m+1,m+n}(\lambda)$ и $D_{m+2,m+n}(\lambda)$. Справедливо следующее утверждение.

Пусть $N=m+n$ и $\lambda_m^{(k)}, \lambda_{m-1}^{(k)}, \lambda_n^{(k)}, \lambda_{n-1}^{(k)}$ — корни полиномов $D_{1,m}(\lambda)$, $D_{1,m-1}(\lambda)$, $D_{m+1,N}(\lambda)$ и $D_{m+2,N}(\lambda)$ соответственно, $\lambda_+^{(k)}$ — упорядоченное по возрастанию объединение корней $\lambda_{m-1}^{(k)}$ и $\lambda_n^{(k)}$, а $\lambda_-^{(k)}$ — упорядоченное по возрастанию объединение корней $\lambda_m^{(k)}$ и $\lambda_{n-1}^{(k)}$ ($k=1, \dots, N-1$).

Если полиномы $D_{1,m}$, $D_{m+2,N}$ и $D_{1,m-1}$, $D_{m+1,N}$ не имеют общих корней, то корни $D_N(\lambda)$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \lambda_N^{(1)} &< \min\{\lambda_-^{(1)}, \lambda_+^{(1)}\} < \dots \leq \max\{\lambda_-^{(k)}, \lambda_+^{(k)}\} < \lambda_N^{(k)} < \min\{\lambda_-^{(k+1)}, \lambda_+^{(k+1)}\} \leq \\ &\dots < \lambda_N^{(N-1)} < \min\{\lambda_-^{(N-1)}, \lambda_+^{(N-1)}\} \leq \max\{\lambda_-^{(N-1)}, \lambda_+^{(N-1)}\} < \lambda_N^{(N)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Если $\lambda_m^{(k)}$ является общим корнем полиномов $D_{1,m}$, $D_{m+2,N}$ или $\lambda_n^{(k)}$ общий корень полиномов $D_{1,m-1}$, $D_{m+1,N}$, то он является корнем полинома $D_N(\lambda)$, а для остальных корней выполнено неравенство (1), в котором значение N уменьшается на число общих корней.

В качестве примера рассматривается система из двух последовательно соединенных цепочек гармонических осцилляторов, имеющих разные массы и коэффициенты жесткости. С точки зрения механики такая модель представляет собой молекулярную модель стержня, составленного из двух разных материалов. Соответствующая трёхдиагональная матрица модели является якобиевой, т. е. диагонально подобна симметричной, и характеристическое уравнение имеет вид:

$$\left[U_n(\nu) - \left(\gamma \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) U_{n-1}(\nu) \right] U_m(\xi) - \gamma \frac{\beta}{\alpha} U_{n-1}(\nu) U_{m-1}(\xi) = 0,$$

где $U_n(x)$ — полином Чебышева второго рода, α, β — квадраты частот каждой из подсистем, γ — отношение масс частиц, $\nu = -1 - \lambda/(2\alpha)$ и $\xi = -1 - \lambda/(2\beta)$. Поскольку корни полиномов $U_{n-1}(\nu)$ и $U_m(\xi)$ известны, то легко найти систему границ корней $\lambda_+^{(k)}$:

$$\lambda_{n-1}^{(k)} = -4\alpha \cos^2 \frac{k\pi}{2n}, \quad k=1, \dots, n-1; \quad \lambda_m^{(k)} = -4\beta \cos^2 \frac{k\pi}{2(m+1)}, \quad k=1, \dots, m.$$

Для корней $\lambda_-^{(k)}$ получим, что $\lambda_{m-1}^{(k)} = -4\beta \cos^2 \frac{k\pi}{2m}$, $k=1, \dots, m-1$, а относительно корней $U_n(\nu) + \left(\gamma \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) U_{n-1}(\nu)$ известно, что они расположены в интервалах $-4\alpha \left(\cos^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \cos^2 \frac{(k+1)\pi}{2(n+1)} \right)$, $k=1, \dots, n$ и требуют численных расчетов. Отметим, что $\lambda_n^{(k)} = -4\alpha \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ в случае $\gamma\beta/\alpha=2$.

Оставшиеся два корня допускают аналитические оценки в зависимости от параметров.

Работа выполнена при поддержке ДВО РАН (проекты № 09-П-СУ-03-002, № 09-П-А-01-002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
2. Ильин В. П., Кузнецов В. И. Трёхдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985.

Применение графических ускорителей для решения задачи раскладки графа

Graph layout using graphic accelerators

Деменков П. С.¹, Иванисенко В. А.²

Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск, Россия;

¹demps@math.nsc.ru, ²salix@bionet.nsc.ru

Количество публикаций в области биологии, медицины и биотехнологии растет столь быстро, что имеющуюся информацию принципиально невозможно проанализировать для исследовательских и прикладных целей без автоматической обработки с использованием компьютерных средств. Нами была разработана информационная система Associative Network Discovery (AND) [1]. Система позволяет пользователю быстро получать и анализировать большие объемы данных в форме графически визуализированных сетей молекулярно-генетических взаимодействий и их ассоциаций с заболеваниями. Для визуализации в удобном для пользователя виде была разработана модель, позволяющая определять оптимальное расположение вершин графа. Модель использует принципы взаимодействия заряженных частиц и описывается системой уравнений, которые решаются методом простой релаксации. Графы, строящиеся в системе AND, являются двудольными. Все вершины в графе разделены на 2 множества — множество объектов V и множество взаимодействий I . Пусть все вершины в графе пронумерованы от 1 до N , I_V — множество индексов вершин из V , I_I — множество индексов вершин из I , а I_k — множество индексов вершин, инцидентных вершине с индексом k . Силы действующие между вершинами определены формулами:

$$F_q(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{K}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|^2} \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|}, \quad \text{где } K \geq 0,$$

$$F_p(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = P \left(\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\| + \frac{1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|} - 1 \right) \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|}, \quad \text{где } P \leq 0,$$

$$F_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{L}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|} \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|}, \quad \text{где } L \geq 0,$$

$$F_r(\vec{x}) = M \tan \left(\frac{\pi \|\vec{x}\|}{2R} \right) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \quad \text{где } M \leq 0.$$

Система уравнений, описывающая взаимодействие вершин графа, выглядит следующим образом:

$$F(X) = \begin{cases} \sum_{\substack{k \neq m \\ k \in I_V}} F_q(\vec{x}_k, \vec{x}_m) + \sum_{k \neq m} F_i(\vec{x}_k, \vec{x}_m) + \\ + \sum_{k \in I_m} F_p(\vec{x}_k, \vec{x}_m) + F_r(\vec{x}_m) = 0, & \forall m \in I_V \\ \sum_{k \neq m} F_i(\vec{x}_k, \vec{x}_m) + \sum_{k \in I_m} F_p(\vec{x}_k, \vec{x}_m) + \\ + F_r(\vec{x}_m) = 0. & \forall m \in I_I \end{cases}$$

Решение систем нелинейных уравнений методом релаксаций может быть ускорено, благодаря распараллеливанию алгоритма. В каждом потоке рассчитывается сила действующая на одну из вершин. Такая схема параллельных вычислений полностью соответствует идеологии расчётов, проводимых на видеоускорителях. Была сделана реализация многопоточных вычислений на CPU, а также на графических ускорителях, поддерживающих ShaderModel 3.0 или CUDA.

В таблице приведено время расчётов, требуемое для раскладки графа, состоящего из 10000 вершин.

Тип	Время, сек	Описание вычислительного модуля
1 CPU	7475,961	Intel Core 2 Duo 2,66 ГГц
2 CPU	3731,191	Intel Core 2 Duo E6750
GPU	78,484	Nvidia Geforce 8800GTS

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-335.2008.1) и СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 111).

ЛИТЕРАТУРА

1. Деменков П. С., Аман Е. Э., Иванисенко В. А. Associative network discovery (AND) — компьютерная система для автоматической реконструкции сетей ассоциативных знаний о молекулярно-генетических взаимодействиях // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 2. С. 15–19.

Исследование предельных переходов в моделях матричного синтеза линейных полимеров**A study of limiting transitions in models of matrix synthesis of linear polymers**

Демиденко Г. В.^{1,3}, Лихошвай В. А.^{2,3},
Фадеев С. И.^{1,3}, Штокало Д. Н.³

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия; demidenk@math.nsc.ru, fadeev@math.nsc.ru,

²Институт цитологии и генетики СО РАН,
Новосибирск, Россия; likho@bionet.nsc.ru

³Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия; shtokalod@ngs.ru

В работе рассматриваются математические результаты, полученные в области теории моделирования фундаментальных процессов синтеза ДНК, РНК и белков — основных типов биологических макромолекул, из которых состоят живые системы [1–4]. Исходя из матричности и биохимической природы элементарных стадий присоединения нуклеотидов или аминокислотных остатков к растущим полимерам молекул ДНК, РНК и белков, строятся модели, описывающие данные процессы в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений. Модели содержат цепочки сотен и тысяч структурно подобных уравнений. В зависимости от уровня детализации описания процессов элонгации размерность системы и ее правая часть может видоизменяться. Например, если уровень детализации ограничить стадией присоединения мономера к растущей цепи, то количество уравнений в модели примерно равно количеству мономеров в полимере. Если же стадию присоединения мономера рассматривать как сложную и разделить ее на несколько подстадий (например, стадию присоединения аминокислотного остатка к растущему полипептиду можно разделить на три подстадии: стадию размещения изоакцепторной аминоксил-тРНК в А-сайте рибосомы, стадии транспептидации и транслокации), то размерность модели возрастет примерно в три раза. Дробление можно продолжать и далее. При этом размерность соответствующих систем возрастает. В результате появляется ряд моделей, предназначенных для описания одного и того же процесса, но с разным уровнем детализации. Возникает вопрос об условиях подобия моделей друг другу. Сложность проблемы в

общем виде определяется также тем, что на определенном уровне детализации рассматриваемые подстадии становятся обратимыми, более того, само их количество становится неопределенным.

На основе указанных биологических предпосылок и численных экспериментов формулируются ряд теорем, которые устанавливают достаточные условия равномерной сходимости бесконечных рядов из решений кинетических уравнений, описывающих временную динамику синтеза полимеров, типа ДНК, РНК и белков, к решению уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = G(y(t - \tau)) - \theta y(t).$$

Тем самым предельные теоремы устанавливают ранее неизвестные взаимосвязи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающими аргументами, свидетельствующие о том, что системы уравнений с запаздывающими аргументами могут рассматриваться как предельный случай соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений при неограниченном увеличении размерности.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-04-01008), Программы РАН по молекулярной и клеточной биологии (проект № 10.7), Программ Президиума РАН (проект № 22.8) и СО РАН (проекты № 85, № 21.26 и междисциплинарные проекты № 26, № 107, № 119), Совета по грантам президента РФ (проект № НШ-2447.2008.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. Моделирование многостадийного синтеза вещества без ветвления уравнением с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
2. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
3. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А. О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 538–552.
4. Fadeev S. I., Likhoshvai V. A., Shtokalo D. N. Study of a model of linear biomolecular synthesis with reversible processes // J. Appl. Ind. Math. 2007. V. 1. P. 178–189.

**О роли времени релаксации в формировании
структуры ударных волн в нелинейной
максвелловской среде. Численный анализ**

**To the influence of relaxation time on the formation
of shock waves structure in nonlinear Maxwell
medium. Numerical analysis**

Демидов В. Н.

*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,
Томск, Россия; vn_demidov@mail.ru*

Рассматривается задача о распространении плоских ударных волн умеренной интенсивности в нелинейной вязкоупругой среде максвелловского типа [1]. Ударные волны инициируются внезапно приложенной нагрузкой, равномерно распределенной по границе однородного полупространства. Качественное поведение решения этой задачи известно: при выполнении определенных условий, исходный разрыв, распространяясь вглубь полупространства, расщепляется, и возникает двухволновая структура, состоящая из упругого предвестника и следующей за ним пластической волны. Упругий предвестник (на стационарной стадии движения) представляет собой скачок (разрыв) малой амплитуды, а пластическая волна может быть как разрывом, так и областью с непрерывным изменением функций, характеризующих движение среды.

Основным физическим параметром, определяющим длительность переходного процесса и стационарную структуру волнового решения, является время релаксации касательных напряжений (или максвелловская вязкость). При феноменологическом подходе функция, описывающая зависимость времени релаксации от внутренних параметров состояния среды, может быть выбрана различными способами. Основная цель данной работы состоит в исследовании вопроса о том, как влияет выбор той или иной зависимости для времени релаксации на структуру волн напряжений. При этом, как и в [1], предполагается, что время релаксации является изотропной (скалярной) функцией и не зависит от структурных свойств материала, которые могут меняться в процессе деформирования.

Задача решалась численно с использованием разностной схемы С. К. Годунова, которая была реализована в четырех различных вариантах: для упругой, вязкоупругой, упругопластической и гидродинамической моделей сред. Задача Римана (о распаде произвольного разрыва) решалась для гидродинамической модели в полной нелинейной постановке, для остальных трех моделей — в упрощенной линеаризованной постановке. Вопрос о корректной постановке и численной реализации граничных условий рассматривался в рамках “граничной задачи Римана”.

Подробно анализируются численные результаты при трех способах задания времени релаксации касательных напряжений:

- 1) время релаксации — константа, сохраняющая постоянное значение независимо от напряженно-деформированного состояния среды;
- 2) время релаксации — кусочно-постоянная функция, изменяющаяся скачком в зависимости от интенсивности касательных напряжений;
- 3) время релаксации — зависит от текущего напряженно-деформированного состояния, причем вид интерполяционной формулы определяется из анализа дислокационной кинетики пластического деформирования.

Независимо от формы задания времени релаксации в решении можно выделить (начальную) нестационарную и стационарную стадии в структуре волнового решения. На нестационарной стадии всегда наблюдается структура “упругий скачок — релаксационная зона”. В упругом скачке происходит одноосное сжатие среды; за упругим скачком, вследствие релаксации касательных напряжений, среда переходит к изотропному напряженно-деформированному состоянию. Амплитуда упругого скачка непрерывно уменьшается либо до нулевого значения (в случае 1), либо до величины упругого предела Гюгонио (в случаях 2, 3). Релаксационная зона с течением времени либо превращается в разрыв, либо остается областью непрерывного изменения параметров течения. В предельных ситуациях, когда время релаксации обращается в нуль, или в бесконечность, волна вырождается в чисто гидродинамический или чисто упругий скачок, скорость распространения которых зависит от интенсивности волны и определяется соответствующими соотношениями на разрывах. В иных ситуациях максвелловская среда ведет себя подобно упругопластической среде Прандтля — Рейса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М: Наука, 1978.

Расчет крупномасштабных электрических полей в атмосфере Земли

Calculation of the large scale electric fields in the Earth's atmosphere

Денисенко В. В., Помозов Е. В.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск,
Россия; denisen@icm.krasn.ru*

Основная часть электрического поля, наблюдаемого вблизи поверхности Земли, обусловлена разностью потенциалов между Землей и ионосферой. При моделировании крупномасштабного поля атмосфера рассматривается как проводник с заданным на основе экспериментальных данных пространственным распределением проводимости. Поверхность Земли считается идеальным проводником. На верхней границы атмосферы задается распределение потенциала, имеющееся в ионосфере.

Получающаяся трехмерная задача Дирихле для уравнения электропроводности решается численно. При численном решении задачи область разрезается на криволинейные подобласти, в каждой из которых узлы сетки нумеруются как в параллелепипеде. В ячейке сетки, имеющей восемь вершин, строятся вспомогательные узлы в центре каждой из шести граней и в центре ячейки, после чего ячейка естественным образом разбивается на 24 тетраэдра, и строятся кусочно-линейные аппроксимирующие функции. Уравнения для узловых значений потенциалов получаются как условия минимума функционала энергии. Уравнения такой вариационно-разностной схемы в частном случае прямоугольной сетки близки к уравнениям, получающимся при трилинейных аппроксимирующих функциях. Построенная система линейных алгебраических уравнений решается многосеточным методом. Симметрия и положительная определенность матриц для укрупненных сеток сохраняется за счет использования при построении правых частей и уравнений операторов, сопряженных к операторам интерполяции. Сохраняется также сопряженно-факторизованный вид матриц.

Хотя горизонтальные масштабы на два порядка превышают вертикальный размер атмосферы, расчеты приходится вести с шагами сетки,

примерно одинаковыми во всех трех направлениях. При сильно вытянутых ячейках сетки в используемой вариационно-разностной схеме появляются отрицательные коэффициенты, и как следствие, замедляется сходимость итераций, и для решения перестает быть справедливым принцип максимума. Такой недостаток есть и при использовании прямоугольных сеток и трилинейных аппроксимирующих функций. Если ограничиться моделью шарового слоя, предпочтительно использовать не вариационно-разностную схему, а классическую разностную схему в сферических координатах, которая свободна от указанного недостатка при произвольном соотношении шагов по радиусу и по сферическим углам. Тот факт, что атмосфера является тонким слоем, позволяет вести расчеты в сравнительно небольших областях, задавая на их дополнительных вертикальных границах приближенное распределение потенциала, вычисленное в рамках одномерной модели. Таким путем реализуется метод декомпозиции с наложением подобластей, причем дополнительные итерации не требуются.

Рассчитаны типичные пространственные распределения электрических полей и токов в атмосфере Земли. Используемый численный метод решения задачи электропроводности позволяет учесть неоднородности проводимости и рельеф поверхности Земли, однако в проведенных расчетах атмосфера рассматривалась как шаровой слой. Проводимость полагалась экспоненциально возрастающей с высотой. Рассмотрено также влияние существенного уменьшения проводимости в приземном слое. В ионосфере задавался постоянный электрического потенциал относительно Земли, а также распределения потенциала, характерные для спокойных геомагнитных условий и для суббурь.

При выбранной модели проводимости и равном 300 кВ потенциале ионосферы электрическое поле вблизи поверхности Земли вертикально и достигает 110 В/м. При разности значений потенциала 60 кВ в полярной шапке ионосферы в атмосфере получают возмущения электрического поля с вертикальной компонентой до 13 В/м, максимальные вблизи поверхности Земли.

При горизонтальных масштабах ионосферного поля более ста километров вертикальную компоненту электрического поля вблизи поверхности Земли можно вычислять в рамках одномерной модели. Распределения полей и токов в верхней атмосфере могут быть получены только из трехмерной модели.

Моделирование влияния условий нагружения на режимы распространения твердофазной химической реакции

Modelling of loading conditions influence on behavior of solid-phase chemical reaction propagation

Евстигнеев Н. К.¹, Князева А. Г.²

¹Томский государственный университет, Томск, Россия;
evstigneev.nk@rambler.ru

²Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,
Томск, Россия; anna@ms.tsc.ru

Реакции с участием твердых тел широко распространены в природе и технике. Они представляют чрезвычайную важность в химии и технологии многих материалов, в металлургии. Для их осуществления требуются особые условия, которые способствуют инициированию и ускорению превращений. Для поиска путей управления реакциями в твердой фазе анализируют различные обратные связи между различными физическими явлениями. Например, возникающие в твердых телах в ходе превращений механические напряжения могут влиять на скорость химических реакции как прямо, так и косвенно [1]. Это привело к появлению такого научного направления как синтез материалов в условиях нагружения.

В целом, в литературе имеются отдельные публикации, посвященные моделированию реакций в твердой фазе в условиях квазистатического нагружения [2, 3]. Но целенаправленного теоретического исследования влияния условий нагружения на режимы твердофазных превращений не проводилось.

В настоящей работе представлена связанная модель “термо-массо-вязкоупругости”, учитывающая взаимовлияние полей температуры, напряжений, деформаций и концентраций, меняющихся в ходе химической реакции. Выписаны основные уравнения баланса и определяющие соотношения. В качестве примера исследуется модель распространения твердофазного химического превращения в пластине в условиях растяжения в направлении, перпендикулярном фронту, в условиях сжатия и в условиях сдвига. В модели учтено, что механические напряжения могут влиять на скорость химической реакции по разным каналам.

В свою очередь, кроме внешней нагрузки, в системе возникают внутренние напряжения, которые также оказывают влияние на химическое превращение. Прикладная сторона таких задач заключается в изучении влияния эффекта связанности и величины внешней нагрузки на режимы превращения.

Полагая, что характер распределения температуры и концентраций в каждый момент времени известны, задачу о механическом равновесии нагружаемой пластины в некоторых простых случаях можем исследовать отдельно. Решение связывает компоненты тензоров напряжений и деформаций, отличные от нуля, с температурой, степенью превращения и величиной приложенной нагрузки.

Далее с помощью специально составленной программы и разработанного численного алгоритма проводится исследование системы уравнений баланса тепла и химической кинетики, в которых учтено решение задачи о механическом равновесии.

Результаты расчетов показали, что возникающие в ходе превращения напряжения и деформации играют существенную роль в динамике процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болдырев В. В., Чупахин А. П., Сидельников А. А. Влияние возникающих при твердофазных превращениях механических напряжений на их кинетику. I. Общий подход // Изв. СО АН СССР. Сер. хим. наук. 1985. Т. 17, вып. 6. С. 31–38.
2. Ковалев О. Б., Петров А. П., Фомин В. М. Горение смесового твердого топлива в условиях статических механических растягивающих напряжений // Физика горения и взрыва. 1993. № 4. С. 20–28.
3. Ковалев О. Б., Петров А. П., Фомин В. М. О влиянии напряженно-деформированного состояния на скорость горения гетерогенных конденсированных систем // Докл. АН. 1993. Т. 328, № 6. С. 709–712.

Об одной задаче аппроксимации динамических процессов

On one approximation problem of the dynamical processes

Егоршин А. О.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; egorshin@math.nsc.ru

1. Изучается следующая обратная задача математического моделирования [1]: кусочно-линейно-стационарная аппроксимация и идентификация [2] динамических (наблюдаемых, желаемых и т. д.) процессов на равномерной решётке в конечных интервалах (скользящих или последовательно сопрягаемых). В связи с этим рассматривается следующая вариационная задача аппроксимации финитной последовательности отсчётов $\mathbf{y} = \{y_i\}_0^{N+n} \in l_2[0, N+n]$ некоторой функции $\mathbf{y} \in H_2[0, T]$ решениями $\hat{\mathbf{y}} = \{\hat{y}_i\}_0^{N+n}$ обыкновенного, линейного, с постоянными коэффициентами (для простоты однородного и скалярного) разностного уравнения: минимизировать по $\alpha = \{\alpha_i\}_0^n$ и по $\hat{\mathbf{y}}$ величину

$$J = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_{l_2}^2, \quad \text{если} \quad p_\alpha(s)\hat{y}_k = \sum_{i=0}^n \hat{y}_{k+i}\alpha_i = 0, \quad \alpha_n \neq 0, \quad (*)$$

где s — оператор сдвига: $sy_k = y_{k+1}$, $k = 0, \dots, N$.

Отсюда следует, что таким образом решаются также задачи моделирования и идентификации обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ), а также их соответствующей дискретизации: ДУ → РУ.

Нетрудно видеть, что сформулированная вариационная задача есть задача проецирования исходной реализации $\mathbf{y}$ (отсчётов решения ДУ) на множество решений различных РУ с произвольными неизвестными коэффициентами α из некоторого допустимого их множества.

Автором предложен эффективный метод минимизации этого функционала [2, 3]. Он допускает учёт априорных линейных ограничений на коэффициенты РУ (принадлежность их некоторой гиперплоскости). Особенностью вычислительного метода является также то, что вычисления, связанные с прогонкой и проецированием осуществляются на основе уравнений встречных процессов ортогонализации [1, 3, 4].

2. Пусть $X = X_{N+n} = \{x_i\}_0^{N+n} = \{U^i x_0\}_0^{N+n}$ — однородная система векторов в H_2 с изометрическим оператором U , $\Pi_k = \Pi_k(X) =$

$\Pi_{0,k}(X) = I - P_k$ — ортопроектор на ортогональное дополнение $M = S(X) \ominus S(X_k)$. Пусть $\Pi_{-1} = \Pi_{k+1,k} = I$, $f_0 = \tilde{f}_0 = x_0$.

Положим: $f_{k+1} = \Pi_k x_{k+1}$, $\tilde{f}_{k+1} = \Pi_{1,k+1} x_0$, $k = -1, N-1$ — ортогонализирующие векторы $k+1$ -го шага двух встречных процессов ортогонализации Грама — Шмидта. Заметим: $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_k - f_{k+1} a_{k+1}(\cdot, f_{k+1})$, $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_{1,k+1} - \tilde{f}_{k+1} \tilde{a}_{k+1}(\cdot, \tilde{f}_{k+1})$, где $a_k = (f_k, f_k)^{-1}$, $\tilde{a}_k = (\tilde{f}_k, \tilde{f}_k)^{-1}$ и $a_0 = \tilde{a}_0 = (x_0, x_0)^{-1}$.

Теорема 1. Справедливы следующие уравнения рекуррентного вычисления векторов f_k , $\tilde{f}_k$, $k = \overline{0, N-1}$ и проекторов Π системы X :

$$f_{k+1} = U f_k - \tilde{f}_k \theta_{k+1}, \quad \tilde{f}_{k+1} = \tilde{f}_k - U f_k \theta_{k+1}$$

$$\text{где} \quad \theta_{k+1} = a_k \mu_{k+1}, \quad \tilde{\theta}_{k+1} = \tilde{a}_k \mu_{k+1}^*, \quad \mu_{k+1} = (f_k, U f_k),$$

$$\text{причём} \quad a_{k+1} = (I - \theta_{k+1} \tilde{\theta}_{k+1})^{-1} a_k, \quad \tilde{a}_{k+1} = (I - \tilde{\theta}_{k+1} \theta_{k+1})^{-1} \tilde{a}_k.$$

Теорема 2. Пусть $x_0 = p y_0 = \sum_0^n y_i \gamma_i = \sum_0^n U^i y_0 \gamma_i$. Тогда $X_N = p Y_N$, $M = S \ominus X_N$ и встречные процессы ортогонализации однородной (изометрической) системы X удовлетворяют уравнениям теоремы 1, а последовательность координат φ_i любого элемента φ из M (и только из M) удовлетворяет уравнению $\sum_0^n \varphi_{k+i} \gamma_i^* = 0$, $k = \overline{0, N}$.

3. Коэффициенты γ_i^* могут быть комплексными и $m \times l$ -матричными. Если $m > 1$, то РУ в теореме 2 есть система m уравнений. Если $l > m$, — она неоднородна. Тогда $\gamma_i^* = |\alpha_i^*, \beta_i^*|^*$, $\alpha \in (m \times m)$, $\det \alpha_n \neq 0$ (см. (*)), $\beta \in (m \times (l - m))$. Задача усложняется из-за некоммутативности этих матриц и требует специальных приёмов [2]. При итерациях по γ возможно использование линейных ограничений на этот вектор.

Если $m = 1$, т. е. α_i и β_i — скаляры, то $\tilde{\theta} = \theta^*$, $a = \tilde{a}$, — скаляры и $a_{k+1} = a_k / (1 - |\theta|^2)$. Дано и решение задачи дедискретизации: РУ $\rightarrow$ ДУ.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (проект №85).

ЛИТЕРАТУРА

1. Yegorshin A. O. On one projection problem in Hardy space // Int. Conf. honoring Acad. Sergei K. Godunov "Mathematics in Applications", Novosibirsk, Aug., 25–28, 1999. Abstracts. Novosibirsk: IM SB RAS. 1999. P. 159–161.
2. Егоршин А. О. Идентификация стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65, № 12. С. 29–48.
3. Егоршин А. О. Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих уравнений для последовательностей // Сиб. журн. индустр. математики. 2000. Т. III, № 2(6). С. 78–96.
4. Yegorshin A. O. Orthogonalization, factorization, and identification as to the theory of recursive equations in linear algebra // Sib. Electron. Math. Rep. 2007. V. 4. P. 482–503. <http://semr.math.nsc.ru/v4/p482-503.pdf>

Об одной разностной схеме подгонки для сингулярно возмущенной задачи

On a finite difference fitting scheme for singularly perturbed problem

Емельянов К. В.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
Россия; ekv@imm.uran.ru

В сообщении рассматривается задача

$$\varepsilon u'' + x^2 a(x) u' - b(x) u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (6)$$

где $x \in [0, 1]$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta > 0$. Предполагается, что функции $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ достаточно гладкие на отрезке $[0, 1]$. Решение задачи (1) обладает особенностью типа пограничного слоя экспоненциального вида порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ в окрестности точки $x = 0$.

Для приближенного решения задачи (1) предлагается разностная схема экспоненциальной подгонки на равномерной сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i : x_i = ih, i = \overline{0, N}\}$ с шагом $h = 1/N$. Схема имеет вид

$$\Lambda u^h \equiv \gamma_i \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} + a(x_i) x_i^2 \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{h} - b(x_i) u_i^h = f(x_i), \quad (7)$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad u_0^h = u_N^h = 0.$$

Выбор коэффициента

$$\gamma_i = \frac{B_i^2 h^2}{4 \operatorname{sh}^2(B_i h / 2\varepsilon)}, \quad B_i = \sqrt{b(x_i)},$$

как и в схемах из работ [1, 2], определяется экспоненциальным видом пограничного слоя, которым обладает решение u_ε задачи (1). Легко видеть, что при заданных предположениях относительно коэффициентов задачи (1), разностный оператор Λ обладает свойством монотонности. Используя это свойство оператора Λ , а также асимптотическое по ε приближение решения задачи (1) показано, что u^h при $h \rightarrow 0$ стремится к u_ε в точках сетки $\bar{\omega}_h$ равномерно относительно ε .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-00173-а и № 08-01-00260).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 2. С. 237–248.
2. Шишкин Г. И., Титов В. А. Разностная схема для дифференциального уравнения с двумя малыми параметрами при производных // Числ. методы механики сплош. среды. 1976. Т. 7, № 2. С. 145–155.

Возникновение конвекции в двухслойной системе с деформируемыми поверхностями раздела

Formation of convection in two-layer system with deformable interfaces

Ефимова М. В.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск,
Россия; efmavi@icm.krasn.ru*

Рассматривается система двух несмешивающихся несжимаемых теплопроводных смесей с общей поверхностью раздела $y = 0$, ограниченная твердой стенкой $y = -l$ и свободной поверхностью $y = l$. Считается, что сила тяжести отсутствует, на свободной поверхности влияние ПАВ не учитывается, на поверхностях раздела жидкость — жидкость и жидкость — воздух действует поверхностное натяжение, линейно зависящее от температуры и концентрации: $\sigma_0 - \alpha_1(\theta - \theta_0) - \alpha_2(c - c_0)$, где σ_0 , α_1 , α_2 известные постоянные. Найдено состояние термодиффузионного равновесия этой системы.

Для изучения устойчивости равновесного состояния двух слоев жидкостей при условии деформации свободной границы выписаны уравнения малых возмущений стационарных течений. Решение полученной задачи ищем в виде нормальных волн

$$(U, V, P, T, K, R, R_1) = (U(\eta), V(\eta), P(\eta), T(\eta), K(\eta), R, R_1) \exp(i\alpha\xi - iC\tau).$$

Получена спектральная задача относительно декремента C , которая решена численно методом ортогонализации С. К. Годунова, специально адаптированным для решения задач с граничными условиями на твердой стенке и двух поверхностях раздела жидкость-жидкость и жидкость-газ. Для устойчивости равновесия по отношению к малым возмущениям необходимо и достаточно, чтобы у всех собственных значений C мнимая часть C_i была отрицательной. Определены области длинноволновой устойчивости для некоторой системы бинарных смесей. Показано изменение области устойчивости при варьировании числа Вебера и числа Марангони на поверхности раздела жидкость-жидкость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00762) и СО РАН (интеграционный проект №116).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000.
2. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, вып. 3. С. 171–173.

Программа расчета газодинамики НЗТ НЗТ code for gas dynamics simulation

Жуков В. Т.¹, Феодоритова О. Б.²

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Москва, Россия; ¹zhukov@kiam.ru, ²feodor@kiam.ru*

В Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН работает многофункциональный программный комплекс НЗТ (в дальнейшем — программа) для решения нестационарных двумерных уравнений газовой динамики на подвижных криволинейных сетках [1]. Области приложения данной программы:

- аэродинамические расчеты обтекания летательных аппаратов;
- расчеты мишеней термоядерного синтеза в трехтемпературном приближении с учетом нейтронно-ядерных и термоядерных реакций;
- моделирование эволюции протопланетного диска в рамках осесимметричного течения газовой среды в гравитационном поле;
- моделирование явлений волнообразования и сварки взрывом при высокоскоростном соударении металлических пластин;
- изучение процессов взрывного компактирования порошков.

Исследования по двум последним из вышеупомянутых приложений проведены под руководством С. К. Годунова.

Первая версия двумерной программы появилась в конце 1950-х годов [2]. Инициатором создания программы, во многом определившим направления ее развития, является С. К. Годунов. Программа работала на различных компьютерных и языковых платформах, а сейчас функционирует на многопроцессорной системе и на персональных компьютерах. Первый параллельный код был создан в 1992 году для 100 - процессорной ЭВМ.

В программе реализована разностная схема для решения начально-краевых задач для системы нестационарных уравнений газовой динамики в переменных Эйлера. Схема предназначена для расчета плоских и осесимметричных течений и ее главными принципами являются выполнение интегральных законов сохранения, адаптируемость к особенностям течений, сохранение групповых свойств дифференциальной задачи, включая инвариантность схемы относительно группы вращений. Отметим, что неинвариантность схемы может приводить к заметному искажению физической картины. Примеры таких эффектов дают

задачи сжатия сферических термоядерных мишеней в условиях развития гидродинамической неустойчивости, а также задачи моделирования эволюции газопылевого протопланетного диска.

Для адаптации схемы к решению используются подвижные сетки, связанные с выделенными границами. Сетка строится на каждом шаге по времени либо интерполяцией, либо минимизацией вариационного функционала.

Существенными этапами в развитии программы были реализации однотемпературной модели среды (1980-ые годы), трехтемпературной модели (2000-ые годы). Недавние улучшения касаются алгоритмов расчета выделенных разрывов. Первоначально модификация относилась к расчету ударных волн и заключалась во введении контролируемой искусственной вязкости в формулы расчета движения фронта волны (предложение С. К. Годунова). Этот новый метод успешно прошел проверку на задаче обтекания сферы с отошедшей ударной волной, затем был применен для расчета контактных границ при обжатии цилиндрической мишени, где показал высокую эффективность (результаты Н. М. Гиззаткулова).

В докладе отражен вклад авторов в развитие программы НЗТ, который включает разработку методов решения уравнения теплопроводности [3]. Обсуждается также проблема построения блочно-структурных квазиизометрических сеток [4]. Приводятся примеры расчетов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-01-00144) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-4292.2008.1)

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении в областях сложной формы с подвижными границами (НЗТ). М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2008.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1, № 6. С. 1020–1050.
3. Жуков В. Т., Забродин А. В., Феодоритова О. Б. Метод решения нестационарных двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью в областях сложной формы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 8. С. 1240–1250.
4. Godunov S. K., Feodoritova O. B., Zhukov V. T. On one class of quasi-isometric grids // Advances in Grid Generation, Ed. by O. V. Ushakova. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2005. P. 53–68.

Двухсеточный метод решения эллиптического сингулярно возмущенного уравнения

Two-grid method for an elliptic singular perturbed equation

Задорин А. И.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева
СО РАН, Омск, Россия; zadorin@ofim.oscsbras.ru

Известно, что при решении краевых задач двухсеточным методом можно сэкономить в числе арифметических действий, так как часть вычислений осуществляется на редкой сетке. В данной работе такой подход исследуется в случае сингулярно возмущенного эллиптического уравнения. При использовании двухсеточного метода необходимо сеточное решение, найденное на редкой сетке, проинтерполировать в узлы исходной сетки. В случае функций с большими градиентами формулы, основанные на полиномиальной сплайн-интерполяции, могут привести к существенным погрешностям, поэтому сначала исследуем вопрос сплайн-интерполяции функций с погранслоистой составляющей.

Пусть функция $u(x, y)$ имеет представление:

$$u(x, y) = p(x, y) + \gamma\Phi(x) + \theta\Psi(y), \quad (x, y) \in \bar{D} = [0, 1]^2, \quad (1)$$

где $\Phi(x), \Psi(y)$ — известные быстро растущие функции, $p(x, y)$ — регулярная составляющая функции $u(x, y)$, имеет равномерно ограниченные первые производные по x и y . Постоянные γ, θ не заданы. Представление (1) характерно для решения двумерной задачи с пограничными слоями. Пусть Ω_h — равномерная сетка в области $\bar{D}$:

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j), 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, h_1 = x_i - x_{i-1}, h_2 = y_j - y_{j-1}\}.$$

Построим сплайн-интерполяционную формулу для функции $u(x, y)$, заданной в узлах сетки Ω_h , точную на составляющих $\Phi(x), \Psi(y)$. Выполняя условия интерполяции для каждой ячейки $J_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, построим интерполянт $u_{\phi,\psi}(x, y)$.

Лемма. Пусть функции $\Phi(x), \Psi(y)$ строго монотонны на каждом сеточном интервале. Тогда для каждой ячейки $J_{i,j}$

$$|u_{\phi,\psi}(x, y) - u(x, y)| \leq 2 \max |p'_x(s, r)|h_1 + 2 \max |p'_y(s, r)|h_2, \quad (s, r) \in J_{i,j}.$$

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a(x)u_x + b(y)u_y - c(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (2)$$

$$u(x, y) = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad \Gamma = \overline{D} \setminus D. \quad (3)$$

Предполагаем, что функции a, b, c, f достаточно гладкие, причём $a(x) \geq \alpha_1 > 0$, $b(y) \geq \alpha_2 > 0$, $c(x, y) \geq 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Известно, что при малых значениях ε решение задачи (2), (3) содержит пограничные слои у границ $x = 0$, $y = 0$ и представимо в виде (1) при задании $\Phi(x) = \exp(-a(0)\varepsilon^{-1}x)$, $\Psi(y) = \exp(-b(0)\varepsilon^{-1}y)$.

Для численного решения задачи (2), (3) по каждой переменной можно использовать известную разностную схему А.М. Ильина на сетке Ω_h . Пусть для краткости $h_1 = h_2 = h$. Запишем схему в операторном виде:

$$L^h u^h = f^h. \quad (4)$$

Тогда для некоторой постоянной C_1 , не зависящей от ε ,

$$\max_{i,j} \left| u_{i,j}^h - u(x_i, y_j) \right| \leq C_1 h. \quad (5)$$

Один из подходов к решению системы (4) — метод итераций, например, Зейделя или переменных направлений. Число итераций можно существенно сократить, если применить такую же разностную схему на грубой сетке Ω_H с шагом H . Выполняем итерации на сетке Ω_H до выполнения неравенства $\max_{i,j} |u_{i,j}^{(m+1)} - u_{i,j}^{(m)}| \leq \beta H$, $\beta \leq 1$ — выбранная постоянная. Далее, используя построенную сплайн-интерполяционную формулу, интерполируем найденное на грубой сетке решение в узлы исходной сетки Ω_h . На основании леммы 1 и оценки (5) заключаем, что в результате сплайн-интерполяции мы находим начальное приближение для решения задачи (4) с точностью $O(H)$. Далее осуществляем итерации на исходной сетке, чтобы найти решение задачи (4) с точностью $O(h)$. Отметим, что в [1] изложенный метод рассмотрен для случая обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00729).

ЛИТЕРАТУРА

1. Vulkov L. G., Zadorin A. I. Two-grid interpolation algorithms for difference schemes of exponential type for semilinear diffusion convection-dominated equations // Amer. Inst. Phys., Conf. Proc. 2008. V. 1067. P. 284–292.

О законах сохранения и термодинамике рабочего процесса высокотемпературных ГТД

On laws of conservation and thermodynamics of high-temperature gas turbine engine working process

Иванов М. Я.

*Центральный институт авиационного моторостроения
им. П. И. Баранова, Москва, Россия; ivanov@ciam.ru*

Начало изучению термодинамически согласованных законов сохранения механики сплошной среды было положено работами С. К. Годунова на рубеже 60-х гг. прошедшего столетия [1]. Сходная проблема согласованности законов сохранения газовой динамики и термодинамики теплового процесса остро встает при разработке современных высокотемпературных газотурбинных двигателей (ГТД). Практика их создания наглядно демонстрирует тот факт, что теоретически рассчитанные на этапе проектирования параметры узлов и в целом всего двигателя существенно отличаются от экспериментально регистрируемых своих значений на первых опытных образцах.

В настоящем докладе анализируются особенности согласования узлов горячей части двигателя в плане более аккуратного учета выполнения законов сохранения и термодинамики при подводе тепла к газовому потоку и при охлаждении горячих элементов двигателя. В первой части доклада кратко рассматривается важный вопрос о термодинамически согласованных законах сохранения без подвода тепла к газовому потоку и охлаждения, во второй его части тот же вопрос рассматривается при наличии интенсивного подвода тепла и охлаждения элементов горячей части двигателя.

Полная система законов сохранения газовой динамики, состоящая из законов сохранения массы, импульса и энергии, позволяет получать обобщенные решения, включающие наряду с классическими (гладкими) решениями также и соотношения на сильных разрывах. Для классических (без разрывов) решений автоматически удовлетворяется дополнительный закон сохранения — закон сохранения энтропии. При наличии разрывного решения энтропия возрастает и указанный дополнительный закон не выполняется. В этом случае происходит “рассея-

ние механической энергии” [2, 3] — часть кинетической энергии переходит в тепло. Наличие универсального интегрирующего множителя $1/T$ позволяет количественно рассчитать (в силу первого и второго начал термодинамики) приращение энтропии. Интересной и наглядной иллюстрацией подобного рассеяния механической энергии служит явление сонолюминесценции [4]. Тщательными исследованиями было продемонстрировано, что энергия сходящейся сферической ударной волны в газовом схлопывающемся пузырьке переходит в тепло и вызывает рассеивание энергии путем излучения (вспышка света в центре схлопывающегося пузырька). Без учета эффекта рассеяния механической энергии и ее излучения в виде вспышки света при рассмотрении схлопывающейся сферической ударной волны получаем решения с бесконечными значениями давления и температуры [5].

Во второй части доклада рассматривается вопрос термодинамически согласованных законов сохранения при наличии подвода тепла и охлаждения горячих частей двигателя. В докладе на конкретных примерах проектирования современных ГТД демонстрируется, каким образом следует согласовывать термодинамику теплового процесса с законами сохранения, описывающими движение рабочего тела по тракту двигателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Термодинамика газов и дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. 1959. Т. XIV, № 5(89). С. 97–116.
2. Томсон В. О проявляющейся в природе общей тенденции к рассеянию механической энергии // Второе начало термодинамики. М.-Л.: ГТТИ, 1934. С. 180–182.
3. Клаузиус Р. Механическая теория тепла // Второе начало термодинамики / Под ред. А. К. Тимирязева. Изд. 2-е. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. С. 73–157.
4. Маргулис М. А. Сонолюминесценция // Успехи физ. наук. 2000. Т. 170, № 3. С. 263–287
5. Крайко А. Н. Быстрое цилиндрически и сферически симметричное сильное сжатие идеального газа // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, № 5. С. 744–760.

О разрывных решениях уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере

On discontinuous solutions of shallow water equations on the rotating attractive sphere

Иванова А. В.¹, Остапенко В. В.¹, Черевко А. А.^{1,2},
Чупахин А. П.^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, Новосибирск,
Россия; ostapenko_vv@ngs.ru

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
chupakhin@hydro.nsc.ru

Гидродинамика атмосферы, вследствие наличия двух дополнительных факторов — вращения и притяжения — обнаруживает большую сложность и богатство эффектов по сравнению с классической. Взаимодействие этих двух сил удерживает сплошную среду на поверхности планеты в состоянии равновесия в целом. Вместе с тем на фоне этого равновесия происходят движения различных масштабов.

Модель мелкой воды, широко применяемая в физике атмосферы представляет собой гиперболическую систему дифференциальных уравнений. Эта система рассматривается на компактном многообразии — вращающейся притягивающей сфере. На важность изучения решений гиперболических уравнений на таких многообразиях обращал внимание Л. В. Овсянников (1976).

А. А. Черевко и А. П. Чупахин (2005) вывели уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере из задачи со свободной границей для уравнений Эйлера подобно “плоской” модели мелкой воды. Основными предположениями в этом выводе являются малость вертикального масштаба (глубины H) по сравнению с радиусом сферы r ($H \ll r$) и пренебрежение вертикальным перемещением среды. Последнее предположение эквивалентно рассмотрению в модели усредненной по глубине скорости, имеющей лишь касательную к сфере компоненту.

Данная система (подобно классической системе уравнений мелкой воды на плоскости) является гиперболической и поэтому допускает разрывные решения, для корректного описания которых, в соответствии

с общей теорией гиперболических систем, её необходимо сформулировать как полную систему законов сохранения с выпуклым расширением.

В работе уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере выводятся из интегральных законов сохранения массы и полного импульса, для которых закон сохранения полной энергии является выпуклым расширением. Он может быть использован для отбора устойчивых прерывных волн как таких разрывных решений, на которых в рамках теории мелкой воды происходит потеря энергии.

Выписаны условия Гюгонио на разрывах. Показано, что в классе простых стационарных волн реализуются, наряду с непрерывными, разрывные решения типа ударных волн, соответствующие повышению профиля глубины в виде ступеньки — бора. Приводится схема построения и примеры таких решений, соответствующие установившимся течениям на сфере со ступенчатым профилем глубины.

В рамках модели мелкой воды на вращающейся сфере решается задача о разрушении плотины. Движение жидкости определено в сферическом поясе, границами которого являются твердые стенки вдоль параллелей в северном и южном полушариях. Между этими границами также вдоль параллели расположена “плотина”, по разные стороны от которой жидкость имеет различную глубину.

Начальное состояние равновесия жидкости на вращающейся сфере задается формулой $h = h_0 + \frac{r_0}{8f_0} \sin^2 \theta$, где r_0 и f_0 связаны с числами Россби и Фруда, h — глубина жидкости, θ — дополнение до широты.

После разрушения плотины наблюдается образование волн, которые движутся до твердой границы сферического пояса, отражаются от нее и движутся в обратном направлении до противоположной стенки, и так далее. Одним из этапов этого процесса служит появление двух волн, движущихся в противоположные стороны и сталкивающихся в районе экватора. После этого они расходятся к границам пояса и затем вновь сталкиваются до тех пор пока не затухнут. Процесс заканчивается выполаживанием профиля глубины.

Эту задачу можно интерпретировать как последствия мгновенного таяния ледников на одном или на обоих полюсах планеты.

Для численных расчетов используется разностная схема первого порядка.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 2.1.1/3543), СО РАН (интеграционный проект № 40) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00047).

Бисингулярная начальная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Bisingular initial problem for the system of the ordinary differential equations

Ильин А. М.

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
iam@csu.ru

Доклад посвящён асимптотике решения начальной задачи

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dU}{dt} = f(t, U, V), \\ \frac{dV}{dt} = g(t, U, V), \\ U(0) = A, \quad V(0) = 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $U(t) = (U_1(t), U_2(t))$ двумерная вектор-функция. Функция $f(t, U, V)$ достаточно гладкая. При $t > 0$ существует решение предельной системы уравнения $U_0(t), V_0(t)$

$$\begin{cases} f(t, U_0(t), V_0(t)) \equiv 0, \\ \frac{dV_0}{dt} = g(t, U_0(t), V_0(t)), \\ V(0) = 0, \end{cases}$$

которое устойчиво.

Эта задача давно и достаточно хорошо изучена в том случае, когда условие устойчивости выполнено всюду при $t \geq 0$ [1]. Значительно сложнее обстоит дело в ситуации, когда условие устойчивости нарушается при $t = 0$. Именно этот случай рассматривается в докладе. Заметим, что даже для одного уравнения

$$\varepsilon \frac{dU}{dt} = f(t, U)$$

в предположении нарушения условия устойчивости при $t = 0$ асимптотика решения весьма непростая. Она давно исследована в [2, гл. II, § 3]. Для рассматриваемой здесь системы уравнений асимптотика значительно усложняется. В частности, даже вдали от начальной точки правильное асимптотическое разложение — это не ряд по степеням малого параметра ε .

В окрестности начальной точки асимптотика решения имеет довольно сложную структуру. Рассматриваются внешнее асимптотическое разложение решения и два пограничных разложения вблизи начальной точки, которые имеют разные масштабы. Только согласованием этих рядов можно получить правильный вид асимптотики внешнего разложения. Построено и обосновано равномерное асимптотическое приближение решения с точностью до любой степени малого параметра.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00260-а, № 09-01-00530-а) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-2215.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
2. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

**Метод A -ортогонализации Арнольди и
его применения**

**The Arnoldi A -orthogonalization method and
its applications**

Ильин В. П.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; ilin@sscc.ru*

Метод ортогонализации Арнольди является средством построения базисов подпространств Крылова при поиске собственных значений или решении системы линейных алгебраических уравнений с несимметричными разреженными матрицами высоких порядков. В данной работе для решения рассматриваемых задач предлагается построение итерационных процессов типа Арнольди на основе модифицированной A -ортогонализации Грама — Шмидта и использование принципа Галеркина. Исследуются вопросы корректности различных вариантов алгоритма, приемы повышения устойчивости на основе апостериорной информации, а также оценки вычислительной сложности. Рассматриваются предобусловленные версии итерационных методов, технологии их распараллеливания и повышения производительности программных реализаций на многопроцессорных вычислительных системах. Эффективность предложенных алгоритмов иллюстрируется результатами численных экспериментов на представительной серии методических задач.

**О возможностях метода коллокаций и
наименьших квадратов**

**On the collocations and least squares
method capabilities**

Исаев В. И.¹, Шапеев В. П.²

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
issaev.vadim@gmail.com

²Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;
shapeev@itam.nsc.ru

Метод коллокаций и наименьших квадратов (КНК) — это проекционный метод численного решения уравнений математической физики. В нём расчётная область покрывается сеткой, а решение в каждой её ячейке представляется в виде линейной комбинации базисных функций. Коэффициенты разложения решения по базису находятся из переопределённой системы линейных алгебраических уравнений (вспомогательной СЛАУ), состоящей из коллокаций уравнений исходной задачи, условий согласования и граничных условий. Применение переопределённых систем в методе КНК даёт зачастую вспомогательную СЛАУ, обусловленную лучше, чем при использовании метода коллокаций без наименьших квадратов. При этом в нём не применяются такие приемы, как внесение в уравнения исходной задачи искусственной вязкости, искусственной сжимаемости и другие.

В данной работе созданы новые варианты метода КНК для уравнений Навье — Стокса. Компоненты скорости и давления аппроксимируются в них полиномами второго порядка. Базисные функции выбирались таким образом, чтобы для них в каждой ячейке тождественно удовлетворялось уравнение неразрывности. Для демонстрации возможностей новых вариантов здесь используется задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой. Наличие большого количества результатов различных исследователей, опубликованных в виде таблиц, сделало её эталонным тестом для методов решения уравнений Навье — Стокса. Возможности метода расширились здесь за счет применения ортогональных алгоритмов линейной алгебры и выбора параметров метода (КНК), основанного на результатах исследования их влияния на обусловленность вспомогательной

СЛАУ и другие его свойства. Для ускорения сходимости итераций решения вспомогательной СЛАУ в данной работе применялся алгоритм, в котором в ходе итерационного процесса к текущему приближению добавлялась поправка из подпространства Крылова [1, 2]. Показано, что он является обобщением известного δ^2 -процесса Эйткена.

Реализованные здесь улучшения метода КНК позволили проводить расчеты на однопроцессорных ПЭВМ на сетках с числом ячеек до 1280×1280 включительно (число неизвестных метода на такой сетке $\sim 25 \cdot 10^6$). За счет исключения главных членов асимптотик особенностей решения в верхних углах области удалось добиться дополнительного существенного повышения точности расчета течения в каверне. Полученные здесь результаты для этой эталонной задачи совпадают с найденными высокоточными методами [3–5] с точностью выше, чем 10^{-6} при $Re=100$ и $Re=1000$. Применение мелких сеток позволило выявить подробные детали вихревой структуры течения. Так, например, в расчете течения при $Re=7500$ впервые обнаружен слабый угловой вихрь BR4 (согласно обозначениям, принятым в [6]).

Всё это свидетельствует о хороших возможностях метода КНК для численного моделирования течений вязкой жидкости и его использования для решения сложных прикладных задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-08-00249-а) и СО РАН (интеграционный проект № 26).

ЛИТЕРАТУРА

1. Слепцов А.Г. Об ускорении сходимости линейных итераций // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 3. С. 132–147.
2. Saad Y. Numerical methods for large eigenvalue problems. Manchester University Press, 1991.
3. Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // Comput. Fluids. 1998. V. 27, N 4. P. 421–433.
4. Гаранжа В.А., Коньшин В.Н. Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 8. С. 1378–1392.
5. Shapeev A., Lin P. An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flow // SIAM J. Sci. Comput. 2009. V. 31, N 3. P. 1874–1900.
6. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // J. Comput. Phys. 1982. N 48. P. 387–411.

**Обобщенная задача Коши для квазилинейной
системы и некоторые ее приложения в механике
сплошных сред**

**Generalized Cauchy problem and some its applications
in continuum mechanics**

Казаков А. Л.

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
Иркутск, Россия; kazakov@icc.ru*

Исследование начально-краевых задач для нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными является актуальной и содержательной задачей, как с точки зрения “чистой” математики, так и в связи с их содержательными приложениями (см., например, [1]).

Рассматривается начально-краевая задача специального вида для квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которую мы, следуя Н. А. Ледневу [2], называем обобщенной задачей Коши (ОЗК). Отличие ОЗК от задачи Коши в традиционной постановке состоит в том, что начальные (граничные) условия для разных функций ставятся не на одной, а на двух или более поверхностях. От смешанной задачи ОЗК отличается тем, что для каждой искомой функции ставится единственное условие. Ранее ОЗК с данными на двух поверхностях рассматривалась, в работах С. Л. Соболева [3, 4] и некоторых других авторов. Некоторые приложения ОЗК в механике сплошных сред (в газовой динамике) рассмотрены В. М. Тешуковым (см., например, [5]).

В данном исследовании для ОЗК с данными на двух и на трех поверхностях, в том числе с особенностями, доказаны новые, не попадающие под действие доказанных ранее [2–5], теоремы существования и единственности решения в классе аналитических функций. Некоторые из доказанных теорем применяются для построения течений идеального политропного газа с ударными волнами, в том числе вблизи оси (центра) симметрии, где система уравнений газовой динамики имеет особенность вида $1/r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М: Изд-во МГУ, 1966.

2. Леднев Н. А. Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. сб. 1948. Т. 22(64), вып. 2. С. 205–266.
3. Соболев С. Л. Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Мат. сб. 1931. Т. 38, вып. 1–2. С. 107–147.
4. Соболев С. Л. К вопросу об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 265–282.
5. Тешуков В. М. О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 2. С. 225–234.

Сингулярное разложение оператора продольного лучевого преобразования векторных полей в шаре

Singular value decomposition of the longitudinal x-ray transform of vector fields in the ball

Казанцев С. Г.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия; kasan@math.nsc.ru*

Обозначим единичный шар и единичную сферу в $\mathbb{R}^3$ через $\mathbb{B}^3$ и $\mathbb{S}^2$, соответственно. Пусть векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_1, a_2, a_3)^T$ есть вектор-функция, определенная в $\mathbb{B}^3$. Продольным лучевым преобразованием векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ называется функция $g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta})$, определенная на прямом произведении $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ по формуле (см. [1])

$$g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta}) = \int_{-2\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\theta}}^0 \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{a}(\boldsymbol{\xi} + p\boldsymbol{\theta}) dp,$$

где $\cdot$ обозначает скалярное произведение, а интегрирование ведется по прямой, которая проходит через некоторую точку сферы $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^2$ с направляющим вектором $\boldsymbol{\theta}$.

Данное преобразование будем рассматривать как линейный оператор

$$\mathcal{D} : \mathbf{a}(\mathbf{x}) \rightarrow g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta}),$$

действующий в гильбертовых пространствах $L_2(\mathbb{B}^3)$ и $L_2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$.

Задача векторной томографии состоит в построении обратного оператора $\mathcal{D}^{-1}$ (псевдообратного $\mathcal{D}^\dagger$), т. е. в определении (восстановлении) векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, если его продольное лучевое преобразование $g(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\theta})$ известно. Так как оператор $\mathcal{D}$ — компактный, то задача $\mathcal{D}\mathbf{a} = g$ относится к классу некорректных задач. Другая особенность оператора $\mathcal{D}$ состоит в том, что потенциальные векторные поля образуют ядро этого оператора. Поэтому по лучевому продольному преобразованию можно восстановить только соленоидальную часть векторного поля, см. [1].

Одним из естественных методов исследования задачи $\mathcal{D}\mathbf{a} = g$ с компактным линейным оператором является метод сингулярного разложения (SVD). В данной работе построено сингулярное разложение

для оператора $\mathcal{D}$ — продольного лучевого преобразования векторных полей, заданных в шаре. Для построения SVD-разложения были использованы базисные элементы $\{\mathbf{B}_{n+1-2k,l}^{(n)}, k = 0, 1, \dots, [n/2], |l| \leq n + 1 - 2k; \mathbf{C}_{n-2k',l'}^{(n)}, k' = 0, 1, \dots, [n - 1/2], |l'| \leq n - 2k'\}$ — ортогональные полиномиальные соленоидальные векторные поля в шаре, полученные в работе [2]. Вычисление оператора $\mathcal{D}$ на базисных элементах $\mathbf{B}_{n+1-2k,l}^{(n)}$ и $\mathbf{C}_{n-2k',l'}^{(n)}$ проводилось с использованием биполярных сферических гармоник, см [3]. Получены точные формулы для соответствующих сингулярных чисел $\{\sigma(\mathbf{B}_{n+1-2k,l}^{(n)}); \sigma(\mathbf{C}_{n-2k',l'}^{(n)})\}$, а также вычислена их асимптотика (скорость убывания при $n \rightarrow \infty$). Построенное сингулярное разложение оператора $\mathcal{D}$ позволяет получить псевдообратный оператор $\mathcal{D}^\dagger$ и метод регуляризации задачи $\mathcal{D}\mathbf{a} = g$, основанный на операторах ортогонального проектирования.

В работе [4] сингулярное разложение было получено для оператора лучевого преобразования скалярной функции. В работах [4, 5] предложены другие подходы к решению задачи векторной томографии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00207).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sharafutdinov V. A. Integral geometry of tensor fields. Utrecht: VSP, 1994.
2. Derevtsov E. Yu., Kazantsev S. G., Schuster Th. Polynomial bases for subspaces of vector fields in the unit ball. Method of ridge functions // J. Inv. Ill-Posed Probl. 2007. V. 15, N 1. P. 19–55.
3. Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
4. Maass P. The x-ray transform: singular value decomposition and resolution // Inv. Probl. 1987. N 3. P. 729–741.
5. Balandin A. L., Ono Y. The method of series expansion for 3-D vector tomography reconstruction // J. Comput. Phys. 2005. V. 202. P. 52–64.
6. Denisjuk A. Inversion of the x-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve // Inv. Probl. 2006. V. 22, N 2. P. 399–411.

**Параллельная реализация метода решеточного
уравнения Больцмана для задач гидродинамики**
**Parallel realization of a lattice Boltzmann method
for problems of hydrodynamics**

Каменщиков Л. П.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск, Россия; lk@icm.krasn.ru*

Метод решеточного уравнения Больцмана или Lattice Boltzmann Method (LB-метод) [1, 2] является сравнительно новым численным методом решения задач механики жидкости и газа для существенно дозвуковых (как правило) течений. Первые работы появились за рубежом 15–20 лет назад, и тех пор число ежегодных публикаций только нарастает. Популярности метода способствует ряд причин: (1) простой вид исходных дифференциальных уравнений: присутствуют производные только первого порядка, причем искомая функция входит в них линейно, а нелинейность имеется только в источнике алгебраического вида; (2) в силу “локальности” расчетов метод легко реализуется на параллельных ЭВМ; (3) LB-метод находит широкую сферу практических приложений: рассматриваются течения со сложной формой границ, в том числе, в пористых средах и микроструктурах, многокомпонентные и многофазные потоки, для течений типа мелкой воды, при изучении турбулентности, электрогидродинамики, течения при наличии теплообмена, химических реакций и др.

Если в традиционных численных методах решаются уравнения Навье-Стокса относительно скорости, плотности и т. п., то в LB-методе вводится ряд так называемых “заселенностей” $f_m \equiv f_m(\vec{r}, t)$, являющихся функциями распределения числа частиц, движущихся со скоростью $\vec{\xi}_m$. Решетка векторов $\{\vec{\xi}_m, m = 1, \dots, M\}$ предварительно фиксируется. В эту решетку обязательно включается и нулевой вектор. Считается, что частицы могут перелетать из одного узла пространственной сетки в соседний узел, а также сталкиваться между собой в узлах. Эволюцию заселенностей можно записать, например, в таком виде:

$$f_m(\vec{r} + \vec{\xi}_m \delta_t, t + \delta_t) = f_m(\vec{r}, t) + \frac{\delta_t}{\tau} (f_m^{(0)} - f_m), \quad m = 1, \dots, M,$$

где $\vec{r}$ — координата по пространству, δ_t — шаг по времени, τ — время релаксации (задано), $f_m^{(0)} = f_m^{(0)}(\rho(\vec{r}, t), \vec{u}(\vec{r}, t))$ — равновесная функция распределения. Плотность и скорость течения находятся суммированием по решетке: $\rho(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^M f_m(\vec{r}, t)$, $\rho \vec{u}(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^M \vec{\xi}_m f_m(\vec{r}, t)$.

Распараллеливание позволяет проводить расчеты на больших по количеству узлов сетках. В докладе приводятся ряд тестовых примеров. Так, для трехмерного течения вязкой несжимаемой жидкости в прямом канале квадратного сечения на сетке $8192 \times 256 \times 256$ и при использовании 1024 процессоров для выполнения тысячи шагов по времени потребовалось около 15-ти минут машинного времени. При этом каждый процессор обрабатывал свой небольшой параллелепипед вида $128 \times 64 \times 64$, периодически обмениваясь информацией с соседними процессорами. Решетка состояла из $M = 19$ векторов.

Отдельную самостоятельную задачу составляет обработка и визуализация результатов многопроцессорных расчетов на больших сетках. Для рисунков, касающихся всей области, приходится интерполировать данные с большой частой сетки на грубую. Либо же в большой сетке выделять маленький кусок, чтобы только в нем нарисовать “тонкую структуру” потока, крутые градиенты каких-то функций и т. п.

Для распараллеливания вычислений использовали язык Fortran-DVM, разработанный в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН [3]. Расчеты проводились на кластере МВС-100К (МСЦ РАН), у которого более 9 тысяч процессоров.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 08-01-00621), а также Программами фундаментальных исследований СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Succi S. The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond. New York: Oxford University Press, 2001.
2. Sukop M. C., Thorne D. T., Jr. Lattice Boltzmann modeling: an introduction for geoscientists and engineers. Berlin: Springer, 2007.
3. Коновалов Н. А., Крюков В. А., Михайлов С. Н., Погребцов А. А. Fortran-DVM — язык для разработки мобильных параллельных программ // Программирование. 1995. № 1. С. 49–54.

**Образующие левых идеалов кольца
дифференциальных операторов и преобразование
решений уравнений с частными производными**
**Left ideal generators of differentiation operator ring
and transformation of solutions of partial differential
equations**

Капцов О. В.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск,
Россия; profkap@mail.ru*

В данной работе рассматривается кольцо $F[\partial_1, \partial_2]$ линейных дифференциальных операторов с коэффициентами из некоторого поля F , порожденное двумя дифференцированиями ∂_1, ∂_2 и единицей поля F . Множество операторов, аннулирующих элементы $u^1, \dots, u^p \in F$, образует левый идеал $Ann(u^1, \dots, u^p)$. Доказано, что если два оператора L, M (порядков n и m соответственно) аннулируют $k = nm$ элементов $u^1, \dots, u^k$, то они являются образующими левого идеала $Ann(u^1, \dots, u^k)$. При этом дополнительно требуется, чтобы характеристические многочлены операторов L, M не имели общих множителей. Показано, что два оператора порядков n и m , характеристические многочлены которых не имеют общих множителей, не могут одновременно аннулировать более nm элементов поля F . Если задано уравнение второго порядка $Lu = 0$, имеющее $2n$ решений $u^1, \dots, u^{2n}$, то можно построить оператор M порядка n , аннулирующий те же элементы $u^1, \dots, u^{2n}$. При выполнении указанных выше условий оператор M переводит решения уравнения $Lu = 0$ в решения другого уравнения второго порядка.

Приведенная конструкция используется для построения решений гиперболических и параболических уравнений с переменными коэффициентами, описывающих линейные волны в неоднородной среде.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00489) и СО РАН (интеграционный проект № 103).

Исследование эффективности параллельных реализаций МКЭ для краевой задачи для уравнений мелкой воды

A study of efficiency of parallel realization of FEM for boundary problem of shallow water equations

Карепова Е. Д.¹, Шайдуров В. В.²

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия; ¹jane@icm.krasn.ru, ²shidurov@icm.krasn.ru

Модели мелкой воды хорошо описывают большой круг природных явлений, таких как крупномасштабные поверхностные волны, возникающие в морях и океанах, цунами, приливные течения, поверхностный и русловой сток, гравитационные колебания поверхности океанов [1, 2]. В работах [2–4] рассмотрено численное моделирование поверхностных волн в больших акваториях с учетом сферичности Земли и ускорения Кориолиса на основе уравнений мелкой воды. В [2] для дифференциальной постановки задачи выведены полезные априорные оценки, обеспечивающие устойчивость решения и однозначную разрешимость задачи. В [3, 4] для этой же задачи построен метод конечных элементов, для которого получены необходимые априорные оценки. Там же приведены результаты численных экспериментов на модельных сетках, для акваторий Охотского моря и Мирового океана.

В настоящей работе описано исследование эффективности параллельных реализаций алгоритма численного решения краевой задачи для уравнений мелкой воды, выполненных с помощью библиотеки MPI для языка Си. Первый подход основан на декомпозиции расчетной области без перекрытия подобластей, второй — на декомпозиции с теневыми гранями. Даны теоретические оценки ускорения параллельных алгоритмов.

Представлены результаты численных экспериментов на модельной сетке и неструктурированной сетке для акватории Охотского моря. Приведены сравнительные результаты ускорения вычислений в зависимости от количества процессов, способа реализации коммуникаций, способа декомпозиции вычислительной области.

Исследования проведены на высокопроизводительных системах двух архитектур — гетерогенного кластера МВС-100 собственной сборки Института вычислительного моделирования СО РАН и кластера

Томского государственного университета Cyberia семейства СКИФ. Показана зависимость эффективности распараллеливания от конфигурации вычислительной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00621-а) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-3431.2008.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Динамика океанских приливов. Л.: Гидрометиздат, 1983.
2. Agoshkov V. I. Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2005. V. 20, N 1. P. 1–18.
3. Kamenshchikov L. P., Karepova E. D., Shaidurov V. V. Simulation of surface waves in basins by the finite element method // Anal. Math. Model. 2006. V. 21, N 4. P. 305–320.
4. Kamenshchikov L. P., Karepova E. D., Shaidurov V. V. Numerical solution of the boundary problem for shallow water equations for modelling surface waves in world ocean by finite elements methods // Finite Difference Methods: Theory and Applications. Proc. of Fourth Int. Conf. FDM:T&A'06. Bulgaria: Rousse, 2007. P. 227–233.

Эффект волнообразования на поперечных перегородках при компактировании микропорошка скользящей детонационной волной

Effect of wave formation on the transverse partitions in the compaction micropowders by the sliding shock wave

Киселев С. П.¹, Киселев В. П.¹, Мали В. И.²

¹ *Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;
kiselev@itam.nsc.ru*

² *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; vmali@mail.ru*

В докладе представлены результаты эксперимента и математического моделирования процесса волнообразования на поперечных перегородках при компактировании металлического микропорошка скользящей детонационной волной. В работе [1] был обнаружен эффект волнообразования на поперечных перегородках из трансформаторной стали при динамическом компактировании металлических микропорошков. Отмечено, что если перегородки изготовлены из других материалов (медь, алюминий и другие марки сталей), то волнообразования не происходит. В работе [2] было проведено численное моделирование компактирования микропорошка скользящей детонационной волной с поперечной перегородкой. Было показано [2], что при наличии начальных возмущений в перегородке происходит потеря устойчивости при ее сжатии. При затекании пор в микропорошке происходит потеря прочности, поэтому начальные возмущения развиваются, что приводит к волнообразованию на перегородках.

В данной работе было проведено экспериментальное исследование микроструктуры материалов, использованных для изготовления перегородок. Показано, что размер структурного микрозерна в трансформаторной стали на один-два порядка превосходит размеры микрозерна в других материалах, упомянутых выше. Известно, что потеря устойчивости при заданной сжимающей нагрузке происходит, если длина волны начальных возмущений больше некоторого критического значения. Поэтому возникло предположение, что волнообразование в пере-

городках из трансформаторной стали связано с большой длиной волны начальных возмущений, пропорциональных размеру микрозерна. Для проверки этой гипотезы было проведено численное моделирование компактирования микропорошка с перегородкой, в которых возмущения создавались начальным неоднородным распределением дислокаций, моделирующим микрозерна.

Решение задачи разбивалась на два этапа. На первом этапе рассчитывались напряжения и деформации в перегородке, которые создавались неоднородным распределением дислокаций. Характерная длина волны в распределении дислокаций была порядка размера зерна в трансформаторной стали. На втором этапе рассчитывалось ударно-волновое нагружение микропорошка с перегородкой, в которой имелись микронапряжения и деформации, рассчитанные на первом этапе. Микропорошок моделировался в рамках модели пористого упругопластического тела, описанной в работе [2]. Расчеты показали, что в этом случае происходит развитие начальных возмущений, которое приводит к образованию волн на перегородке. Если длина волны в начальном распределении дислокаций уменьшалась в несколько раз, то волнообразование перегородки не происходило.

Таким образом показано, что причиной волнообразования перегородок из трансформаторной стали является наличие начальных возмущений с длиной волны порядка нескольких сот микрометров. В результате сжатия перегородки в ударной волне и потери прочности в окружающем микропорошке при его компактировании, происходит потеря устойчивости, рост возмущений и волнообразование в перегородке. После затекания пор прочность компакта восстанавливается и волнообразование в перегородке прекращается.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00108) и СО РАН (интеграционный проект № 40).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мали В. И., Калинин А. Н., Сергеев С. А. Исследование теплопроводности взрывных компактов медь-молибден // Физика горения и взрыва. 2003. Т. 39, № 1 С. 123–127.
2. Киселев С. П., Киселев В. П. Об эффекте волнообразования при ударно-волновом компактировании порошков // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 1. С. 119–130.

Термодинамически согласованные модели однофазной фильтрации

Thermodynamically coordinated models of single-phase filtration

Князева А. Г.

*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,
Томск, Россия; anna@ispms.tsc.ru*

Моделирование течений жидкостей и газов в пористых средах имеет многочисленные технические приложения и возможно как на основе осредненных моделей, так и с помощью моделей более сложных — двухтемпературных, неравновесных и др. Авторы большинства известных работ, в том числе, использующих для обоснования термодинамику, пренебрегают явлениями теплового и концентрационного расширения, химической и объемной вязкости. Существование названных явлений показывается в неравновесной термодинамике и может быть явно включено в модели фильтрации, если определяющие соотношения строятся на ее основе.

Так, в рамках термодинамики необратимых процессов имеются две группы определяющих соотношений: обобщенные неравновесные уравнения состояния, следующие непосредственно из уравнения Гиббса для изучаемой среды, и уравнения для обобщенных термодинамических потоков (потоков тепла, массы, скоростей химических реакций и вязкого давления и др.), следующих из условия неотрицательности производства энтропии и теории Онзагера (или ее обобщений на неравновесные условия).

Например, известно, что сжимаемость газов принципиальна по сравнению с несжимаемостью твердого каркаса, а сжимаемостью жидкостей можно пренебречь. Это имеет следствием два типа моделей однофазной фильтрации — модели фильтрации несжимаемой жидкости и модели фильтрации идеального газа, в рамках которых построены многочисленные аналитические решения. Известно также, что учет в этих моделях зависимостей проницаемости и вязкости от пористости и от давления приводит к моделям неидеальной фильтрации. Использование термодинамического уравнения состояния в дифференциальной форме позволяет явно включить в модель фильтрации коэффици-

ент сжимаемости. Построенная таким образом модель включает в себя классические модели.

В свою очередь, для слабо и сильно сжимаемых сред объемная вязкость проявляется по-разному. Имеются качественные различия в распределении скорости и давления и в том случае, если коэффициент объемной вязкости и коэффициент вязкости, входящий в закон Дарси (коэффициент трения), близки.

Явление концентрационного расширения есть следствие различия мольных объемов веществ, входящих в состав фильтрующейся смеси. Противоположный этому явлению эффект бародиффузии связан с появлением дополнительной движущей силы для компонентов смеси, вызванной наличием градиента давления и различной для разных компонентов. Этот эффект не тождественен явлению различной скорости фильтрации различных фаз (которые могут быть и многокомпонентными) и имеет иную физическую природу. В этом случае имеются два уравнения состояния — для давления (или удельного объема) и для химических потенциалов компонентов. Последние используются для построения явной формы уравнения диффузии. В результате модель фильтрации однофазной двухкомпонентной смеси оказывается существенно нелинейной и связанной и даже в самых простых случаях может быть проанализирована только численно (приемлемых аналитических решений пока не найдено). Объемная вязкость вносит дополнительные особенности.

В химии широко известно, что скорость реакции существенно зависит от подвижности среды. Тем не менее, не найдено ни одной работы, где бы это явление тщательно анализировалось. С другой стороны, в литературе имеются и указания на появление особенностей в течениях сред с химическими реакциями, которые называют “химической вязкостью”. Ни одной попытки измерить соответствующий коэффициент (явно присутствующий в термодинамических определяющих соотношениях) не обнаружено. Учитывая оба названных явления, приходим к моделям, ограничения на коэффициенты которых непосредственно следуют из термодинамической теории.

Следует отметить, что построенные таким способом модели не являются гиперболическими. Чаще всего это системы уравнений, тип которых зависит от области изменения физических параметров.

**Численное моделирование задач
аэрогидродинамики на основе метода расщепления**
**Numerical simulation of aerodynamical problems
based on splitting method**

Ковеня В. М., Базовкин А. В., Слюняев А. Ю.

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск,
Россия; kovenya@ict.nsc.ru*

Уравнения Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа и вязкой и несжимаемой жидкости являются базовыми при решении различных задач аэро и гидродинамики. Их решения могут содержать зоны больших градиентов и другие особенностей, такие как пограничные слои и висячие скачки, отрывные зоны и т. д., что накладывает жесткие требования на применяемые численные алгоритмы. Они должны обладать достаточной точностью, удовлетворять свойствам консервативности, экономичности и возможностью их адаптации на различные архитектуры ЭВМ. В докладе предлагается единый подход построения численных алгоритмов решения уравнений для сжимаемого газа и несжимаемой жидкости.

Для численного решения стационарных и нестационарных задач аэродинамики в приближении уравнений Эйлера и Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа построен класс разностных схем приближенной факторизации и схем типа предиктор-корректор, основанный на оптимальном расщеплении исходных операторов. Расщепление операторов выбирается таким образом, чтобы обеспечить устойчивость разностных схем, их скалярную разрешимость на дробных шагах и минимизировать влияние дополнительных членов, возникающих при введении расщепления. Дано обобщение предложенных алгоритмов на уравнения в преобразованных криволинейных координатах [1].

Для уравнений Навье — Стокса вязкой несжимаемой жидкости, не являющимися уравнениями типа Коши — Ковалевской, в переменных скорость-давление предложена специальная форма расщепления операторов, позволяющая в рамках единого подхода рассматривать различные классы экономичных разностных схем приближенной факторизации. На основе введенного расщепления решение задачи сводится к решению нестационарных уравнений движения и уравнения типа

Пуассона для невязки давления. Его решение может быть найдено или итерационным методом или методом установления. Предложенный алгоритм позволяет обеспечить тождественное удовлетворение разностного уравнения неразрывности. Исследованы свойства рассмотренных схем, получены оценки их устойчивости.

Предложенные алгоритмы апробированы на решении различных классов задач. В рамках уравнений Навье — Стокса сжимаемого газа численно исследовано течение около элементов летательного аппарата при его сверхзвуковом обтекании в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса. Исследованы регулярные и нерегулярные режимы течения, получены основные закономерности таких режимов. В приближении уравнений вязкой несжимаемой жидкости изучены отрывные течения за плоскими и осесимметричными телами при различных числах Рейнольдса, рассмотрено течения в расширяющихся каналах. В рамках приближения Буссинеска исследованы пространственные течения в кубе с подогревом одной из граней.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00264а) и СО РАН (интеграционные проекты №26, 103).

ЛИТЕРАТУРА

1. Базовкин А. В., Вавилова О. М., Ковеня В. М. Метод расщепления для численного решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. технологии. 2009. Т. 14, № 2. С. 13–31.
2. Ковеня В. М., Слюняев А. Ю. Алгоритмы расщепления при решении уравнений Навье — Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 4. (В печати).

О слабой сходимости разностных схем при сквозном расчёте разрывных решений

On weak convergence of shock capturing difference schemes

Ковыркина О. А.¹, Остапенко В. В.²

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; ¹olyana@ngs.ru, ²ostapenko_vv@ngs.ru*

Для гиперболических систем законов сохранения [1] рассмотрены явные двухслойные по времени консервативные разностные схемы повышенного порядка классической аппроксимации на гладких решениях. Путём численного эксперимента показано, что разностные схемы повышенного порядка классической аппроксимации, имеющие достаточно гладкие функции численных потоков (в отличие от своих TVD модификаций), сохраняют повышенный порядок слабой сходимости [2] при сквозном расчёте нестационарных ударных волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ 2260.2008.1), Президиума РАН (проект 16.7), СО РАН (интеграционные проекты № 23, № 40) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-00569, № 09-01-98001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. Годунов С. К. Воспоминания о разностных схемах. Новосибирск: Научная книга, 1997.

**О разрешимости нелокальных краевых задач
с общим граничным условием А. А. Самарского**
**On solvability of nonlocal boundary value problems
with the general boundary Samarsky condition**

Кожанов А. И.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; kozhanov@math.nsc.ru*

Доклад посвящен изложению результатов о разрешимости начально-краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности и одномерного волнового уравнения с общими нелокальными граничными условиями А. А. Самарского. Пусть $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$ — заданные при $t \in [0, T]$ гладкие функции такие, что векторы $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$ и $(\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t), \beta_4(t))$ линейно независимы при всех t . Предполагается, что граничные условия имеют следующий вид:

$$\alpha_1(t)u(0, t) + \alpha_2(t)u(1, t) + \alpha_3(t)u_x(0, t) + \alpha_4(t)u_x(1, t) = 0,$$

$$\beta_1(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(1, t) + \beta_3(t)u_x(0, t) + \beta_4(t)u_x(1, t) = 0.$$

Для рассматриваемых задач указываются условия их корректности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00422а) и программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)” (проект АХ-23/11 пр. от 12.12.2008).

Применение векторного потенциала в расчетах МГД-течений плазмы

Application of the vector potential in calculations of the MHD plasma flows

Козлов А. Н.

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Москва, Россия; ankoz@keldysh.ru*

Существуют различные подходы для обеспечения соленоидальности магнитного поля в расчетах МГД-задач. Один из перспективных методов [1] основан на использовании расширенной МГД-системы, дополненной законом сохранения $\operatorname{div} \mathbf{H}$. Возможно применение вектор потенциала — особенно при наличии азимутальной симметрии течения.

Численные модели процессов в квазистационарных плазменных ускорителях (КСПУ) [2] лежат в основе разработок новых систем, предназначенных для космических, термоядерных и технологических приложений. Работы последних лет [3–9] показали, что негативное воздействие эффекта Холла в коаксиальных плазменных ускорителях с азимутальным магнитным полем H_φ можно ослабить с помощью дополнительного продольного магнитного поля ($H_r \ll H_z \ll H_\varphi$).

В настоящее время разработаны основы теории КСПУ при наличии продольного поля [6] и выявлены фундаментальные свойства потоков плазмы в трехкомпонентном магнитном поле. Аналитическая модель двумерных осесимметричных стационарных течений идеально проводящей плазмы [3] дала первичное представление о процессах при наличии продольного поля и возникающего вращения. Первые численные модели вращающихся потоков плазмы [4, 5], использующие вектор потенциал магнитного поля, верифицированы с помощью аналитической модели. Одножидкостная МГД-модель [5] построена с учетом конечной проводимости среды, что обеспечивает корректную постановку задачи на границе плазма-проводник. Выявлена принципиальная возможность реализовывать трансзвуковые течения и управлять приэлектродными процессами с помощью слабого продольного поля. С ростом продольного поля доля энергии, связанная с вращением, увеличивается, и сильное продольное поле не представляет практического интереса. При этом наблюдается формирование токовых слоев в потоке плазмы. В двухжидкостной МГД-модели [4] учитывается эффект Холла и

тензор проводимости. Модификация этой модели и результаты исследований в режиме ионного токопереноса представлены в [8]. В исследованиях компрессионных потоков плазмы [7] обнаружена генерация сильного магнитного поля на конической ударной волне, формирующейся на выходе из ускорителя. На основе теоретических и численных исследований создана новая установка КСПУ с продольным полем [9].

Интерес к данному направлению исследований проявился в других работах. В частности, случай сильного продольного поля стал предметом отдельного изучения [10] в рамках одножидкостной МГД-модели идеально проводящей плазмы без учета соленоидальности поля.

Работы выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-02-16707) и Президиума РАН (программа № 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Университ. сер. Т. 4. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. Морозов А. И. Введение в плазмодинамику. 2-е изд. М.: Физматлит, 2008.
3. Козлов А. Н. Влияние продольного магнитного поля на эффект Холла в плазменном ускорителе // Изв. РАН. Мех. жидк. и газа. 2003. № 4. С. 165–175.
4. Kozlov A. N. Modeling of rotating flows in the plasma accelerator channel with longitudinal magnetic field // Probl. Atomic Sci. Technol., Ser. Plasma Phys. 2005. N 1. P. 104–106.
5. Козлов А. Н. Динамика вращающихся потоков в канале плазменного ускорителя с продольным магнитным полем // Физика плазмы. 2006. Т. 32, № 5. С. 413–422.
6. Kozlov A. N. Basis of the quasi-steady plasma accelerator theory in the presence of a longitudinal magnetic field // J. Plasma Phys. 2008. V. 74, N 2. P. 261–286.
7. Kozlov A. N. Generation of the magnetic field in the compressible plasma streams // Probl. Atomic Sci. Technol., Ser. Plasma Phys. 2008. N 6. P. 101–103.
8. Козлов А. Н. Двухжидкостная МГД модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем // Прикл. механика и техн. физика. 2009. Т. 50, № 3. (В печати).
9. Kozlov A. N., Drukarenko S. P., Klimov N. S., Moskacheva A. A., Podkovyrov V. L. The experimental research of the electric characteristics of discharge in the quasi-steady plasma accelerator with the longitudinal magnetic field // Probl. Atomic Sci. Technol., Ser. Plasma Phys. 2009. N 1. P. 92–94.
10. Брушлинский К. В., Жданова Н. С. МГД-течения в каналах плазменных ускорителей с продольным магнитным полем // Физика плазмы. 2008. Т. 34, № 12. С. 1120–1128.

Физические аспекты неустойчивости дозвуковых струйных течений

Physical aspects of subsonic jet flow instability

Козлов В. В., Грек Г. Р., Козлов Г. В., Литвиненко Ю. А.

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;
kozlov@itam.nsc.ru*

Обсуждаются результаты экспериментальных исследований по влиянию изменений начальных условий (распределений средней и пульсационной составляющих скорости) на срезе сопла на неустойчивость, структуру и характеристики развития круглой и плоской струи при малых числах Рейнольдса [1–4].

Термоанемометрические измерения и дымовая визуализация течений с использованием стробоскопической лазерной подсветки струи на частотах акустического воздействия на нее позволили получить новые данные о механизме развития струй, когерентных вихревых структурах, возникающих при этом, их взаимодействии и возможности влияния на протекающие процессы с помощью изменения начальных условий и акустического воздействия. Обсуждаются также определенные аспекты развития пристенной плоской струи, круглой струи, формируемой на выходе струи из криволинейного канала с наличием в нем вихрей Дина и плоской струи, формируемой на срезе сопла микроканала.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00027), Совета по грантам Президента РФ (проекты НШ-454.2008.1, МК-420.2008.1) и Министерством образования и науки РФ (проект № РНП. 2.1.2.541).

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвиненко М. В., Козлов В. В., Козлов Г. В., Грек Г. Р. Влияние продольных полосчатых структур на процесс турбулизации круглой струи // Прикл. механика и техн. физика. 2004. Т. 45, № 3, С. 50–60.
2. Козлов Г. В., Грек Г. Р., Сорокин А. М., Литвиненко Ю. А. Влияние начальных условий на срезе сопла на структуру круглой струи // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 1. С. 59–73.

- 3.. Грек Г.Р., Козлов В.В., Козлов Г.В., Литвиненко Ю.А. Моделирование неустойчивости ламинарной круглой струи с параболическим профилем скорости // Вестн. НГУ. Сер. Физика. 2009. Т. 4, вып. 1. С. 14–24.
- 4.. Козлов Г.В., Грек Г.Р., Сорокин А.М., Литвиненко Ю.А. Влияние начальных условий на срезе сопла на структуру течения и устойчивость плоской струи // Вестн. НГУ. Сер. Физика. 2008. Т. 3, вып. 3. С. 25–37.

**Математическое моделирование в задачах
молекулярной биологии: структуризация
макромолекул, генетический код, большие геномы**

**Mathematical simulation in molecular biology:
macromolecules structuring, genetic code,
large genomes**

Козлов Н. Н., Кугушев Е. И., Энеев Т. М.

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Москва, Россия; nnkoz@keldysh.ru*

Изучение методами математического моделирования процессов структурообразования биологических макромолекул, белков, рибонуклеиновых (РНК) и дезоксирибо-нуклеиновых (ДНК) кислот является в настоящее время интенсивно развивающейся областью молекулярной биологии. Фундаментальность проблемы структурообразования определяется тем, что основные процессы функционирования живой клетки определяются в первую очередь пространственной формой (структурой) этих макромолекул. Многолетний опыт математического моделирования сложных космологических систем (звездные системы, протопланетные облака) позволил организовать исследования процессов структурообразования макромолекул рибонуклеиновых кислот. Принципиально новым в нашем подходе является моделирование не только структурообразования как отдельного явления, но процесса рождения макромолекулы в целом. Это включает в себя и моделирование механизма возникновения и роста молекулярной цепи во взаимодействии с механизмами структурообразования. Усложнение модели позволяет получать более точное описание поведения молекулярного комплекса, но требует достаточно большого объема вычислений.

Нами была разработана специальная программа, позволяющая проводить исследования процессов образования вторичной структуры РНК на многопроцессорном комплексе. Распараллеливание процесса моделирования происходит на уровне расчета энергий возможных межструктурных переходов. Количество таких переходов для молекул длиной до 100 нуклеотидов имеет порядок нескольких тысяч. Для молекул до 500 нуклеотидов — несколько десятков тысяч. А для длины 1000–2000 — порядка сотен тысяч–миллиона. Это делает эффективным ис-

пользование многопроцессорного комплекса. Были исследованы процессы структурообразования для интересных классов молекул: РНК-транспортных (тРНК), рибосомальных (5S РНК), а также недавно открытых молекул-ферментов — рибонуклеаза Р-РНК. Длина этих молекул составляет 300–400 нуклеотидов. Это позволяет высказать гипотезу о том, что процесс транскрипции происходит прерывистым, скачкообразным образом. Причем на каждом скачке РНК полимеразы смещается на целое число витков ДНК — от 2-х до 6 витков [1].

На основе изучения генов были установлены новые свойства генетического кода и вычислены две группы важнейших его интегральных характеристик. Первая относится к характеристикам для областей ДНК, где гены попарно перекрываются; здесь были исследованы все 5 случаев перекрытий, разрешенных структурой ДНК. Вторая группа относится к наиболее протяженным областям ДНК, в которых нет генетических перекрытий. Установлена взаимосвязь интегральных характеристик в названных группах. С учетом проведенных исследований анализировался известный к настоящему времени набор, содержащий более 200 000 генов для 12 больших геномов, в том числе 25 613 генов человеческого генома. В результате были обнаружены ряд неизвестных ранее эффектов. Был также проведен сравнительный анализ всех генов из одной клетки, но записанных различными природными кодами. Удалось установить две функции, в которых участвуют все переосмысленные кодоны в митохондриальных генетических кодах (человека и других организмов), а также существенное различие в интегральных характеристиках таких кодов по сравнению со стандартным кодом [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация”, Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-00241, № 08-01-00042) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-1123.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов Н. Н., Кугушев Е. И., Энеев Т. М. Параллельные вычисления при решении некоторых задач астрофизики и молекулярной биологии // Мат. моделирование. 2000. Т. 12, № 7. С. 65–70.
2. Козлов Н. Н. Множества, порождаемые генетическим кодом // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 3. С. 295–299.

Емкость системы близких тел Capacity of a system of closely placed bodies

Колпаков А. Г.

*Сибирский государственный университет телекоммуникации и
информатики, Новосибирск, Россия;
Университет Кассино, Кассино, Италия; algk@ngs.ru*

Рассмотрим область $P = [-1, 1]^n \subset R^n$ ($n=2, 3$), содержащую систему непересекающихся выпуклых тел $\{D_i, i = 1, \dots, N\}$. В “перфорированной” области $Q = P \setminus \bigcup_{i=1}^N D_i$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 \quad \text{в } Q; \\ \varphi(\mathbf{x}) &= t_i \quad \text{на } D_i, \quad i = 1, \dots, N; \\ \int_{\partial D_i} \mathbf{v} n d\mathbf{x} &= 0, \quad i = 1, \dots, N; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{на } \partial Q_{lat}; \\ \varphi(\mathbf{x}) &= -1 \quad \text{на } \partial D^-, \quad \varphi(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{на } \partial D^+, \end{aligned} \tag{1}$$

где ∂D^- и ∂D^+ — верхняя и нижняя грани P , $\partial Q_{lat} = \partial P \setminus (\partial D^- \cup \partial D^+)$ — боковая поверхность P .

Неизвестными в (1) являются функция $\varphi(\mathbf{x})$ в области Q и числа t_i , $i = 1, \dots, N$ — потенциалы тел D_i , $i = 1, \dots, N$.

Вопрос ставится о вычислении емкости системы тел (или интеграла Дирихле, соответствующего задаче (1)). История задачи восходит к трудам Максвелла и Рэлея. В 1960–2000 гг. интенсивно изучалась асимптотика задачи (1) при условии, что тела являются цилиндрами или сферами, образуют периодический массив и характерное расстояние δ между телами мало (см., например, [1]).

При рассмотрении тел произвольной структуры и расположения выяснилось, что асимптотика емкости системы тел при $\delta \rightarrow 0$ определяется парными емкостями тел в R^n и выражается через решение конечномерной задачи вида

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} C_{ij}^{(2)}(t_i - t_j) = 0, \quad (2)$$

$$t_i = \pm 1, \quad i \in S^\pm,$$

в которую парные емкости $C_{ij}^{(2)}$ входят как коэффициенты [2–4].

В задаче (2) (называемой сетевой моделью или сетевой аппроксимацией для задачи (1)) $S^\pm$ — индексы тел, касающихся границ $\partial D^\pm$, N_i — индексы тел — соседей i -го тела (понятие соседа вводится через разбиение Вороного — Делоне).

В силу (2) асимптотика емкости системы тел при $\delta \rightarrow 0$ определяется только парными емкостями соседних тел.

Данное утверждение справедливо при выполнении условия

$$C_{ij}^{(2)} \rightarrow \infty \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

на роль которого, как необходимого и достаточного условия аппроксимации задачи (1) задачей (2), было указано в [2, 3].

Работа выполнена при поддержке European Community's Seventh Framework Programme (проект № PIF-GA-2008-219690).

ЛИТЕРАТУРА

1. Keller J. B. Conductivity of a medium containing a dense array of ideal conducting bodies or cylinders or nonconducting cylinders // J. Appl. Phys. 1963. V. 34, N 4. P. 991–993.
2. Колпаков А. А., Колпаков А. Г. Асимптотика проводящих свойств высококонтрастных сред // Прикл. механика и техн. физика. 2005. Т. 46, № 3. 128–140.
3. Колпаков А. А., Колпаков А. Г. Асимптотика емкости системы близких тел. Эффект экранирования И. Е. Тамма и сетевые модели // Докл. АН. 2007. Т. 415, № 2. 188–192.
4. Kolpakov A. A., Kolpakov A. G. Capacity and transport in contrast structures: Asymptotic analysis and applications. Boca Raton, FL, CRC, 2010. (To appear).

**Анализ ветровых течений в замкнутом водоеме
на основе новых аналитических решений
для уравнений вязкой несжимаемой жидкости**

**The analysis of the liquid wind induced motion
in the closed basin based on the new analytical
solutions of the viscous incompressible liquid equations**

Компаниец Л. А., Якубайлик Т. В., Питальская О. С.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск,
Россия; kla@icm.krasn.ru*

При расчете движения однородной жидкости в бассейне произвольной формы под действием ветра достаточно важным является вопрос о возможности применения упрощенных моделей, например, возможность применения двумерных моделей (когда движение происходит в вертикальной плоскости) вместо трехмерных. Считается, что если бассейн “мелкий”, то трехмерное течение для модели Экмана хорошо аппроксимируется двумерным в вертикальной плоскости [1, 2].

В данной работе проанализирована правомочность такого упрощения на основе новых аналитических решений для уравнений вязкой несжимаемой и модели Экмана, когда членами с горизонтальной вязкостью можно пренебречь. Доказывается, что при некоторых условиях во втором случае движение является плоско-параллельным, если ветер постоянен вдоль всей акватории водоема и параметр Кориолиса равен нулю.

На примере бассейна прямоугольной формы для этих двух моделей оценивается отличие решения в трехмерном случае от двумерного, если в решении учитываются и дрейфовая, и геострофическая составляющие, а не только дрейфовая, как это делалось ранее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочергин В. П. Теория и методы расчета океанических течений. М: Наука, 1978.
2. Филатов Н. Н. Динамика озер. Л.: Гидрометеиздат, 1983.

**Экономичные сеточные реализации динамических
задач линейной теории упругости**
**Efficient difference formulations for dynamical
problems of linear elasticity**

Коновалов А. Н.

*Институт вычислительной математики и математического
моделирования СО РАН, Новосибирск, Россия; kan@sscc.ru*

Рассматривается предложенная С. К. Годуновым постановка динамической задачи теории упругости в скоростях-напряжениях, для которой строятся экономичные сеточные реализации. Получены равномерные оценки устойчивости в энергетических нормах.

**Устойчивость и неоднозначное представление
ударноволнового разрыва в средах
с произвольными термодинамическими свойствами**
**Stability and ambiguous representation of shock wave
discontinuity in media with arbitrary
thermodynamic properties**

Конюхов А. В.¹, Лихачев А. П.¹, Фортов В. Е.¹,
Анисимов С. И.², Опарин А. М.³

¹Объединенный институт высоких температур РАН, Москва,
Россия; apl@ihed.ras.ru

²Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
Черноголовка, Россия; anisimov@itp.ac.ru

³Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

В работах [1, 2] и ряде последовавших за ними публикаций была развита линейная теория устойчивости плоской ударной волны (УВ). В рамках этой теории были получены условия неустойчивости и нейтральной устойчивости УВ в средах с произвольным уравнением состояния. Позже было обнаружено, что фрагменты ударной адиабаты (УА), на которых выполняются условия неустойчивости УВ, перекрываются участками с неоднозначным представлением УВ разрыва (см. обзор в [3]), в связи с чем, реализуемость неустойчивых УВ вызывает серьезные сомнения. Столь же проблематично и прогнозируемое линейной теорией спонтанное излучение звуковых волн фронтом УВ при выполнении условия нейтральной устойчивости. Кроме того, до сих пор отсутствует экспериментальное подтверждение существования УВ в неустойчивом или нейтрально устойчивом состоянии (по крайней мере, в предсказываемом в [1, 2] виде). Очевидно, что решение вопроса о фактическом поведении УВ при выполнении соответствующих условий выходит за рамки линейного анализа и требует проведения нелинейных исследований.

В данной работе этот вопрос исследуется численно. Расчеты проводились в постановках различной размерности, базирующихся на моделях невязкого (уравнения Эйлера) и вязкого теплопроводящего газа. Конвективные потоки через границы ячеек определялись на основе [4, 5]. При аппроксимации вязких членов использовались симмет-

ричные разности второго порядка точности. При проведении анализа применялись уравнения состояния реальных (дейтерий, газ Ван-дер-Ваальса, магний) и модельных сред.

Проведено детальное исследование эволюции нейтрально устойчивой УВ в различных средах. Во всех рассмотренных случаях излучение звука ударной волной являлось вынужденным, а спонтанная генерация акустических волн не наблюдалась. Показано, что амплитуда возмущений нейтрально устойчивой УВ, в отличие от предсказаний линейной теории, уменьшается со временем, хотя этот процесс происходит заметно медленнее, чем у абсолютно устойчивых УВ.

Параметрическое исследование поведения УВ в областях ее неоднозначного представления показало, что в рамках используемых моделей неустойчивая УВ всегда распадается с необратимым переходом в одну из допустимых волновых конфигураций. При выходе за пределы участка УА, на котором выполняется условие неустойчивости, но внутри области неоднозначности, УВ может как распадаться, так и остаться в исходном состоянии. В многомерных расчетах впервые обнаружено, что в области неоднозначного представления УВ разрыва, перекрывающей участок неустойчивости $L > 1 + 2M$ [1], вместо одной из полученных в одномерных решениях волновых конфигураций реализуются незатухающие пространственные колебания фронта УВ с образованием ячеистой структуры. Амплитуда колебаний локальных параметров УВ перекрывает участок УА, на котором выполняется указанное условие неустойчивости УВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн // Журн. эксперим. и теор. физики. 1954. Т. 27, № 3. С. 288–295.
2. Конторович В. М. К вопросу об устойчивости ударных волн // Журн. эксперим. и теор. физики. 1957. Т. 33, № 6. С. 1525–1526.
3. Кузнецов Н. М. Устойчивость ударных волн // Успехи физ. наук. 1989. Т. 159, № 3. С. 493–527.
4. Roe P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. V. 43, N 2. P. 357–372.
5. Glaister P. An approximate linearized Riemann solver for the Euler equations for real gases // J. Comput. Phys. 1988. V. 74, N 2. P. 382–408.

Автомодельные решения уравнений пограничного слоя: анализ и численное решение сингулярных нелинейных задач

Self-similar solutions to the boundary layer equations: analysis and numerical simulation of the singular nonlinear problems

Конюхова Н. Б.¹, Суков А. И.², Соловьев М. Б.³

¹Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия; nadja@ccas.ru

²Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, Москва, Россия; aisukov@online.ru

³Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия; aialex@ccas.ru

Дается краткое представление о содержании работ [1, 2], где результаты по сингулярным задачам Коши, гладким устойчивым многообразиям решений и экспоненциальным параметрическим рядам Ляпунова применяются к правильной математической постановке и анализу сингулярной “начально-краевой” задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, заданного на всей действительной оси. Задача возникает в механике вязкой несжимаемой жидкости и описывает автомодельные решения уравнения пограничного слоя для функции тока с нулевым градиентом давления (плоскопараллельное ламинарное течение в слое смещения). В [3, 4] эта задача, зависящая от параметра автомодельности m , приведена в виде:

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' - [(m-1)/m](\Phi')^2 = 0, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad (1)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi'(\tau) = 0, \quad (2)$$

$$\Phi(0) = 0, \quad (3)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi(\tau)/\tau^m = b, \quad 0 < b \text{ — фиксировано.} \quad (4)$$

При этом она неточно трактуется как трехточечная краевая задача, так как условие (2) не эквивалентно одному условию в конечной точке.

Условие (2) следует заменить более точным предельным условием

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \exp(-\varepsilon\tau)\{\Phi(\tau) + a, \Phi'(\tau), \Phi''(\tau)\} = \{0, 0, 0\} \quad \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < a, \quad (5)$$

отвечающим стремлению решения к стационарной точке $(-a, 0, 0)$, которая при каждом фиксированном $a > 0$ является в фазовом пространстве уравнения (1) псевдогиперболическим седлом с одномерной устойчивой сепаратрисой. Условие (5) для решений (1) эквивалентно двум нелинейным соотношениям в конечной точке, задающим устойчивую сепаратрису седла. Тем самым при $-\infty < \tau \leq 0$ определена двухточечная краевая задача (1), (5), (3) с параметром $a > 0$, который должен быть определен из условия (4) при фиксированном $b > 0$, если это возможно.

Подход [1, 2], отличный от достаточно сложных методов [3, 4], позволил не только уточнить математическую постановку сингулярной нелинейной задачи, но и дать ее более полный и строгий математический анализ, а также предложить простой численный метод ее решения. Формулируются ограничения на параметр m ($1/2 < m < \infty$), при которых решение задачи (1), (5), (3), (4) при каждом фиксированном $b > 0$ существует и единственно, где $a = a(b)$; даются двусторонние оценки решения и изучаются его свойства, а также свойства других (регулярных и сингулярных) решений уравнения (1) для разных значений параметра m ; приводятся результаты расчетов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00139).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Суков А. И. О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 7. С. 1158–1178.
2. Konyukhova N. B., Sukov A. I., Soloviev M. B. Singular nonlinear problems for self-similar solutions to the boundary layer equations with a zero pressure gradient // Int. Sci. J. Spectral Evol. Probl. 2009. V. 19. (Submitted).
3. Диесперов В. Н. Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смешения // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, № 3. С. 403–414.
4. Диесперов В. Н. Поведение автомодельных решений уравнения пограничного слоя с нулевым градиентом давления // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1986.

Моделирование самогравитирующего газового облака на СуперЭВМ

Supercomputer simulation of self-gravitating gas cloud

Куликов И. М.

*Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия; kulikov@ssd.sccc.ru*

Моделирование в астрофизике является основной методикой изучения нелинейных процессов эволюции космических структур и проверки теорий возникновения Вселенной. В первую очередь возникает необходимость введения газового компонента, связанного с темной материей через влияние сил гравитации. На современном этапе наиболее актуально численное моделирование нестационарной и пространственно-трехмерной динамики гравитирующего газа.

Трехмерность модели и нестационарность задачи выдвигают строгие требования к экономичности используемых методов решения, как в плане использования ресурсов вычислительной системы, так и в плане не критичного ограничения на отношение шага по времени и пространству. В последнее время бурное развитие вычислительной техники позволило производить ресурсоемкие расчеты и получать физически оправданные результаты для трехмерных программ. Использование суперкомпьютеров позволяет использовать большие объемы данных, на порядки повышать производительность вычислений, а как следствие, и точность [1].

Рассмотрена параллельная реализация численного сеточного метода FLIC для трёхмерного моделирования в декартовых координатах астрофизических объектов в газодинамическом приближении. Приведены основные характеристики параллельной реализации FLIC метода.

Модель основана на решении системы уравнений газовой динамики, дополненной уравнением для внутренней энергии и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. Звездный компонент моделируется центральным телом, дающим вклад в общее значение потенциала. Задача решалась на СуперЭВМ с учетом самосогласованного гравитационного поля, центрального тела сложной геометрии, охлаждения, в трехмерной постановке в декартовых координатах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00615) и СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 26, интеграционный проект № 103).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вшивков В. А., Лазарева Г. Г., Киреев С. Е., Куликов И. М. Параллельная реализация модели газовой компоненты самогравитирующего протопланетного диска на суперЭВМ // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 3. С. 38–52.

**Вынужденные околорезонансные колебания
слоя упругой среды**
Forced oscillations of elastic layer close to resonance

Куликовский А. Г.¹, Свешникова Е. И.²

¹*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва,
Россия; kulik@mi.ras.ru*

²*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, Россия; sveshn@meth.math.msu.su*

Рассматриваются плоские одномерные волны малой амплитуды, распространяющиеся поперек слоя несжимаемой упругой среды, отражаясь поочередно от его границ. Колебания вызваны малым периодическим (или близким к периодическому) внешним воздействием на одной из границ слоя, когда период внешнего воздействия близок к периоду собственных колебаний слоя. Одна из границ упругого слоя неподвижна, а другая совершает малое заданное двумерное движение в своей плоскости. В такой околорезонансной ситуации проявляются нелинейные эффекты, которые могут накапливаться с течением времени. Получена система уравнений, описывающая медленное изменение функций, которые характеризуют колебания среды, на каждом периоде внешнего воздействия. Считается, что все величины зависят как от реального времени, изменение которого при рассматриваемом подходе ограничивается одним периодом, так и от “медленного” времени, для которого малой величиной служит один период реального времени. Предполагается, что эволюция решения на периоде происходит при изменении медленного времени, а роль реального времени аналогична роли пространственной переменной. Упомянутая система уравнений от неизвестных функций содержит производные по реальному и медленному времени. В ее коэффициенты входят осредненные по периоду реального времени значения функций, характеризующих решение. Уравнения имеют гиперболический тип и их решения могут быть как непрерывными, так и содержать слабые и сильные разрывы.

Построена модель процесса в виде интегральных законов сохранения, определяющих изменение функций, описывающих колебания слоя, с ростом “медленного” времени, для которого бесконечно малой величиной служит один период реального времени. Из этих уравнений

для непрерывных движений следует упомянутая система гиперболических дифференциальных уравнений, а для разрывных решений из указанных законов сохранения получаются условия на разрыве. Установлена аналогия между разрывами в решениях осредненных уравнений и разрывами, распространяющимися по некоторой безграничной однородной упругой среде, упругий потенциал которой находится в результате осреднения. Эта аналогия помогает выделить разрывы, которые могут физически реализоваться. Обсуждается задача о стационарных колебаниях упругого слоя и возникновении разрывов при эволюции решений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00612, № 08-01-00401).

Численные процедуры решения геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела

The numerical solution of geometrically nonlinear problems of solid mechanics

Кургузов В. Д.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; kurguzov@hydro.nsc.ru*

На основе метода продолжения решения по параметру разработан алгоритм численного решения геометрически нелинейных задач деформирования стержневых конструкций (большие смещения и повороты) при жестком нагружении, т. е. когда внешнее воздействие характеризуется заданными смещениями узлов конструкции. Этот метод может быть использован для проверки правильности решения задач о квазистатическом деформировании стержневой конструкции при мягком нагружении, если вместо силового воздействия использовать контролируемое перемещение. Эффективность предложенных методик проиллюстрирована решением задачи о статическом деформировании плоской механической системы, состоящей из двух линейно-упругих стержней, испытывающих деформации растяжения-сжатия. Несмотря на то, что работа данного механизма представляется элементарной, математическая формулировка таковой не является. Система уравнений равновесия конструкции является нелинейной, и ее решение в данном случае необходимо строить с применением численных процедур. Предложенным методом найдено всё множество равновесных состояний системы, как устойчивых, так и неустойчивых, включая и все предельные точки. Достоверность решения данной задачи подтверждается совпадением результатов, полученных двумя различными способами силового воздействия на конструкцию (мягкое и жесткое нагружения), а также аналитическим анализом уравнений равновесия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00163), программы Президиума РАН № 11.16 и СО РАН (интеграционный проект № 115).

**О параметрическом резонансе при аэроупругих
колебаниях гидродинамических решеток
в неравномерном потоке**

**On a parametric resonance under aerolastic vibrations
of hydrodynamic lattices in nonuniform flow**

Курзин В. Б.¹, Рябченко В. П.¹, Юдин В. А.²

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; kurzin@hydro.nsc.ru*

²*Новосибирский государственный архитектурно-строительный
университет, Новосибирск, Россия*

При обтекании решеток турбомашин периодическим по времени неравномерным потоком возникают аэродинамические силы, возбуждающие вынужденные колебания лопастей. Коэффициенты этих сил имеют составляющие, периодически зависящие от времени. Поэтому в неравномерном потоке существует вероятность возникновения параметрического резонанса при колебаниях лопастей. Исследование же условий, при которых возможно возникновение этого явления, проведено недостаточно полно.

В данной работе рассмотрена задача об аэроупругих колебаниях осевых решеток лопастей, обусловленных окружной неравномерностью набегающего потока. Величина неравномерности скорости набегающего потока по отношению к её среднему значению предполагается малой. В окрестности решетки скорость течения жидкости представлена в виде суммы четырёх составляющих: 1) заданная скорость набегающего потока; 2) стационарная составляющая возмущения скорости решеткой; 3) нестационарная составляющая возмущения, обусловленного взаимодействием с неподвижными лопастями; 4) возмущённая составляющая, обусловленная колебаниями лопастей по заданному закону. В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости с помощью достаточно развитых методов теории решеток аэродинамическое взаимодействие решетки с потоком определяется в линейном приближении для каждой из этих составляющих по отдельности.

В результате построена система дифференциальных уравнений, описывающая колебания решеток лопастей, с учётом их аэродинамического взаимодействия в неравномерном потоке, коэффициенты которой зависят от времени. Нормы матрицы коэффициентов аэродинамических

сил с переменными коэффициентами в этой системе мала по отношению к норме матрицы, определяющей присоединённые массы жидкости и силы аэродинамического демпфирования. Поэтому был проведён анализ возможности возникновения параметрического резонанса. Было выдвинуто предположение о том, что это явление может иметь место в окрестности критической скорости классического флаттера, где аэродинамическое демпфирование достаточно мало. Проведённый расчёт подтвердил указанное предположение. Было установлено, что в этом случае следствием неравномерности набегающего потока может быть существенное снижение критической скорости флаттера решетки.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 40).

Численное решение трехмерных задач взаимодействия галактик

Numerical solution of 3D problems of galaxy interaction

Лазарева Г. Г.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; lazareva@sscc.ru*

Движение галактик в плотных скоплениях превращает столкновения между ними в важный эволюционный фактор, поскольку за хаббловское время рядовая галактика может испытать до десятка столкновений с другими галактиками своего скопления. Наблюдательное и теоретическое изучение взаимодействующих галактик — незаменимый метод исследования их свойств и эволюции. Результатом столкновения может быть разрушение этих галактик, их слияние, сохранение звездных компонент и разрушение газовых, сохранение звездных компонент при образовании новой галактики из их газовых компонент. Изучено столкновение газовых компонент галактик для демонстрации их поведения при различных условиях столкновения.

В докладе представлена новая численная модель столкновения галактик в газодинамическом приближении. Модель основана на решении системы уравнений газовой динамики, дополненной уравнением для внутренней энергии и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. Исходная система газодинамических уравнений решается методом крупных частиц с коррекцией баланса энергий. Задача решалась с учетом самосогласованного гравитационного поля, центрального тела сложной геометрии, с учетом температуры газа, в трехмерной постановке в декартовых координатах. Выполнено расширение разработанного алгоритма для моделирования различных сценариев столкновения галактик путем введения процессов охлаждения. Проведены исследования диапазона применимости численной модели для различных скоростей столкновения и соотношения масс газовой и звездной составляющих.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00615) и СО РАН (интеграционный проект № 103).

**Механика конвективного течения
слабонеоднородной жидкости**
**Mechanics of the convection flow of weakly
nonhomogeneous fluid**

Ларченко В. В.

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Россия; lar@aanet.ru*

Для анализа бифуркации решения и влияния на неё “флуктуаций”, обусловленных физической неоднородностью вязкой жидкости, сформулирована задача о её течении в $\Omega \subset R^3$. В предлагаемой постановке связанные уравнения Навье — Стокса и теплопроводности заменяются при $(x, y, z) \in \Omega$, $t \in (t_0, \infty)$ системой $4n + 1$, $1 \leq n < \infty$, уравнений относительно температуры T , давления $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и поля скорости $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$, $v^i = (v_x^i, v_y^i, v_z^i)$:

$$\begin{aligned} \rho_i [\partial_t v^i + \sum_{j=1}^n p_{ij} (v^j, \nabla) v^i] &= -\nabla p_i + \mu_i \Delta v^i + \nabla (\sigma_i \operatorname{div} v^i) + f_z^i, \\ \partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i v^i) &= 0, \quad i \in N, \quad N = \{1, 2, \dots, n\}, \\ \langle c \rangle \partial_t T + \sum_{j=1}^n c_j (v^j, \nabla) T + Q(x, y, z) &= \langle \chi \rangle \Delta T - T \sum_{j=1}^n c_j \operatorname{div} v^j, \\ c &= \rho \hat{c}, \quad f_z^i = -\rho_i |\bar{g}| \beta_i T e_z, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad p_{ij} \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь f_z^i — сила Архимеда, действующая на элемент $\rho_i d\Omega$ в направлении противоположному орту e_z ; $\langle c \rangle$, $\langle \chi \rangle$ — осреднённые в R^3 теплоёмкость и коэффициент теплопроводности; $\hat{c}$, ρ — удельная теплоёмкость и плотность жидкости в однородном приближении; $|\bar{g}|$ — ускорение свободного падения; μ_i , σ_i и β_i — локальные коэффициенты вязкости и объёмного расширения; p_{ij} — вероятность, с которой реализуется значение случайной величины $(v^j, \nabla) v^i$, Q — плотность источников тепла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Жидкость называется *локально слабонеоднородной*, если ρ , β , c могут принимать $n > 1$ значений, т. е. представимы в виде

$$\rho, \beta, c \in R^n, \quad \|\rho\|_{Ad} = \langle \rho \rangle, \quad \|c\|_{Ad} = \langle c \rangle,$$

$$\|\alpha\|_{Ad} = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|, \quad \forall \alpha \in R^n, \quad \alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

$$|\beta_i - \langle \beta \rangle| = o(1), \quad \rho_i = \text{const}_i, \quad c_i = \text{Const}_i \geq 0, \quad i \in N,$$

где $\langle \cdot \rangle$ — некоторое среднее для соответствующей величины, которое совпадает с её значением для однородного континуума.

Система (1) описывает движение слабонеоднородной жидкости. В отличие от постановки Навье — Стокса проекция скорости на каждую ось в R^3 имеет n компонент. Их можно доосреднить после интегрирования уравнений. Таким образом, построение модели включает лишь частичное осреднение искомых величин на малых элементах среды, вообще говоря, меньших, чем это допускает точка зрения Навье — Стокса.

Для стационарного течения локально-неоднородной несжимаемой жидкости реализована теория бифуркаций для вертикальной полосы с изотермическими стенками, нагретыми до температур $\pm\theta$. Исследованы рекуррентные свойства разложений Пуанкаре — Ляпунова [1]. Сформулированы условия рождения вторичного течения при $n \geq 1$ [2].

Для $n = 4$, $\lambda = 5.4$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.95$, $\beta_3 = \beta_4 = 1.05$ проведено интегрирование соответствующих краевых задач прогонкой в форме С. К. Годунова. Исследованы закономерности для отклонения $\Delta\theta^* = \min_k \{\theta_k\} - \min_k \{\tilde{\theta}_k\}$ при изменении вероятностей p_{ij} и теплоёмкости $c \in R^4$. Здесь $\theta_k, \tilde{\theta}_k$ — точки ветвления в однородном и неоднородном приближениях. Оказалось, что, например, на последовательности значений $c_1 = c_2 = 0.05 + 0.1(m - 1)$, $c_3 = c_4 = 0.45 - 0.1(m - 1)$, $m = \overline{1, 5}$, отклонение $\Delta\theta^*$ достигает нескольких десятков единиц. К принципиальным особенностям такого анализа относится то, что средние $\langle c \rangle$, $\langle \chi \rangle$, $\langle \rho \rangle$, $\langle \beta \rangle$ однозначно не определяют течение. При фиксированных $\mu_i \rho_i^{-1}$, $\sigma_i \rho_i^{-1}$ свойства решений зависят от вероятностей $\{p_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и коэффициентов $c_1, c_2, \dots, c_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00207-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларченко В. В. Алгоритмизация вычислений на симплектическом базисе // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 3. С. 411–422.
2. Абуев Ф. Л., Ларченко В. В. Бифуркационная неопределённость и её собственная граница // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 1. С. 33–46.

Оценка глобальной погрешности численного интегрирования на периодических решениях–утках

An estimation of the global error of numerical integration of the canard periodic orbits

Лашина Е. А.¹, Чумакова Н. А.¹, Чумаков Г. А.²

¹Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия; iea78@mail.ru

²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

В системах обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих быстро-медленные движения, переход от гармонических колебаний малой амплитуды к релаксационным колебаниям большой амплитуды может происходить при малом изменении параметра. При промежуточных значениях параметра в системе существуют периодические решения-утки, обладающие чрезвычайно высокой параметрической чувствительностью. Впервые решения-утки были обнаружены в уравнении Ван дер Поля и исследованы методами нестандартного анализа [1].

В данной работе рассматривается кинетическая модель гетерогенной каталитической реакции окисления водорода на никеле, описывающая изменение безразмерных концентраций адсорбированных водорода x и кислорода y , а также кислорода, растворенного в приповерхностном слое катализатора z [2]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_1(1 - x - y)^2 - k_{-1}x^2 - 2k_{30}e^{-\mu_3 y}x^2y, \\ \dot{y} &= k_2(1 - x - y)^2 - k_{40}e^{-\mu_4 y + \mu_5 z}y - k_{30}e^{-\mu_3 y}x^2y, \\ \dot{z} &= \varepsilon(y(1 - z) - \alpha z(1 - x - y)).\end{aligned}$$

Параметры $k_{\pm 1}$, k_2 , k_{30} , k_{40} , μ_3 , μ_4 , μ_5 и α положительны, $0 < \varepsilon \ll 1$ и переменная z является медленной.

Получено, что в случае, когда переменные x и y являются, соответственно, быстрой и умеренной, однопараметрическое семейство подсистем относительно переменных x и y с параметром z имеет семейства устойчивых и неустойчивых периодических решений-уток. На верхней границе этого семейства (при $z = z^{max}$) происходит бифуркация слияния неустойчивого и устойчивого предельного циклов в полуустойчивый.

Для анализа точности построения траекторий в работе используется метод оценки глобальной погрешности численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, который основан на подходе, предложенном академиком С. К. Годуновым, когда численное решение рассматривается как точное решение возмущенной задачи.

В качестве оценки глобальной погрешности дискретизации мы рассмотрели главный член $\mu v(t)$ ее асимптотического разложения по малому параметру μ , определяемому средней величиной шага сетки. При интегрировании системы на большом интервале времени показано, что вблизи устойчивых периодических решений максимальное и минимальное значения нормы $v(t)$ на интервале, равном периоду, имеют линейный рост с увеличением числа периодов. В окрестности неустойчивых периодических решений этот рост является степенным. Кроме того, при численном интегрировании на интервале времени, равном одному периоду, значения функции $v(t)$ существенно возрастают при приближении значений z к $z = z^{max}$.

Таким образом, при построении периодических решений, обладающих высокой параметрической чувствительностью к начальным данным, особенно если интегрирование проводится на интервале, равном нескольким периодам, точность приближенного решения может оказаться низкой. В этом случае оценка глобальной погрешности интегрирования на полученных решениях позволяет обосновать выбор достаточно мелкого шага интегрирования.

Работа выполнена при поддержке СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 107).

ЛИТЕРАТУРА

1. Звонкин А. К., Шубин. М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 2. С. 77–124.
2. Chumakov G. A., Chumakova N. A. Relaxaton oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards // Chem. Eng. J., Chem. React. Eng. 2003. V. 91. P. 151–158.

Алгоритм SVD-разложения и задача сжатия изображений

SVD algorithm and image compression

Лежнев В. Г.

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия;
svidlov@mail.ru

Для цифровых изображений некоторых классов, например, изображений фото-анфас, их сингулярные числа, расположенные по убыванию, характеризуются тем, что первые 10–20% составляют 95–98% эвклидовой нормы этих матриц-изображений. Если восстановить изображение только по этим сингулярным числам и соответствующим им столбцам и строкам ортогональных матриц SVD-разложения, то получится изображение почти не отличающееся от изображения-оригинала. При использовании 20% столбцов и строк получаем сжатие в 2.5 раза; чем больше разрешимость изображения и порядок матрицы, тем это сжатие больше. Использование этого подхода совместно с jpeg-технологией позволяет существенно увеличить коэффициент сжатия.

Однако традиционный алгоритм SVD-разложения является одним из самых затратных алгоритмов линейной алгебры по количеству вычислений и объему памяти [1]. Определенную компенсацию этих недостатков дает предлагаемый нами метод максимизации столбцов для решения частичной SVD-проблемы. В этом итерационном методе вычисляются сначала старшие сингулярные числа и соответствующие им столбцы и строки ортогональных матриц разложения. Зная эвклидову норму матрицы-изображения A_1 порядка n , можно решить, например, двадцатипроцентную частичную SVD-задачу, априорно гарантируя качество сжатия изображений данного класса.

Первый этап алгоритма состоит в формировании последовательности $A_{k+1} = A_k U_p(\varphi_p)$, $k = 1, 2, \dots$, где $p = p(k)$ изменяется циклически от 2 до n при $k \rightarrow \infty$, $U_p = (u_{ij})$ — ортогональная матрица с элементами $u_{11} = u_{pp} = \cos \varphi$, $-u_{1p} = u_{p1} = \sin \varphi$, а остальные диагональные элементы равны единице, внедиагональные — нулю [2, 3]. Обозначим a_k^m — k -ый столбец матрицы A_m ; $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и эвклидова норма соответственно.

Угол $\varphi = \varphi_p$ определяется правилом: если $(a_1^k, a_p^k) = 0$, то $\varphi_p = 0$; если $\|a_1\|^2 - \|a_p\|^2 = 0$, то $\varphi_p = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(a_1^k, a_p^k)$; если $\|a_1\|^2 - \|a_p\|^2 \neq 0$, то

φ_p определяется равенством

$$\operatorname{tg} 2\varphi_p = \frac{2(a_1^k, a_p^k)}{\|a_1\|^2 - \|a_p\|^2}.$$

Последовательность a_1^k монотонно не убывает, при этом $(a_1^{m+1}, a_p^{m+1}) = 0$. После стабилизации нормы первый столбец ортогонален остальным, его норма равна старшему сингулярному числу. Второй этап состоит в аналогичной процедуре со вторым столбцом полученной матрицы. Продолжая таким образом получим последовательно сингулярные числа и их векторы.

Численные эксперимент по решению полной SVD-задачи дает все точные (кроме последнего) десятичные знаки сингулярных чисел (на примерах из сборника [4]).

Работа выполнена при поддержке программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)” (проект № 2.1.1/3828).

ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
2. Лежнев В. Г. Метод решения алгебраической спектральной задачи // Численные методы анализа. М.: Изд-во МГУ, 1997. С. 16–22.
3. Лежнев В. Г. Метод максимизации столбцов матрицы // Фундамент. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 2. С. 113–119.
4. Фаддеева В. Н., Колотилина Л. Ю. Вычислительные методы линейной алгебры. Набор матриц для тестирования. Л.: ЛОМИ, 1982.

**Постановки задач и численные методы
для моделирования пространственных
нестационарных течений в гидротурбинах**

**Problem statements and numerical methods for 3D
simulation of unsteady flows in hydraulic turbines**

**Лобарева И. Ф.¹, Черный С. Г.¹, Чирков Д. В.¹,
Скоропелов В. А.², Турук П. А.², Банников Д. В.³**

¹*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск,
Россия; cher@ict.nsc.ru*

²*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия*

³*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

В работе предлагается усовершенствование инструментария вычислительного эксперимента в гидродинамике турбомашин [1], направленное на детальное изучение нестационарных процессов. К ним относятся процессы, связанные с переходом от одного режима работы к другому, формирование, эволюция и распад вихревых жгутов за рабочим колесом гидротурбины, взаимодействие ротора и статора и т. д. Изучение этих явлений актуально в связи с повышающимися требованиями к надежности и устойчивости работы проектируемых гидротурбин.

В [1] авторами предложен численный алгоритм, хорошо зарекомендовавший себя для расчета невязких и турбулентных стационарных течений. Он основан на методе искусственной сжимаемости и неявной схеме 3-го порядка аппроксимации по пространству и 2-го — по времени. Экономично реализованная неявная схема позволяет за приемлемое время находить стационарное решение методом установления. Однако в применении к нестационарным задачам предложенные в [1] подходы оказываются не столь эффективными.

В стационарных режимах работы расход жидкости не меняется и, как правило, известен. Поэтому для моделирования таких режимов широко применяется постановка краевых условий, состоящая в задании во входном сечении распределения вектора скорости, а в выходном — условия для давления. Однако в ряде стационарных и в большинстве нестационарных задач расход неизвестен и должен быть найден в ходе

решения задачи. Это относится, в частности, к задачам прогнозирования кавитационного срыва и моделирования переходных режимов работы. Для адекватного описания этих явлений в работе предлагается альтернативная постановка краевых условий, не требующая фиксации расхода и более полно соответствующая физической природе задачи. На входной границе задаётся усредненная по расходу полная энергия и направление потока. В выходном сечении также задается полная энергия и характер профиля давления. Величины полных энергий могут меняться во времени. Это важно, поскольку переходные процессы в гидротурбине характеризуются гидравлическим ударом, приводящим к изменению во времени полной энергии в любом сечении расчетной области. Таким образом, новая постановка краевых условий обеспечивает моделирование течений с переменным по времени расходом и распространяющимся по области гидравлическим ударом.

Особое внимание уделяется проблеме сокращения времени счета нестационарных задач. Время такого расчета определяется скоростью сходимости итераций на каждом временном шаге. На каждой итерации для нахождения очередного приближения приходится решать системы линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где разреженная матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{b}$ получаются в результате линеаризации неявной разностной схемы. В [1] для этой цели использовался метод приближенной LU-факторизации, дающий решение модифицированной системы $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Одно из направлений ускорения сходимости связано с повышением точности решения исходной нефакторизованной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. В связи с этим в работе для решения системы применены другие известные методы, такие как метод релаксаций Гаусса — Зейделя и обобщенный метод минимальных невязок GMRES. Проведен сравнительный анализ этих подходов на стационарных и нестационарных задачах гидродинамики турбомашин, сделаны рекомендации по их использованию.

Представлены результаты расчетов ряда нестационарных процессов, возникающих при работе гидротурбины. Среди них — прецессирующий вихревой жгут за рабочим колесом, ротор-статор взаимодействие в насос-турбине, течение в разгонном режиме работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00364).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный С.Г., Чирков Д.В., Лапин В.Н., Скороспелов В.А., Шаров С.В. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006.

Применение FPGA для решения задач биоинформатики и исследования генома

Application of FPGA for bioinformatics problems and genome study

Лысаков К. Ф.¹, Рудаков А. В.², Шадрин М. Ю.³

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН, Новосибирск,
Россия; ¹lysakov@sl.iae.nsk.su, ²rudakov@sl.iae.nsk.su,
³miksha@sl.iae.nsk.su*

В последние годы в молекулярной биологии происходит интенсивное накопление информации о первичных нуклеотидных последовательностях ДНК. Быстро растущее число секвенированных нуклеотидных последовательностей требует их эффективного анализа и аннотирования. При этом большое внимание исследователей привлекают промоторы и прочие регуляторные элементы, управляющие работой генов.

Регуляторные районы содержат в своем составе сайты связывания определенных транскрипционных факторов (ССТФ), встречаемость и расположение которых определяют особенности экспрессии генов. Обнаружение ССТФ затруднено большой длиной и разнообразием строения промоторных районов генов эукариот. Важным инструментом поиска ССТФ является интеллектуальный анализ (data mining) промоторных областей ДНК, основанный на изучении статистических особенностей организации нуклеотидных последовательностей. Так один из методов исследования организации промоторов — поиск неслучайных олигонуклеотидных слов.

Базовым элементом такого рода систем является поиск олигонуклеотидного мотива (сигнала) в изучаемой последовательности, что, по сути, является задачей поиска подстроки в строке. Однако следует заметить, что выполняющие схожую регуляторную функцию сигналы могут быть представлены слегка разными наборами нуклеотидов. Учитывая этот факт, удобно работать с вырожденными мотивами, т. е. с мотивами, в отдельных позициях которых могут стоять не чётко определённые нуклеотиды (А, Т, G или С), а любые нуклеотиды из некоторого конкретного набора (подмножества А, Т, G, С). Такие мотивы принято записывать в 15-ти символьном нуклеотидном коде IUPAC.

Из чего следует, что операция поиска производится над строкой, записанной в 4-х символьном алфавите, и подстрокой, записанной в 15-ти символьном алфавите, с известными правилами отображения.

На первый взгляд, описанная процедура поиска может быть реализована различными вычислительными средствами. Однако решение реальных статистических задач биоинформатики, вследствие большого числа операций поиска, является вычислительно сложным. Так на построение статистики для всех возможных 8-ми символьных мотивов ($15^8 \approx 2,6 \times 10^9$ различных мотивов) над выборкой из 1000 64-х символьных последовательностей требуется около 2-х недель расчётов на современном персональном компьютере и порядка 10 часов расчётов с использованием вычислительных мощностей графических ускорителей NVIDIA. Причина низкой эффективности решения этой задачи на базе универсальных процессоров не только в большом количестве актов исполнения процедуры поиска, но и в ограниченной пропускной способности подсистемы оперативной памяти.

Для ускорения решения обозначенной задачи разработана архитектура вычислительного конвейера, пригодная для реализации на базе FPGA (Field-Programmable Gate Array). Базовым элементом предложенной архитектуры является одноктактный компаратор, производящий сравнение символа последовательности в 4-х буквенном коде с символом мотива в 15-ти буквенном коде. Модуль из 8-и таких компараторов, выходы которых объединены логическим И, производит сравнение мотива с некоторой подстрокой последовательности. Массив из 57-и описанных модулей, смещённых друг относительно друга на один символ последовательности, анализирует последовательность полностью за 1 такт!

Учитывая, что архитектура FPGA позволяет хранить выборку из 1000 последовательностей целиком во внутренних RAM-блоках FPGA, а мотивы, ввиду их полного перебора, возможно генерировать средствами FPGA, снимаются ограничения производительности, порождаемые латентностью памяти. При этом ёмкости современных кристаллов FPGA фирмы Xilinx семейства Virtex5 достаточно для построения нескольких параллельных блоков поиска (от 10 до 200 в зависимости от конкретного представителя семейства). При рабочей частоте в 550 МГц время решения задачи сокращается до 1 минуты!

Высокая производительность достигается благодаря архитектуре FPGA, позволяющей широко распараллеливать и эффективно конвейеризовать пригодные для этого алгоритмы.

О неустойчивости гиперболических систем на плоскости с малым периодическим возмущением

On instability of hyperbolic systems on the plane with small periodic perturbation

Люлько Н. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; natlyl@mail.ru

В полуполосе $\Pi = \{(x, t): 0 < x < 1, t > 0\}$ рассматривается смешанная задача для строго гиперболической линейной системы первого порядка

$$U_t = AU + \varepsilon B(\omega t)U, \quad (x, t) \in \Pi, \quad U(x, 0) = U_0(x). \quad (1)$$

Здесь $U(x, t)$ — n -мерный вектор неизвестных функций, $B(\tau)$ — 2π -периодическая функция со значениями в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $L_2(0, 1)$, $\omega > 0$ — частота возмущения, $\varepsilon > 0$ — малый вещественный параметр. A — несамосопряженный замкнутый оператор, действующий в $L_2(0, 1)$ и порожденный дифференциальным выражением

$$AU = -K(x)\frac{dU}{dx} + A(x)U$$

с областью определения $D(A) = \{U \in W_2^1(0, 1) : I_0 U(0) + I_1 U(1) = 0\}$, где $A(x)$ — вещественная матрица, а у диагональной матрицы $K(x) \in C^1[0, 1]$ все элементы различны между собой, причем первые p из них положительны, а остальные $n - p$ отрицательны; $n = 2p$ и $n \geq 2$.

Граничные условия для системы (1) являются распадающимися, т. е. матрицы I_0 и I_1 имеют вид

$$I_0 = \begin{pmatrix} E_{p,p} & A_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & O_{n-p,n-p} \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} O_{p,p} & O_{p,n-p} \\ B_{n-p,p} & E_{n-p,n-p} \end{pmatrix},$$

где $A_{m,n} = (\alpha_{ij})$ и $B_{m,n} = (\beta_{ij})$ постоянные вещественные $m \times n$ матрицы, $O_{m,n}$ — нулевая $m \times n$ матрица, $E_{m,m}$ — единичная $m \times m$ матрица. В дальнейшем положим $\det(\alpha_{i,j})_{i,j=1,\dots,p} \neq 0$, $\det(\beta_{i,j})_{i,j=p+1,\dots,n} \neq 0$, что гарантирует обратимость задачи (1). Из результатов работ [1, 2] следует, что в этом случае система собственных функций оператора

$\mathcal{A}$ полна в $D(\mathcal{A})$. Предположим также, что между коэффициентами выражения A и граничных матриц I_0, I_1 выполнены соотношения

$$A(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial K(x)}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad (K(x)U, U) \Big|_0^1 = 0 \quad \text{— в силу граничных условий,}$$

обеспечивающие справедливость для любого решения $U(x, t)$ задачи (1) при $\varepsilon = 0$ равенства

$$\|U(x, t)\|_{L_2(0,1)} = \|U_0(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad t \geq 0,$$

которое означает, что при $\varepsilon = 0$ рассматриваемая задача (1) является устойчивой в $L_2(0, 1)$.

В настоящей работе обоснован метод нахождения критических частот ω , для которых в возмущенной задаче (1) при сколь угодно малых $\varepsilon \neq 0$ появляются неограниченные решения, т.е. возникает параметрический резонанс. С помощью замены $U = e^{At}V(t)$, где e^{At} — унитарная группа операторов класса C_0 в пространстве $L_2(0, 1)$, инфинитезимальным оператором которой является оператор $\mathcal{A}$, задача (1) сводится к задаче

$$V_t = \varepsilon G(t, \omega)V, \quad V(x, 0) = U_0(x) \quad (2)$$

с ограниченным в $L_2(0, 1)$ оператором $G(t, \omega)$. Затем используется метод усреднения, рассмотренный в [3] для задач вида (2) в банаховом пространстве.

Метод нахождения критических частот для задачи (1) проиллюстрирован на системе из двух уравнений, т. е. $U = (u, v)^T$,

$$AU = \left(-\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right)^T, \quad D(\mathcal{A}) = \{U \in W_2^1(0, 1) : u(i) = v(i), i = 0, 1\},$$

в случае различных операторных возмущений $B(\tau)$.

Работа поддержана проектом АВИП Рособразования № 2.1.1.4918.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брушлинский К. В. О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 893–912.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1970.

**Плотностные течения и интрузии
в стратифицированной жидкости: теория и
эксперимент**

**Density currents and intrusions in stratified fluids.
Theory and experiment**

Ляпидевский В. Ю., Гаврилов Н. В.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия liapid@hydro.nsc.ru*

Интрузии, распространяющиеся в стратифицированной по плотности жидкости в виде уединенных волн являются объектом интенсивного изучения экспериментальными и теоретическими методами [1–3] в связи с многочисленными приложениями как к течениям в атмосфере и океане, так и индустриальным течениям различного масштаба. Эти волны легко воспроизводятся в лабораторных и натурных условиях и обладают уникальной способностью переносить массу вдоль высоко-градиентных прослоек. В работе проведено теоретическое и экспериментальное исследование нелинейных внутренних волн 2-ой моды на тонкой границе раздела между однородными слоями смешивающихся жидкостей различной плотности. Предложена математическая модель, описывающая генерацию, взаимодействие и затухание уединенных внутренних волн, возникающих при интрузии жидкости промежуточной плотности в прослойку. Построено точное решение, задающее форму симметричных относительно невозмущенной границы раздела уединенных волн и обоснован предельный переход для волн конечной амплитуды при стремлении толщины прослойки к нулю. Экспериментально исследована тонкая структура течения в окрестности уединенной волны и ее влияние на горизонтальный перенос массы при распространении коротких интрузий. Показано, что учет трения на границах раздела в математической модели позволяет адекватно описать изменение фазовых и амплитудных характеристик двух движущихся навстречу друг другу уединенных волн до и после их взаимодействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00427) и программы № 17 Президиума РАН (проект 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maxworthy T.* On the formation of nonlinear internal waves from the gravitational collapse of mixing regions in two and three dimensions // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 96. P. 47–64.
2. *Honji H., Matsunaga N., Sugihara Y., Sakai K.* Experimental observation of internal symmetric solitary waves in a two-layer fluid // *Fluid Dyn. Res.* 1995. V. 15. P. 89–102.
3. *Stamp A.P., Jacka M.* Deep-water internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 305. P. 347–371.
4. *Ахметов Д. Г.* Вихревые кольца. Новосибирск: Изд-во “Гео”, 2007.

Новый вариант блочной циклической редукции

A new variant of the block cyclic reduction

Малышев А. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; malyshev@math.nsc.ru

Метод блочной циклической редукции (BCR) [1, 2] предназначен для быстрого решения системы линейных уравнений $Tx = f$ с блочной трехдиагональной теплицевой матрицей

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 & & & & \\ T_{-1} & T_0 & T_1 & & & \\ & T_{-1} & T_0 & T_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & T_1 \\ & & & & T_{-1} & T_0 \end{pmatrix}.$$

Существующие варианты BCR рекурсивно сводят систему $Tx = f$ к вдвое меньшей системе $T^{(1)}x^{(1)} = f^{(1)}$ с блочной трехдиагональной теплицевой (или квазитеплицевой) матрицей $T^{(1)}$. Эти варианты устойчивы к ошибкам округления только для очень специальных матриц T .

В докладе представлен совершенно новый вариант BCR, основанный на представлении матрицы T в виде блочной двухдиагональной квазитеплицевой матрицы

$$T = \begin{pmatrix} B_L & & & & \\ A & B & & & \\ & A & B & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A & B \\ & & & & B_R \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $B_L = [T_0 \ T_1]$, $B_R = [T_{-1} \ T_0]$,

$$A = \begin{pmatrix} T_{-1} & T_0 \\ & T_{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} T_1 & \\ T_0 & T_1 \end{pmatrix}.$$

Разобьем векторы x и f на блоки, отвечающие структуре (1):

$$x = (x_0^T, x_1^T, \dots, x_{2^p}^T)^T, \quad f = (f_L^T, f_1^T, \dots, f_{2^p}^T, f_R^T)^T.$$

Покажем как исключить блоки x_{2i-1} с нечетными номерами $2i - 1$, то есть редуцировать систему $Tx = f$ к вдвое меньшей системе относительно компонент x_{2i} с четными номерами $2i$. Для этого рассмотрим одновременно $2^p/2$ подсистем из смежных блочных строк:

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 \\ 0 & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2i-2} \\ x_{2i-1} \\ x_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{2i-1} \\ f_{2i} \end{pmatrix}.$$

Подберем ортогональную матрицу Q , так чтобы $Q \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, где R - верхняя треугольная матрица. Тогда

$$Q \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ 0 & A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & R & D \\ A_1 & 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad Q \begin{pmatrix} f_{2i-1} \\ f_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i^{(1)} \\ f_i^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Тем самым, каждая из $2^p/2$ подсистем редуцируется в подсистему

$$[A_1 \ B_1] \begin{pmatrix} x_{2i-2} \\ x_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \end{pmatrix},$$

а

$$x_{2i-1} = R^{-1} [g_i^{(1)} - Cx_{2i-2} - Dx_{2i}].$$

Рекурсивное применение такой ортогональной редукции p раз дает невырожденную систему

$$\begin{pmatrix} B_L & 0 \\ A_p & B_p \\ 0 & B_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{2^p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_L \\ f_1^{(p)} \\ f_R \end{pmatrix}.$$

Представленный вариант BCR обратно устойчив к ошибкам округления, так как, в сущности, является решением системы линейных уравнений с помощью QR разложения матрицы T .

ЛИТЕРАТУРА

1. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
2. Bini D. A., Meini B. Effective methods for solving banded Toeplitz systems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1999. V. 20, N 3. P. 700–719.

Некоторые дифференциальные тождества и гидродинамические уравнения Эйлера

Some differential identities and Euler's hydrodynamical equations

Меграбов А. Г.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; mag@sscc.ru

Получен ряд формул векторного анализа в виде дифференциальных тождеств, которые, с одной стороны, *связывают* модуль $|\vec{v}|$ и направление $\vec{\tau}$ ($|\vec{\tau}| = 1$) произвольного гладкого векторного поля $\vec{v} = |\vec{v}|\vec{\tau}$, в трехмерном ($\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$) и двумерном ($\vec{v} = \vec{v}(x, y)$) случае. Направление $\vec{\tau}$ вектора $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты по осям x, y, z) выражается в двумерном случае через угол α , определяемый по $\arctg(v_2/v_1)$: $\vec{\tau} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$, а в трехмерном — через два угла α и $\theta = \arccos(v_3/|\vec{v}|)$: $\vec{\tau} = \vec{\tau}(\alpha, \theta) = \cos \alpha \sin \theta \vec{i} + \sin \alpha \sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$.

С другой стороны, найденные формулы в определенном смысле *разделяют* модуль $|\vec{v}|$ и направление $\vec{\tau}$ векторного поля $\vec{v}$. Именно, для любого гладкого векторного поля $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ с модулем $|\vec{v}| \neq 0$ и направлением $\vec{\tau}$ основное тождество имеет вид

$$\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{v} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}}{|\vec{v}|^2} = \vec{P}(|\vec{v}|) + \vec{S}(\vec{\tau}),$$

где поле $\vec{P} = \vec{P}(|\vec{v}|) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{grad} \ln |\vec{v}| = \operatorname{grad} |\vec{v}|^2 / (2|\vec{v}|^2)$ определяется только модулем $|\vec{v}|$ поля $\vec{v}$ и является потенциальным как в двумерном, так и в трехмерном случае, а поле $\vec{S} = \vec{S}(\vec{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\tau} \operatorname{div} \vec{\tau} + \vec{\tau} \times \operatorname{rot} \vec{\tau} = \vec{Q} - \vec{P} = \vec{S}(\alpha, \theta)$ определяется только направлением $\vec{\tau}$ поля $\vec{v}$ и в двумерном случае является соленоидальным: $\vec{S} = \vec{S}(\alpha) = \operatorname{rot}(\alpha \vec{k})$, а в трехмерном $\vec{S} = \vec{S}(\alpha, \theta) = \operatorname{rot}(\alpha \vec{k}) - \cos^2 \theta \operatorname{rot}(\alpha \vec{k} - \operatorname{tg} \theta \vec{v}_{xy}) = \operatorname{rot}\{\alpha \vec{k} + \cos \theta \vec{f}(\alpha, \theta)\} - 2 \cos \theta \operatorname{rot} \vec{f}(\alpha, \theta)$, где $\vec{v}_{xy} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$, $\vec{f}(\alpha, \theta) = -\sin \theta \vec{v}_{xy} + \alpha \cos \theta \vec{k}$. Имеем $\operatorname{div} \vec{S} = -2 \sin \theta (\vec{\tau} \cdot (\operatorname{grad} \alpha \times \operatorname{grad} \theta))$. В двумерном случае $\theta \equiv \pi/2 \Rightarrow \vec{S} = \operatorname{rot}(\alpha \vec{k})$, $\operatorname{div} \vec{S} = 0 \Rightarrow \Delta \ln |\vec{v}| = \operatorname{div} \vec{Q}$, $\Delta \alpha = -(\operatorname{rot} \vec{Q} \cdot \vec{k}) \Rightarrow \Delta \operatorname{Ln}\{|\vec{v}|e^{\pm i\alpha}\} = \operatorname{div} \vec{Q} \mp i(\operatorname{rot} \vec{Q} \cdot \vec{k})$ (i — мнимая единица).

Символы $(\cdot)$ и $(\times)$ обозначают скалярное и векторное произведение векторов, ∇ — оператор Гамильтона (“набла”), Δu — оператор Лапласа. С помощью найденных тождеств получены следующие результаты (часть из них опубликована в [1]).

1. Из гидродинамических уравнений Эйлера, записанных в виде

$$\vec{G} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{v^2} \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \vec{F} \right\} = \vec{S}(\vec{\tau}) = \vec{Q}(\vec{v}) - \vec{P}(|\vec{v}|)$$

($\vec{v} = v\vec{\tau}$ — скорость, $v = |\vec{v}|$, p — давление, ρ — плотность, $\vec{F}$ — массовая сила), вытекают следующие дифференциальные тождества: для любого движения идеальной жидкости $\operatorname{div} \vec{G} = -2v^{-1} \sin \theta (\vec{v} \cdot (\operatorname{grad} \alpha \times \operatorname{grad} \theta)) = \operatorname{div} \vec{S}$; для безвихревого движения (при $\vec{v} = \operatorname{grad} u(x, y, z)$)

$$\operatorname{div} \vec{G} = \frac{2}{v} \operatorname{div} \{u \operatorname{rot} (\alpha \operatorname{grad} \cos \theta)\} = -\frac{2 \sin \theta}{v} \frac{\partial (u, \alpha, \theta)}{\partial (x, y, z)},$$

$$\operatorname{div} (v^2 \vec{G}) = -2(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2 - u_{xx}u_{yy} - u_{xx}u_{zz} - u_{yy}u_{zz}).$$

2. Уравнения Эйлера для плоского движения идеальной жидкости представимы в виде $\vec{G} = \operatorname{rot} \{\alpha(x, y, t)\vec{k}\} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{G} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{G} = -\Delta \alpha \vec{k}$. При стационарном плоском движении несжимаемой жидкости и отсутствии массовых сил справедливы тождества

$$\frac{\operatorname{grad} p}{\rho v^2} = \operatorname{rot} (\alpha \vec{k}) \Rightarrow \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} p}{\rho v^2} = 0, \quad \operatorname{rot} \frac{\operatorname{grad} p}{\rho v^2} = -\Delta \alpha \vec{k}.$$

3. Уравнение Монжа — Ампера $u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} = F$ и уравнение для функции тока плоского движения идеальной несжимаемой жидкости $-\{u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y\} = (\Delta u)_t + (\operatorname{rot} \vec{F}^* \cdot \vec{k})$, где $\vec{F}^* = \vec{F} - \rho^{-1} \operatorname{grad} p$, связаны между собой следующим образом: их левая часть выражается соответственно через дивергенцию и ротор одного и того же векторного поля $\vec{V}$: $\operatorname{div} \vec{V} = 2(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy})$, $\operatorname{rot} \vec{V} = -\{u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y\}\vec{k}$, где $\vec{V} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{grad} (u_x^2 + u_y^2)/2 - \Delta u \operatorname{grad} u = (u_y u_{xy} - u_x u_{yy})\vec{i} + (u_x u_{xy} - u_y u_{xx})\vec{j} = (\operatorname{grad} u \times \nabla) \times \operatorname{grad} u$ ($\vec{V} = -|\vec{v}|^2 \vec{S} = -|\vec{v}|^2 \operatorname{rot} (\alpha \vec{k})$ при $\vec{v} = \operatorname{grad} u(x, y, t)$ и $\vec{v} = \operatorname{rot} \{u(x, y, t)\vec{k}\} = u_y \vec{i} - u_x \vec{j}$). Упомянутая функция тока $u(x, y, t)$ удовлетворяет обоим этим уравнениям при $F = (1/2) \operatorname{div} \vec{F}^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меграбов А. Г. Дифференциальные тождества, связывающие лапласиан скалярной функции, модуль ее градиента и угол его направления // Докл. АН. 2009. Т. 424, № 5. С. 599–603.

**Численный метод решения задач газовой динамики
в пористых средах****Numerical method for solving problems of gas flow
in porous medium****Меньшов И. С.***Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Москва, Россия; menshov@kiam.ru*

В настоящей работе представляется численный метод для расчета течения газа в среде переменной пористости. Материал пористой среды представляет собой абсолютно жесткую недеформируемую структуру, называемую в дальнейшем скелетон. Рассматривается простейшая модель скелетона, которая характеризуется двумя параметрами: пористостью α и характерным линейным размером элемента скелетона d_s .

Распределение пористости в общем случае неоднородно. В частности, значение пористости может скачком меняться на некоторой поверхности. Например, когда скелетон занимает только часть рассматриваемой области, и решается сопряженная задача течения газа как в свободном пространстве, так и внутри скелетона. Наша цель — разработать численную методику, которая позволяла бы рассчитывать течение сжимаемого газа в пористой среде с произвольным распределением пористости, покрывающим весь диапазон изменения α от 0 (твердое тело) до 1 (свободное течение).

Задачи течения газа в пористой среде возникают в ряде приложений. Вот далеко не полный их перечень: задачи внутренней баллистики, твердотопливные двигатели, геофизические задачи (вытеснение газа), задачи металлургической и химической промышленности, аэродинамика (управление потоком, снижение сопротивления, увеличение подъемной силы и многое другое посредством перераспределения потока через вставки пористого материала). Технология композитных пористых материалов в настоящее время проходит этап бурного развития, и сами материалы находят все более широкое применение. Поэтому задачи взаимодействия газа и пористой среды становятся весьма актуальными.

Математическая модель, описывающая стесненное скелетоном течение газа, включает в себя фундаментальные уравнения сохранения

массы, импульса и энергии. Мгновенное состояние газа определяется плотностью ρ , вектором скорости $\vec{u}$ и давлением p . Газ считается идеальным; диссипативные эффекты, связанные с вязкостью и теплопроводностью газа, учитываются лишь при описании межфазного взаимодействия газовой фазы и скелетона.

Численный подход для решения системы определяющих уравнений строится на основе метода С. К. Годунова [1]. Ключевым элементом этого метода является решение задачи Римана — задачи о распаде произвольного разрыва в газе. При наличии скелетона формулировка задачи Римана в общем случае дополняется условием разрыва пористости: слева и справа от начального разрыва не только параметры газа различны, но также и значения пористости.

Если значение пористости на разрыве непрерывно, решение задачи Римана сводится к стандартному решению уравнений газодинамики [2]. Оно используется соответствующим образом для вычисления потока на ребре счетной ячейки с непрерывной пористостью.

Разрыв пористости приводит к дополнительному стационарному разрыву, и решение нелинейной задачи в общем случае получить не удастся. В этом случае мы предлагаем использовать решение линеаризованной по методу [3] задачи. Для этого основная система уравнений расширяется добавлением уравнением $\partial\alpha/\partial t = 0$. Полученная система 4-х уравнений записывается в квазилинейной форме. Матрица этой системы имеет 4 различных собственных числа — 3 стандартных ($\lambda = u - a$, u , $u + a$) и одно $\lambda = 0$. Соответствующие им 4 правых собственных вектора образуют базис. Тогда решение линейной задачи может быть выписано в виде разложения по этому базису в явном виде. Это решение используется для вычисления потока на ребре счетной ячейки с разрывом пористости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-08-00356-а, № 08-08-12096-офи).

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
3. Roe P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. P. 357–372.

Об алгоритмах построения интерполяционных и сглаживающих сплайнов многих переменных по хаотическим данным

On algorithms for construction multivariate interpolating and smoothing splines under the chaotic data

Мирошниченко В. Л.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия; miroshn@math.nsc.ru*

При решении задач, связанных с обработкой экспериментальной информации, известной в нерегулярно (хаотически) расположенных на плоскости или в пространстве точках, широко используются интерполяционные и сглаживающие D^m -сплайны, мультиквадрики Харди и разнообразные их варианты и обобщения [1, 2]. Построение такого аппроксиманта (далее все они называются сплайнами) сводится, в конечном итоге, к решению системы линейных уравнений относительно вектора коэффициентов сплайна Λ

$$A\Lambda = f, \quad (1)$$

с симметрической матрицей A следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где B — симметрическая плотная $N \times N$ матрица, C — матрица размерности $N \times p$, $\mathbf{0}$ — нулевая $p \times p$ матрица; N — количество точек, в которых заданы исходные данные; p — размерность пространства полиномов, из которого выбирается полиномиальная часть сплайна.

К сожалению, матрица A не является положительно определённой и это не позволяет применять для решения системы (1) эффективный метод Холецкого. Кроме того, матрица A может быть плохо обусловленной, а это требует при решении системы (1) обязательного контроля числа её обусловленности, с выдачей соответствующей диагностической информации, что фактически эквивалентно проверке условий существования и единственности сплайна.

В докладе не обсуждаются алгоритмы построения сплайна, основанные на предварительном преобразовании системы (1) к системе с положительно определенной матрицей [2]. Рассматриваются следующие прямые методы решения системы (1):

- метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице,
- метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу,
- метод Гаусса без обратного хода с выбором главного элемента по строке,
- метод Аазена [3].

Дается сравнительная характеристика этих методов по количеству арифметических операций и объему оперативной памяти. Приводятся результаты численных экспериментов. Практический опыт показывает, что среди перечисленных методов наиболее эффективным является метод Аазена, дополненный средствами оценки числа обусловленности решаемой системы. Этот метод по быстродействию примерно в три раза превосходит метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу и одновременно требует в два раза меньше оперативной памяти. Заметим, что быстродействие алгоритма построения сплайна приобретает решающее значение в задачах, связанных с оптимизацией выбора параметров сплайна, например, параметра сглаживания.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН № 2009-81 и совместного интеграционного проекта СО РАН и УрО РАН № 2009-14.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аниконов Ю. Е., Богданов В. В., Деревцов Е. Ю., Мирошниченко В. Л., Сапожникова Н. А. Численное решение обратной кинематической задачи сейсмоки // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. IX, № 4(28). С. 3–26.
2. Рожено А. И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации. Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2005.
3. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.

Математические модели и численно–аналитические методы в геофизике

Mathematical model and numerical analytical methods in geophysics

Михайленко Б. Г.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; mikh@sscc.ru*

В докладе рассматриваются численно-аналитические методы решения широкого класса задач, связанные с теорией распространения сейсмических волн в неоднородных средах. Алгоритм основан на расщеплении 3-х мерных задач на одномерные с помощью конечных интегральных преобразований по одной либо двум пространственным координатам и решением одномерных задач по одной пространственной координате и времени с помощью конечно-разностных методов. Обсуждается также эффективность применения преобразования Лагерра по времени в сравнении с преобразованием Фурье для широкого класса нестационарных задач геофизики. Приводятся примеры численного моделирования распространения волн в упругих, анизотропных, трещиноватых средах. Приводятся результаты математического моделирования распространения волн в неоднородных средах.

**Разностные схемы повышенной точности
для решения задач механики сплошной среды
методом Годунова с антидиффузией**

**High-order difference schemes for solving continuum
mechanics problems with the Godunov method
with antidiffusion**

Моисеев Н. Я.

*Государственная корпорация по атомной энергии “Росатом”,
Российский федеральный ядерный центр, ВНИИ технической
физики, Снежинск, Россия; nyamoiseyev@vniitf.ru*

В докладе рассмотрены новые подходы к повышению точности в разностных схемах для решения задач механики сплошной среды методом Годунова [1]. Подходы отличаются от известных подходов, естественным образом вписываются в созданные методики, эффективны, экономичны и базируются на следующих идеях: в введении антидиффузионных членов [2] для корректировки больших величин, найденных из решения задачи о распаде произвольного разрыва; в построении разностных схем предиктор-корректор повышенной точности, которые эквивалентны симметричным схемам покомпонентного расщепления [3]; в разработке нового алгоритма решения задачи о распаде произвольного разрыва в средах со сложными уравнениями состояния [4]. В предлагаемых подходах к повышению точности метода Годунова корректировке на этапе предиктора подвергаются большие величины, а не начальные данные для решения этой задачи. Выражения для антидиффузионных членов выписываются из разложения в ряд Тейлора больших величин в момент времени $t_n + 0.5\tau$ в окрестности границ с учетом дифференциальных приближений схем [5]. Показано, что можно построить модифицированные схемы Годунова с антидиффузией, которые аппроксимируют исходные дифференциальные уравнения переноса и акустики с одной пространственной переменной и постоянными коэффициентами с произвольным порядком по времени и по пространству. Показано, что, если числа Куранта равны единице, то условие сдвига в построенных схемах предиктор-корректор для решения многомерных задач выполняется, а в классических схемах — не выполняется. Новый алгоритм решения задачи о распаде произвольного разрыва является обобщением алгоритмов, предложенных Забродиным А. В.

и Прокоповым Г. П., для приближенного решения этой задачи [6, 7]. Результаты расчетов модельных задач показывают целесообразность введения предложенных подходов к повышению точности численных решений методом Годунова с антидиффузией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.
2. Моисеев Н. Я., Силантьева И. Ю. Разностные схемы повышенной точности для решения одномерных уравнений газовой динамики методом Годунова с антидиффузией // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 5. С. 1–16.
3. Макотра О. А., Моисеев Н. Я., Силантьева И. Ю., Топчий Т. В., Фролова Н. Л. Повышение точности решений многомерных задач газовой динамики в схемах Годунова. Снежинск, 2008. (Препринт / РФЯЦ-ВНИИТФ; № 235).
4. Моисеев Н. Я., Мухамадиева Т. А. Метод Ньютона для решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва в средах с уравнениями состояния общего вида // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 6. С. 1202–1210.
5. Шокин Н. И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.
6. Прокопов Г. П. Расчет распада разрыва для пористых сред и сплошных сред с двучленными уравнениями состояния // Вопр. атомн. науки и техники. Сер. Методики и программы числ. решения задач мат. физики. 1982. № 2(10). С. 32–40.
7. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

Регулярно структурированные псевдоспектры и интегральные критерии качества дихотомии

The regulary structured pseudospectra and integral performance criteria for dichotomy

Нечепуренко Ю. М.

Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия;
yumnech@yandex.ru

Доклад посвящен оценке чувствительности спектральных характеристик матриц к возмущениям их элементов на основе псевдоспектров и интегральных критериев качества дихотомии [1]. Обсуждаются оценки из [2] и приведенные ниже оценки из [3, 4], основанные на структурированных псевдоспектрах и соответствующих интегральных критериях качества дихотомии, существенно более точные для матриц конечно-мерных аппроксимаций дифференциальных операторов по сравнению с оценками, основанными на обычных псевдоспектрах и интегральных критериях качества дихотомии.

Структурированным псевдоспектром матрицы $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ называют

$$\Lambda_\varepsilon(A; B, C) = \bigcup_{\|S\|_2 \leq \varepsilon} \lambda(A + BSC), \quad S \in \mathbf{C}^{n \times n},$$

где $B, C \in \mathbf{C}^{n \times n}$ — фиксированные матрицы, а $\lambda(\cdot)$ означает спектр матрицы. В частности, $\Lambda_\varepsilon(A; I, I)$ — это обычный псевдоспектр матрицы A . Структурированный псевдоспектр с невырожденными структурирующими матрицами B и C называют *регулярно структурированным*. Он обладает всеми известными свойствами обычного псевдоспектра и для него справедливы следующие равенства:

$$\Lambda_\varepsilon(A; B, C) = \bigcup_{\|B^{-1}\Delta C^{-1}\|_2 \leq \varepsilon} \lambda(A + \Delta) = \{z : \|C(zI - A)^{-1}B\|_2 \geq 1/\varepsilon\}.$$

Выбирая для заданного типа возмущений Δ подходящие матрицы B и C , можно получать значительно более точные оценки возмущения минимальных по модулю собственных значений, чем на основе обычного псевдоспектра.

Анализ разложения функции f от матрицы A в ряд по ее инвариантным подпространствам сводится к анализу матриц вида

$$P_\gamma(f, A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(zI - A)^{-1} dz,$$

где γ некоторая достаточно гладкая кривая, не пересекающаяся с $\lambda(A)$.

Примем обозначение $\|g\|_{\gamma,p}$ для лебеговской p -нормы функции $g: \gamma \rightarrow \mathbf{C}^m$ и введем в рассмотрение величины

$$\kappa_{\gamma,p}(A; B, C) = \nu_{B,C} \max_{\|v\|_2=1} \|C(zI - A)^{-1} Bv\|_{\gamma,p},$$

где $\nu_{B,C} = \|B^{-1}\|_2 \|C^{-1}\|_2 / (2\pi)$, которые называют *интегральными критериями качества дихотомии* спектра матрицы A кривой γ .

Теорема. Если кривая γ не имеет общих точек с $\Lambda_\varepsilon(A; B, C)$, то

$$\|P_\gamma(f, A)\|_2 \leq \|f\|_{\gamma,p/(p-1)} \kappa_{\gamma,p}(A; B, C)$$

при всех $p \geq 1$ и для любой матрицы $\Delta \in \mathbf{C}^{n \times n}$ такой, что $\|B^{-1}\Delta C^{-1}\|_2 \leq \varepsilon$, справедливы следующие неравенства:

$$\|P_\gamma(f, A) - P_\gamma(f, A + \Delta)\|_2 \leq \|f\|_{\gamma,p/(p-1)} \kappa_{\gamma,p}(A; B, C) \omega / (1 - \omega),$$

$$|\kappa_{\gamma,p}(A; B, C) - \kappa_{\gamma,p}(A + \Delta; B, C)| \leq \kappa_{\gamma,p}(A; B, C) \omega / (1 - \omega),$$

где $\omega = \|B^{-1}\Delta C^{-1}\|_2 \kappa_{\gamma,\infty}(A; B, C) / \nu_{B,C} < 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00658) и Российской академии наук (проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”).

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002.
2. Нечепуренко Ю. М. Оценка нормы матрицы Грина через интегральный критерий качества дихотомии и границы хаусдорфова множества // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 2. С. 232–238.
3. Nechepurenko Yu. M. The regularly structured pseudospectrum // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2004. V. 18, N 3. P. 265–268.
4. Нечепуренко Ю. М. Интегральные критерии качества дихотомии спектра матрицы замкнутым контуром // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 718–726.

Адаптивный алгоритм интегрирования жестких задач

The adaptive algorithm for integrating stiff problems

Новиков Е. А.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск,
Россия; novikov@icm.krasn.ru*

При моделировании кинетики химических реакций, расчете электронных схем и других важных приложениях возникает проблема численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные тенденции при построении численных методов связаны с расширением их возможностей для решения задач все более высокой размерности. Математические постановки практических задач постоянно уточняются, что приводит как к росту размерности, так и к усложнению правой части системы дифференциальных уравнений. Во многих случаях расчеты требуется проводить с так называемой инженерной точностью — порядка 1% и ниже. Это связано с тем, что измерение констант, входящих в правую часть системы дифференциальных уравнений, часто проводится достаточно грубо. Иногда такая точность расчетов является удовлетворительной с точки зрения поставленной цели. Известно (см., например, [1]), что порядок аппроксимации численной схемы следует сочетать с требуемой точностью расчетов. Поэтому ниже рассмотрены численные формулы не выше второго порядка точности.

Современные методы решения жестких задач, как правило, используют вычисление и обращение матрицы Якоби системы дифференциальных уравнений. В случае достаточно большой размерности системы эффективность численных методов фактически полностью определяется временем декомпозиции этой матрицы. Для повышения эффективности расчетов в ряде алгоритмов используется замораживание матрицы Якоби, то есть применение одной матрицы на нескольких шагах интегрирования. В алгоритмах интегрирования на основе известных безытерационных методов, к которым относятся методы типа Розенброка и их различные модификации [1], матрица Якоби влияет на порядок точности численной схемы, и поэтому возникают трудности с ее замораживанием. Доказано, что максимальный порядок точности

методов типа Розенброка равен двум, если он применяется с замораживанием матрицы [2]. Там же построен алгоритм с замораживанием матрицы Якоби на основе L -устойчивой численной формулы второго порядка точности и приведены результаты расчетов, подтверждающие его высокую эффективность. Если вопрос об использовании одной матрицы на нескольких шагах интегрирования оставить нерешенным, то заведомо нужно ограничиться задачами небольшой размерности.

Некоторым аналогом замораживания матрицы Якоби является применение в расчетах алгоритмов интегрирования на основе явных и L -устойчивых методов с автоматическим выбором численной схемы. В этом случае эффективность алгоритма может быть повышена за счет расчета переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, явным методом. В качестве критерия выбора эффективной численной формулы естественно применять неравенство для контроля устойчивости [3]. Следует отметить, что применение таких комбинированных алгоритмов полностью не снимает проблему замораживания матрицы Якоби, потому что явным методом можно просчитать, вообще говоря, только погранслойное решение, соответствующее максимальному собственному числу матрицы Якоби.

В докладе рассмотрены явная двухстадийная схема типа Рунге — Кутты и L -устойчивый (2,1)-метод второго порядка точности. На основе стадий явного метода построена численная формула первого порядка с расширенным до 8 интервалом устойчивости. Разработан алгоритм интегрирования переменного порядка и шага, в котором выбор наиболее эффективной численной схемы осуществляется на каждом шаге с применением неравенства для контроля устойчивости. Приведены результаты расчетов, подтверждающие эффективность построенного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.
2. Новиков Е. А., Новиков В. А., Юматова Л. А. Замораживание матрицы Якоби в методе типа Розенброка второго порядка точности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 3. С.385–390.
3. Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997.

Канонические модули и общее решение уравнений двумерной статической задачи анизотропной упругости

Canonical moduli and the general solution for equations of two-dimensional static problem of anisotropic elasticity

Остросаблин Н. И.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; abd@hydro.nsc.ru

С использованием ортогонального и аффинного преобразований координат и механических величин [1] уравнения двумерной статической задачи анизотропной упругости с шестью модулями приведены к простейшему виду с двумя модулями

$$\begin{bmatrix} \partial_{11} + \partial_{22} & (1 + A_{21})\partial_{12} \\ (1 + A_{21})\partial_{12} & \partial_{11} + A_{22}\partial_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (1)$$

где A_{21} , A_{22} — канонические модули упругости; u_j — вектор смещения; F_i — вектор объёмных сил; ∂_k — производная по координате x_k .

Из условия $A_{21}^2 < A_{22}$ следует положительная определённость матрицы A операторов в (1), при этом определитель

$$|A| = d = \partial_{1111} + (A_{22} - A_{21}^2 - 2A_{21})\partial_{1122} + A_{22}\partial_{2222} > 0 \quad (2)$$

при любых действительных значениях символов ∂_i , $\partial_{11} + \partial_{22} \neq 0$. В зависимости от соотношений между каноническими модулями A_{21} , A_{22} определитель (2) представляется по-разному в виде квадратичных множителей, также не имеющих действительных нулей.

При выполнении неравенств $A_{21} + 2 < \sqrt{A_{22}}$, $-\sqrt{A_{22}} < A_{21} < \sqrt{A_{22}}$ определитель (2) принимает вид

$$d = (\partial_{11} + a_1\partial_{22})(\partial_{11} + a_2\partial_{22}), \quad (3)$$

$$2a_{1,2} = A_{22} + 1 - (A_{21} + 1)^2 \pm \sqrt{(A_{22} - A_{21}^2)[A_{22} - (A_{21} + 2)^2]} > 0.$$

Если выполняется равенство $A_{21} + 2 = \sqrt{A_{22}}$, то из (3) получаем

$$d = (\partial_{11} + \sqrt{A_{22}}\partial_{22})^2. \quad (4)$$

Если выполняется неравенство $\sqrt{A_{22}} < A_{21} + 2$, то определитель (2) разлагается на множители вида

$$d = (\partial_{11} + 2a_{12}\partial_{12} + \sqrt{A_{22}}\partial_{22})(\partial_{11} - 2a_{12}\partial_{12} + \sqrt{A_{22}}\partial_{22}), \quad (5)$$

$$2a_{12} = \sqrt{(\sqrt{A_{22}} + A_{21})(2 + A_{21} - \sqrt{A_{22}})}.$$

Квадратичные формы в (5) положительно определённые, так как выполняется неравенство $a_{12}^2 < \sqrt{A_{22}}$.

Пусть $D = \text{diag}(D_1, D_2)$ диагональная матрица, где D_1, D_2 множители в выражениях (3)–(5), т. е. $d = D_1 D_2$. Для каждого варианта (3)–(5) существуют матрицы

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_{111}\partial_1 + \alpha_{121}\partial_2 & \alpha_{112}\partial_1 + \alpha_{122}\partial_2 \\ \alpha_{211}\partial_1 + \alpha_{221}\partial_2 & \alpha_{212}\partial_1 + \alpha_{222}\partial_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{111}\partial_1 + \beta_{121}\partial_2 & \beta_{112}\partial_1 + \beta_{122}\partial_2 \\ \beta_{211}\partial_1 + \beta_{221}\partial_2 & \beta_{212}\partial_1 + \beta_{222}\partial_2 \end{bmatrix}$$

такие, что выполняется соотношение $AC = BD$, где A — матрица операторов в (1). Так как $|A||C| = |B||D|$ и $|A| = |D| = d = D_1 D_2$, то отсюда следует $|C| = |B|$. Общее решение однородных уравнений (1) $Au = 0$ представляется в виде $u = C\varphi$, $D\varphi = f$, $Bf = 0$. Формулы $u = C\varphi$, $\varphi = B'\tilde{u}$, $A\tilde{u} = 0$ переводят решения уравнений $Au = 0$, $D\varphi = 0$ друг в друга (штрих означает транспонирование матрицы). При этом $u = CB'\tilde{u}$ — формула производства новых решений, т. е. $Q = CB'$ — оператор симметрии [2].

При построении матриц (6) некоторые их коэффициенты остаются свободными и за счёт этого можно получать различные формы представления смещений через квазигармонические функции φ_1, φ_2 .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00749) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-3066.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Остросаблин Н. И. Об аффинных преобразованиях уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 4. С. 124–134.
2. Остросаблин Н. И. Операторы симметрии и общие решения уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика и техн. физика. 1995. Т. 36, № 5. С. 98–104.

Линейный и нелинейный анализ численного метода расчета двумерной конвекции

The linear and non-linear analysis of a numerical method for computation of two-dimensional convection

Палымский И. Б.

*Современная гуманитарная академия, Новосибирский филиал,
Новосибирск, Россия; palymsky@hnet.ru*

Рассматривается двумерная и нестационарная конвекция жидкости в плоском слое при подогреве снизу; обе горизонтальные границы считаются плоскими и свободными от касательных напряжений. Система уравнений конвекции записана для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. Предложенным в работе [1] специальным спектрально-разностным численным методом была рассчитана турбулентная конвекция до $r \leq 3.4 \cdot 10^4$ при $Pr = 10$ [2]. Здесь и далее $r = Ra/Ra_{cr}$ — надкритичность, Ra — число Рэлея, $Ra_{cr} = 657.5$ — критическое число Рэлея, Pr — число Прандтля. Полученные результаты сопоставляются с данными лабораторных экспериментов по изучению турбулентной конвекции. В [3] этим методом исследовались пространственные спектры двумерных и трехмерных течений турбулентной конвекции.

Согласно идеи расщепления, переход от слоя n к слою $n + 1$ по времени производится в два шага. На первом дробном шаге расщепления учитывается линейное развитие возмущений, которое рассчитывается в спектральном пространстве по аналитическим формулам, подобным формулам линейной теории устойчивости [1]. Взаимодействие гармоник на первом этапе расщепления не учитывается. На втором этапе учитывается нелинейный конвективный перенос, то есть взаимодействие гармоник. Расчет взаимодействия гармоник производится в физическом пространстве по конечно-разностной схеме переменных направлений.

Использование аналитических формул на первом этапе расщепления, подобных формулам линейной теории устойчивости, обуславливает хорошее соответствие в линейном приближении спектральных характеристик исходной дифференциальной задачи и численного метода [1]. Это гарантирует правильное воспроизведение бесконечно малых

возмущений равновесного решения. И более того, использование аналитических формул позволяет значительно увеличивать шаг дискретизации по времени.

К сожалению, при линейном анализе все нелинейные члены отбрасываются, поэтому линейный анализ не дает возможность анализировать способы аппроксимации нелинейных членов. На модельной нелинейной системе уравнений проведен нелинейный анализ численного метода. Модельная нелинейная система имеет точное нестационарное решение, аналогичное решение для численного метода выписывается в виде степенного ряда по шагам по времени и пространству. Эти решения сравниваются и исследуются различные аппроксимации по времени нелинейных членов. Показано, что используемая схема первого порядка точности по времени приводит лишь к незначительному понижению точности вычислений, по сравнению со схемами второго порядка точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Палымский И. Б. Метод численного моделирования конвективных течений // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 6. С. 53–61.
2. Палымский И. Б. Численное моделирование двумерной конвекции, роль граничных условий // Изв. РАН. Мех. жидк. и газа. 2007. № 4. С. 61–71.
3. Палымский И. Б. Численное исследование спектров турбулентной конвекции Рэлея — Бенара // Нелин. динамика. 2008. Т. 4, № 2. С. 145–156.

**Об одном итерационном методе с расщеплением
граничных условий решения 1-ой начально-краевой
задачи для нестационарной системы Стокса и
его численных реализациях**

**On an iterative method with boundary condition
splitting for first initial-boundary value problem
for nonstationary Stokes system and its numerical
realizations**

Пальцев Б. В.¹, Соловьев М. Б.²

*Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва,
Россия; ¹paltsev@ccas.ru, ²solmb@mail.ru*

Предложен и исследован на дифференциальном уровне принципиально новый итерационный метод решения 1-ой начально-краевой задачи для нестационарной системы Стокса. Итерация метода заключается в последовательном решении двух существенно более простых, чем исходная, задач: зависящей от времени как от параметра задачи Неймана для давления, и затем специальной векторной параболической начально-краевой задачи для скорости, такой, что ее решения автоматически являются соленоидальными вектор-функциями. Завершается итерация очень простой формулой пересчета, в которую входит некоторый параболический оператор на пространственно-временной части границы [1].

Сходимость этого итерационного метода доказана в анизотропных пространствах Соболева $W_{\pi;2;t,x}^{s,2s}((0,T) \times \Omega)$ (для скорости), по крайней мере в случае, когда область — слой в $\mathbb{R}^n$, а задача периодическая по направлениям вдоль слоя (здесь Ω - ячейка периодичности, s — натуральное). Установлено, что итерационный процесс уменьшает ошибку за 1 итерацию, грубо говоря, в 7 раз. При этом получены условия на заданную граничную функцию, и дано эффективное описание условий согласования граничного и начального данных ($s - 1$ из них при показателе гладкости $s \geq 2$ являются нелокальными), которые в совокупности являются необходимыми и достаточными для существования решения из указанного соболевского пространства. При $s \geq 2$ найдены также условия на начальное приближение, необходимые и достаточные для сходимости итерационного процесса в таком пространстве.

То, что на итерациях метода происходит расщепление на значительно более простые и устойчиво численно аппроксимируемые краевые задачи позволяет построить эффективные численные реализации этого метода. Такие численные реализации построены на основе билинейных конечных элементов по пространству и конечных разностей по времени для случая полосы в $\mathbb{R}^2$ при условии периодичности вдоль нее, а также для случая зазора между двумя коаксиальными цилиндрами при условиях осесимметричности задачи и ее периодичности вдоль оси цилиндров [2]. При численной аппроксимации параболической задачи для скорости используется неявная трехслойная разностная схема 2-го порядка точности по времени [3], обеспечивающая, в отличие от схемы Кранка — Николсона, быстрое затухание высокочастотных возмущений.

Численными экспериментами установлено, что построенный численный метод обеспечивает второй порядок точности численных решений в норме максимума модуля как по пространственным, так и по временным шагам, причем и для скорости и для давления.

Обнаружилось, что использование непосредственной численной аппроксимации формулы пересчета на границе приводит к значительному падению скоростей сходимости итераций на высоких гармониках. Это весьма нежелательное явление удалось полностью устранить благодаря модифицированию формулы пересчета, базирующемуся на одном алгоритме, предложенном в [4] для близких методов с расщеплением граничных условий для стационарной системы типа Стокса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-01-00661).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пальцев Б. В. Об одном итерационном методе с расщеплением граничных условий решения 1-ой начально-краевой задачи для нестационарной системы Стокса // Тез. докладов Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск. 2008. С. 540.
2. Пальцев Б. В., Соловьев М. Б. О численных реализациях нового итерационного метода с расщеплением граничных условий решения 1-ой начально-краевой задачи для нестационарной системы Стокса // Материалы междунар. конф., посвященной 70-летию В. А. Садовниченко. М.: Университетская книга. 2009. С. 332.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
4. Лозинский А. С. Об ускорении конечно-элементных реализаций итерационных процессов с расщеплением граничных условий для системы Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 9. С. 1339–1363.

**Решение обратной коэффициентной задачи
теплопроводности с применением
дискретно–аналитических схем**
**Solution of a coefficient inverse heat conduction
problem by discrete–analytical schemes**

Пененко А. В.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия; a.penenko@gmail.com*

Рассматривается задача о поиске коэффициента $k(x)$ в начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - (k(x)u_x(x, t))_x &= 0, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T], \\k(0)u_x(0, t) &= \alpha(t), \quad k(1)u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \\u(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, 1],\end{aligned}$$

по известной функции $\alpha(t)$ и дополнительной информации о решении $f(t)$:

$$u(0, t) = f(t), \quad t \in [0, T].$$

Исследование свойств обратной задачи посредством теории сопряженных уравнений [1, 2] показало, что она может быть переформулирована в виде операторного уравнения, для решения которого можно применить модификацию подхода, разработанного в [3] для нелинейных некорректных операторных уравнений с достаточно гладкими операторами. С его помощью доказана локальная сходимость итерационного метода проекции градиента на заданное конечномерное подпространство $L_2(0, 1)$.

Используемые в алгоритме конечномерные операторы и градиенты функционалов представляют собой аппроксимации соответствующих объектов, выделенных в процессе анализа обратной задачи. Чтобы точно учесть граничные условия по пространству был использован метод построения дискретно-аналитических численных схем с привлечением локально-сопряженных задач, разработанный в [4]. Теми же средствами удалось обеспечить согласованность всех элементов алгоритма и показать разрешимость начально-краевой задачи в классах гладких функций.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект № 16), Отделения математических наук РАН (проект № 3) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-05-00673).

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
2. Пененко В.В. Вычислительные аспекты моделирования динамики атмосферных процессов и оценки влияния различных факторов на динамику атмосферы // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 61–76.
3. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Козлов А.И. Стабилизирующиеся методы градиентного типа для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений. М.: ЛКИ, 2007.
4. Penenko V., Tsvetova E. Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 226. P. 319–330.

**Оптимизационные модели и методы
для природоохранного прогнозирования и оценок
экологических рисков**
**Optimization models and methods for environmental
forecasting and ecological risk assessment**

Пененко В. В.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; Penenko@sscc.ru*

В докладе излагаются концепция и результаты работ по развитию теоретических основ, математических моделей и методов для решения задач природоохранного прогнозирования. Основное внимание уделяется методам оценок экологических рисков и масштабов последствий антропогенных воздействий на атмосферу, выявлению климатических предпосылок возникновения областей повышенного риска/уязвимости по отношению к этим воздействиям [1].

Для исследований разработан многофункциональный комплекс математических моделей, включающий прямые и сопряженные задачи для моделей гидротермодинамики атмосферы различных масштабов и моделей переноса и трансформации загрязняющих примесей в газовом и аэрозольном состояниях (модели конвекции-диффузии-реакции).

Методика решения задач базируется на применении вариационных принципов для построения численных моделей и алгоритмов их реализации на ЭВМ, а также для организации методов прямого и обратного моделирования и методов теории чувствительности функционалов обобщенной оценки поведения климатической системы и ее частей к вариациям параметров источников антропогенных воздействий и входных параметров математических моделей. Для этих целей предложен новый класс монотонных численных схем дискретно-аналитического типа [2]. Оптимальность прогнозирования понимается как бистационарность оценок целевых функционалов к вариациям функций состояния исследуемых процессов и соответствующих им сопряженных функций. Задачи решаются в рамках разработанной нами методики совместного использования моделей и данных наблюдений.

Следуя предлагаемой нами концепции прогноза, экологические риски рассчитываются с помощью комбинации методов прямого и обратного моделирования через функции чувствительности функционалов

состояния и методов факторного анализа с пространственно-временными информативными базисами. Причем базисы строятся с помощью ортогональной декомпозиции многомерных многокомпонентных полей, полученных как по фактической информации, так и по результатам моделирования функций состояния и функций чувствительности [3].

Проблема риска антропогенных воздействий для каждого объекта рассматривается в двух аспектах. В одном из них объект выступает как источник возмущений, а в другом — как рецептор (получатель) “чужих” воздействий. В первом случае основной вопрос состоит в поиске “областей-источников”, представляющих повышенную опасность для окружающих территорий, а во втором — в выявлении “областей-рецепторов”, имеющих повышенную уязвимость из-за климатических условий. Для формирования прогнозов регионального масштаба с учетом влияния глобальных процессов предложен новый тип моделей с направляющими фазовыми пространствами, которые, в свою очередь, строятся по информативным базисам глобального масштаба. Взаимодействие региональной модели с направляющими пространствами осуществляется с помощью методов вариационного усвоения данных [3].

Разработана методика обнаружения источников специфических антропогенных воздействий с помощью совместного использования моделей и данных мониторинга.

Демонстрируются результаты применения методики к решению задач по оценке экологической перспективы и рисков для конкретных регионов и объектов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-05-00673), Президиума РАН (программа № 16) и ОМН РАН (программа № 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пененко В. В., Цветова Е. А. Оптимальное прогнозирование природных процессов с оценкой неопределенности // Прикл. механика и техн. физика. 2009. № 2. С. 156–166.
2. Penenko V., Tsvetova E. Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 226. P. 319–330.
3. Penenko V., Tsvetova E. Orthogonal decomposition methods for inclusion of climatic data into environmental studies // Ecol. model. 2008. V. 217. P. 279–291.

Минимизация сопротивления тела обтекаемого потокком вязкого газа

Shape optimization problem for compressible viscous flow

Плотников П. И.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; plotnikov@hydro.nsc.ru*

Рассматривается стационарная пространственная задача об обтекании тела конечных размеров потоком вязкого баротропного газа. В предположении, что числа Маха и Рейнольдса достаточно малы доказываются локальные теоремы существования и единственности решения этой задачи. Также исследуется корректность сопутствующих краевых задач для транспортного уравнения в дробных пространствах Соболева. Проводится исследование зависимости решения задачи обтекания от формы тела. Доказывается дифференцируемость функционала сопротивления по форме обтекаемого тела. Дается вывод условий оптимальности в терминах сопряженного состояния. Доказывается корректность основных краевых задач для уравнений сопряженного состояния. В качестве приложений рассматривается задача о минимизации сопротивления обтекаемого тела при заданной подъемной силе и объеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Plotnikov P. I., Sokolowski J. Inhomogeneous boundary value problems for compressible Navier–Stokes equations, well-posedness and sensitivity analysis // SIAM J. Math. Anal. 2008. V. 40. P. 1152–1200.

Экономичная реализация метода Годунова на основе приближенного решения задач о распаде разрыва

An efficient implementation of Godunov's method by approximate solution of the Riemann problem

Прокопов Г. П.¹, Северин А. В.²

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Москва, Россия; ¹gavreeva@kiam.ru, ²severin@kiam.ru*

Известный метод Годунова [1, 2] для численного решения газодинамических задач пользуется широкой популярностью, в том числе, и для других уравнений математической физики (см., например, [3]). Его важнейшим структурным элементом является массовое решение задач о распаде разрыва (называемых также задачами Римана). Если такая элементарная, но достаточно громоздкая задача решается точно (заметим, что это необходимо далеко не всегда), требуются значительные вычислительные затраты. Ситуация еще ухудшается, если речь идет об уравнениях состояния, более сложных, чем идеальный газ или двухчленный УРС (см., например, [4]).

В связи с этим появились и продолжают появляться работы, предлагающие алгоритмы приближенного решения задач Римана (некоторые из них представлены в [3]). Одной из таких работ, содержащей описание экономичного алгоритма, является [5]. В ней представлены и результаты его апробирования, близкие к получаемым по методу Годунова с точным расчетом распадов разрывов, но при существенно меньших вычислительных затратах.

Тем не менее обоснованность алгоритма [5] и его приемлемость для расчета произвольных газодинамических задач вызвала определенные сомнения с точки зрения возможного поведения энтропии, изложенные в [6, 7]. Позже появилась работа [8], посвященная исследованию поведения энтропии в алгоритме, предложенном в [5].

Аналогично методу Годунова произвольный разрыв моделируется распадом на три разрыва: левый, контактный и правый. Некоторыми формулами задаются две массовые скорости: для левого и правого разрывов. После этого на основе соотношений на разрывах по простым явным формулам вычисляются скорости разрывов и значения параметров в секторах, описывающих распад. Результатом алгоритма является

выбор соответствующего сектора для назначения величин $(P, U, R, E)_*$ давления, скорости, плотности и внутренней энергии. Они и используются для вычисления потоков через границы ячеек сетки.

Особенностью алгоритма является то, что получаемые вспомогательные параметры, как правило, не удовлетворяют уравнению состояния. Это порождает, в частности, проблему неопределенности энтропии. Ее можно снять, если дополнить предлагаемый в [5] алгоритм операцией пересчета величины давления по уравнению состояния: $P^* = p(R_*, E_*)$. После этого величины потоков вычисляются по величинам (P^*, U_*, R_*, E_*) . Естественно, что тогда реализуется другое приближенное решение, так как P^* и P_* могут существенно различаться.

С точки зрения практики расчетов представляется целесообразным не противопоставление приближенных решений (какое “лучше?”), а параллельное проведение двух расчетов с использованием P^* и P_* . Сравнение их результатов может позволить делать выводы либо о приемлемой точности определения нужных характеристик процесса или конструкции, либо, напротив, о необходимости их уточнения.

В последнем случае напрашивается локализация “сомнительных” участков задачи, выделение их в отдельные счетные области и применение технологий типа многосеточных методов. В условиях существенно возросших возможностей вычислительной техники и развития параллельных технологий вычислений существенно упрощается и автоматизация таких расчетов.

Достоинством приближенного алгоритма является то, что он не использует описание структуры волны разрежения на основе римановых инвариантов и адиабаты Пуассона. Это позволяет существенно расширить круг сложных уравнений состояния. В качестве примера можно привести УРС Грюнайзена, для реализации которого в [4] потребовалась весьма затратная технология. В [5] упоминается об успешном применении приближенного алгоритма для сред с переменными теплофизическими свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, вып. 3. С. 271–306.
2. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

3. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
4. Моисеев Н. Я., Мухамадиева Т. А. Метод Ньютона для решения задачи о распаде произвольного разрыва в средах с уравнениями состояния общего вида // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 6. С. 1102–1110.
5. Сафронов А. В. Разностный метод решения нестационарных уравнений газовой динамики на основе соотношений на разрывах // Космонавтика и ракетостроение. 2006. Вып. 2(43). С. 152–158.
6. Прокопов Г. П. Необходимость контроля энтропии в газодинамических расчетах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 9. С. 1591–1601.
7. Прокопов Г. П. О приближенных реализациях метода Годунова. М., 2007. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН; № 15).
8. Сафронов А. В. Кинетические схемы для уравнений газодинамики // Вычисл. методы и программирование. 2009. Т. 10, № 1. С. 62–74.

Гомеоморфизмы клеточных разбиений

Homeomorphisms of regular cell complexes

Прохорова М. Ф.

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
Россия; pmf@imm.uran.ru

При разработке алгоритмов построения сеток для численных расчетов в областях сложной конфигурации нужно отображение часто строится локально для каждой ячейки сетки по отдельности, а затем требуется определить, является ли склеенное из отдельных кусочков отображение глобальным гомеоморфизмом. В [1] был сформулирован и доказан ряд общих критериев гомеоморфности для непрерывных отображений топологических пространств, топологических и триангулированных многообразий, а также критерии диффеоморфности для гладких отображений гладких многообразий. Здесь мы приводим два удобных для конкретного использования следствия теоремы 14 из [1].

Непрерывное отображение $f: A \rightarrow B$ будем называть *погружением*, если у любой точки $a \in A$ существует окрестность U такая, что $f|_U$ задает гомеоморфизм между U и $f(U)$.

Хаусдорфово топологическое пространство X со счетной базой называется *n -мерным топологическим многообразием*, если для любой точки $x \in X$ некоторая ее окрестность гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^n$ либо полупространству $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}, x_1 \geq 0\}$. Точки $x \in X$, имеющие окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$, называются *внутренними*. Подпространство X , состоящее из точек, не являющихся внутренними, называется *краем* ∂X многообразия X .

Пусть X, Y — связные топологические n -мерные ориентированные многообразия. Пусть задано разбиение $X = \cup_{i=1}^N X_i$ такое, что

1. для каждого X_i (называемого клеткой) задан гомеоморфизм φ_i из n_i -мерного замкнутого диска D^{n_i} на X_i ,
2. для любой клетки X_i её край $\partial X_i = \varphi_i(\partial D^{n_i})$ является объединением клеток меньшей размерности,
3. относительные внутренности клеток $\dot{X}_i = \varphi_i(\text{int} D^{n_i})$ не пересекаются (и, следовательно, образуют дизъюнктное разбиение X),
4. край ∂X многообразия X является клеточным подпространством данного разбиения, т. е. $\partial X = \cup_{i \in I} X_i$ для некоторого подмножества $I \subset \{1, \dots, N\}$.

В сеточном контексте X_i является ячейкой сетки при $n_i = n$ и гранью ячейки при $n_i < n$. Обозначим $X^k = \cup \{X_i : n_i \leq k\}$ k -мерный остов X .

Теорема 1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Тогда следующие два условия эквивалентны:

1. f является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом.
2. $f(\partial X) \subset \partial Y$; ограничение f на каждую открытую клетку $\dot{X}_i$ — погружение, причем если клетка n -мерна, то это погружение сохраняет ориентацию; и для некоторой точки $x_0 \in (X \setminus X^{n-1}) \cup (\partial X \setminus X^{n-2})$ выполняется $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$.

Теорема 2. Пусть $X = \cup_{i=1}^N X_i$ удовлетворяет перечисленным выше условиям; Y — связное ориентируемое n -мерное гладкое многообразие; $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, $f(\partial X) \subset \partial Y$; для всех i непрерывное отображение $f_i = f \circ \varphi_i: D^{n_i} \rightarrow Y$ непрерывно дифференцируемо на внутренности $\text{int} D^{n_i}$, причём его дифференциал невырожден (т. е. $\text{rang}(df_i) = n_i$) и сохраняет ориентацию при $n_i = n$; и для некоторой точки $x_0 \in (X \setminus X^{n-1}) \cup (\partial X \setminus X^{n-2})$ выполняется $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$. Тогда f является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом.

В отличие от теорем 7 и 9 работы [2], здесь ячейки могут быть произвольной формы (не налагается никаких требований выпуклости, плоских граней и т. п.); накладывается условие (“невырожденность”) лишь на поведение f внутри ячеек и граней, а не в их замыканиях; не требуется инъективности ограничения f на границы ячеек; достаточно наличия хотя бы одной точки с одноэлементным прообразом (не требуется, чтобы f гомеоморфно отображало ∂X на ∂Y); отображение определено на произвольном топологическом многообразии (а не на замкнутой области в $\mathbb{R}^n$) и действует в произвольное топологическое многообразие (а не в исходную или гомеоморфную исходной область).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-00173-а и № 09-01-00139-а), а также Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прохорова М. Ф. Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории построения сеток // Тр. Инст. математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 112–129.
2. Бобылев Н. А., Иваненко С. А., Казунин А. В. О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложениях к теории сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 6. С. 808–817.

**Intel®MKL PARDISO* — многофункциональный
прямой решатель разреженных систем линейных
уравнений**

**Intel®MKL PARDISO* — multifunctional parallel
direct solver for sparse systems of linear equations**

Пудов С. Г.¹, Соловьев С. А.²

ЗАО Интел А/О, Новосибирск, Россия;

¹sergey.g.pudov@intel.com, ²sergey.a.solovev@intel.com

Intel®Math Kernel Library PARDISO* — это широко известный параллельный прямой решатель из библиотеки Intel®MKL, который позволяет эффективно решать разреженные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на многоядерных системах с использованием современных математических алгоритмов, а также архитектурных особенностей процессоров Интел. Процесс решения СЛАУ с помощью PARDISO* состоит из трех этапов: переупорядочивание матрицы A , факторизация (LU -разложение измененной матрицы A') и решение полученной системы $LUx = y$. На первом этапе столбцы и строки исходной матрицы переставляются таким образом, чтобы максимально распараллелить этап факторизации, а также оптимизировать использование оперативной памяти для хранения LU факторов.

Наряду с прямым решателем, Intel®MKL PARDISO* включает в себя несколько дополнительных функциональных возможностей, которые позволяют улучшить надежность и повысить производительность решения СЛАУ. Первая из них позволяет одновременно решать несколько разреженных СЛАУ, матрицы которых имеют одну и ту же структуру. При этом, во-первых, уменьшается время решения задач, поскольку первый этап выполняется только один раз; во-вторых, существенно уменьшается объем потребляемой памяти, поскольку структура LU разложения общая для всех матриц и хранится в отдельном массиве. Вторая — поддержка итерационных (CG или CGS) алгоритмов решения СЛАУ. Такая функциональность актуальна для решения нестационарных задач, в которых необходимо получить набор решений последовательности систем уравнений, незначительно отличающихся друг от друга. Для решения каждой такой системы используется итерационный (CG или CGS) алгоритм, а в качестве предобуславлива-

теля используется LU разложение одной из предыдущих матриц. Если не удастся найти решение за определенное количество шагов, то входная матрица решается с помощью прямого алгоритма, а LU разложение сохраняется для предобуславливания последующих систем. Третья, немаловажная функциональность Intel®MKL PARDISO* — это решение плохообусловленных СЛАУ. Для этих целей пользователю предлагается использовать несколько вспомогательных опций. Например, выбор ведущего элемента в процессе LU -разложения; группировка больших элементов исходной матрицы A около главной диагонали путем дополнительной перестановки столбцов и строк; нормировка исходной матрицы A . В процессе этих изменений создаются векторы перестановок и масштабируемости, которые используются на этапе решения системы $LUx = b$. Если же в процессе факторизации, на главной диагонали встречается нулевой элемент (меньше заданного ϵ -критерия), то он заменяется δ -значением. Такое возможно благодаря использованию опции усиления главной диагонали. В результате получаем L^*U^* разложение измененной матрицы $A^* \neq A$. Такое разложение не даст точного решения исходной системы $Ax = b$, но является хорошим предобуславливателем для итерационных методов. Используя это свойство, для решения исходной системы $Ax = b$ применяется итерационное уточнение. В качестве начального приближения задается решение системы $L^*U^*x_0 = b$, а матричные умножения на каждом итерационном шаге производятся с двойной точностью. Помимо этого, в последних версиях Intel®MKL PARDISO* добавлена возможность ускорения процесса решения СЛАУ путем понижения точности арифметических вычислений до одинарной (Intel®MKL 10.2), а также возможность решения очень больших СЛАУ, LU факторы которых уже не помещаются в оперативную память — “Out-Of-Core” (Intel®MKL 10.0). Такой широкий набор функциональности ставит Intel®MKL PARDISO* на один уровень с его основными конкурентами, такими как TAUCS и MUMPS, в то время как по производительности и масштабируемости он в большинстве случаев показывает лучшие результаты.

Вязкие течения в областях с многосвязной границей

Viscous flow in domains with multiply connected boundary

Пухначев В. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; pukhnachev@gmail.com

Рассматривается стационарная задача для системы уравнений Навье — Стокса

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) с границей Σ , состоящей из нескольких связных компонент $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$. Вектор скорости $\mathbf{v}$ удовлетворяет краевому условию

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_i(x), \quad x \in \Sigma_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где $\mathbf{a}_i$ — заданные функции. Следствием уравнения неразрывности является соотношение

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{n}_1 d\Sigma_1 + \dots + \int_{\Sigma_m} \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{n}_m d\Sigma_m = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{n}_i$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ_i . Если вместо (3) выполнено более сильное условие

$$q_i \equiv \int_{\Sigma_i} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{n}_i d\Sigma_i = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

то при надлежащих условиях гладкости и согласования для задачи (1), (2) имеет место теорема существования решения. Впервые такая теорема была доказана Ж. Лерэ (1933) на основе того факта, что для любых решений задачи величина интеграла Дирихле

$$I = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} dx$$

конечна. Последнее утверждение было установлено Лерэ рассуждением от противного. Э. Хопф (1941) получил априорную оценку величины I

при выполнении условия (4). Если $m = 1$, условия (3) и (4) совпадают. Вопрос о разрешимости задачи (1), (2) в случае $m > 1$ остается открытым.

Начиная с работы Р. Финна (1961), были получены теоремы существования для задачи (1), (2) в предположении малости величин q_i (Х. Моримото, Х. Фуджита, С. Укай, В. Борхерс, К. Пилецкас). Первый нелокальный результат принадлежит Ч. Эмику (1984), который рассмотрел плоскую задачу в криволинейном кольце при следующих условиях симметрии: область Ω симметрична относительно оси x_1 ; функции v_1 и p являются четными по переменной x_2 , а функция v_2 нечетна по этой переменной. Результат Эмика не содержал априорной оценки интеграла Дирихле. Такая оценка и вытекающая из нее теорема существования при сформулированных условиях симметрии были получены Х. Фуджита (1997) с помощью предложенной им конструкции виртуальной дрены.

В докладе формулируется теорема существования решения осесимметричной задачи (1), (2). Выделен класс плоских областей, для которых оценка интеграла Дирихле может быть получена без предположения о симметрии течения. Рассмотрен предельный случай плоской задачи, когда Ω есть односвязная область с выколотой точкой, а величина $|q_1|\nu^{-1}$ достаточно мала. Здесь получена теорема существования решения задачи (1), (2) с бесконечным интегралом Дирихле векторного поля $\mathbf{v}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-2260.2008.1).

О некоторых обратных задачах для эллиптических уравнений и систем

On some inverse problems for elliptic equations and systems

Пятков С. Г.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;
pyatkov@math.nsc.ru

Рассматривается задача об определении вместе с решением правой части специального вида для системы уравнений

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} A_{ij}(x) u_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(x) u_{x_i} + A_0(x) u = f(x) \cdot q(x_n) + f_0(x), \quad (1)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $(x', x_n) \in Q = G \times (0, T)$, G — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$, A_{ij} — симметрические матрицы размерности $m \times m$, $f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $f_0(x) = (f_1^0, f_2^0, \dots, f_m^0)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ и $f(x) \cdot q(x_n)$ — вектор $(f_1 q_1, f_2 q_2, \dots, f_m q_m)$. Уравнение (1) дополняется краевыми условиями:

$$u|_S = \varphi(x), \quad S = \partial Q. \quad (2)$$

Пусть $\alpha_i \in [0, T]$ ($i = 0, 1, \dots, s$) — некоторый набор точек, $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_s = T$. Будем искать решение задачи (1), (2) в классе функций u , удовлетворяющих краевому условию Дирихле (2) и таких, что

$$[u]_{\alpha_k} = 0, \quad \left[\sum_{j=1}^n A_{nj} u_{x_j} + \sigma u \right]_{\alpha_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s-1, \quad (3)$$

где как обычно $[v(x', x_n)]_{\alpha_k} = v(x', \alpha_k + 0) - v(x', \alpha_k - 0)$ — скачок функции при переходе через точку α_k . В частности, в класс систем (1) входит система уравнений Ламэ и ряд других систем теории упругости, где $n = m = 3$. Условие (3) служит аналогом условия непрерывности поля смещений и напряжений в горизонтально-слоистой среде, где при переходе из одного слоя во второй модули непрерывности (элементы матриц A_{ij}) могут иметь разрывы первого рода. Краевые условия (2), (3) дополняются условиями переопределения. Мы рассмотрим два

типа условий переопределения: одно интегральное и второе локальное, т. е. значение решения задается в некоторой точке области G . Условия такого типа являются стандартными. Система (1) предполагается равномерно эллиптической, т. е. существует постоянная $\delta > 0$:

$$\sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x)\xi_j, \xi_i) \geq \delta \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right) \quad \forall x \in Q, \quad \forall \xi_i \in R^m. \quad (4)$$

Условие Дирихле (2) также может быть заменено на условие второй или третьей краевой задачи. В общем случае, в теории упругости предполагается симметричность матриц $A_{ij} + A_{ji}$ и слабая эллиптичность системы. Мы требуем выполнения более сильного условия (4), которое выполнено для многих систем теории упругости, в частности для системы Ламэ.

Исследование дихотомии линейных почти периодических систем прямым методом Ляпунова

A study of dichotomy of linear almost periodical systems by the direct Lyapunov method

Романовский Р. К., Бельгарт Л. В.

Омский государственный технический университет, Омск, Россия;
Belgart@mail.rambler.ru

1. Взаимным наклоном подпространств E_1, E_2 пространства $E = \mathbb{C}^N$ будем называть [1] число $Sn(E_1, E_2) = \inf |x_1 - x_2|, x_k \in E_k, |x_k| = 1$. Здесь и далее $|\cdot|$ — эрмитова норма в E . Будем говорить, что для системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N, \quad (1)$$

с непрерывной на оси матрицей $A(t)$ и матрицей Коши $U(t)$ имеет место свойство экспоненциальной дихотомии (э-дихотомии), если фазовое пространство E распадается в прямую сумму подпространств E_1, E_2 так, что при некоторых $\mu, \nu > 0$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} 1) \ x \in E_1 &\Rightarrow |U(t)x| \leq \mu e^{-\nu(t-\tau)} |U(\tau)x| \quad (t \geq \tau), \\ 2) \ x \in E_1 &\Rightarrow |U(t)x| \leq \mu e^{-\nu(\tau-t)} |U(\tau)x| \quad (t \leq \tau), \end{aligned}$$

и при этом $Sn(E_{1t}, E_{2t}) \geq \text{const} > 0$.

2. Обозначим J класс эрмитовых индефинитных гладких ограниченных на оси матриц $G: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(N, \mathbb{C})$ с отделённым от нуля $|\det G|$. Рассмотрим эрмитову форму $v(x, t) = \langle G(t)x, x \rangle, G \in J$. Производная формы v вдоль траекторий системы (1)

$$\dot{v}(x, t) = \langle F(t)x, x \rangle, \quad F = \dot{G} + GA + A^*G. \quad (2)$$

Известно [2]: для того, чтобы система (1) с непрерывной ограниченной на оси матрицей $A(t)$ была э-дихотомична, необходимо и достаточно существование матрицы $G \in J$ такой, что выполняется неравенство $F \leq -mI, m > 0$. Этот результат повторён в [3]. В классе почти периодических (п. п.) систем (1) имеет место следующее усиление [4].

Теорема 1. *1. Если для системы (1) с п. п. матрицей $A(t)$ существует матрица $G \in J$ такая, что 1°) $G, \dot{G}$ п. п., 2°) $F \leq 0$ ($t \in \mathbb{R}$), 3°) форма (2)*

отлична от тождественного нуля на каждом решении $x(t) \neq 0$ системы (1) : $\dot{v}(x(t), t) \not\equiv 0$, то система (1) ε -дихотомична.

II. Если система (1) с п. п. матрицей $A(t)$ ε -дихотомична, то существует матрица $G \in J$ со свойствами 1°–3°.

В основе доказательства лежат свойства некоторых функций на компакте $H \times S$, где H — оболочка п. п. матрицы A ; S — единичная сфера в E .

3. Рассмотрим векторное уравнение второго порядка

$$\ddot{u} + p(t)\dot{u} + q(t)u = 0, \quad u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N = E \quad (3)$$

с п. п. матрицами p, q . Будем говорить, что уравнение (3) ε -дихотомично, если этим свойством обладает эквивалентная система (1), где

$$x = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -q & -p \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. Пусть для уравнения (3) с п. п. матрицами p, q выполняются условия

$$q^* = q, \quad q \leq -mI \quad (m > 0), \quad h = \dot{q} + pq + qp^* \geq 0, \quad \det h \neq 0.$$

Тогда уравнение (3) ε -дихотомично.

Рассматриваемая в доказательстве матрица F вырождена и не удовлетворяет требованию $F \leq -mI$ (см. п. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. Майзель А. Д. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. УрПИ. Сер. мат. 1954. Т. 6, № 51. С. 20–50.
3. Кулик В. Л. Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 1. С. 43–49.
4. Романовский Р. К., Бельгарт Л. В. Об экспоненциальной дихотомии линейных систем с почти периодической матрицей // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1, С. 190–198.

**Термодинамически согласованные законы
сохранения моделей многофазных сплошных сред**
**Thermodynamically compatible conservation laws
for models of multiphase media**

Роменский Е. И.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; evrom@math.nsc.ru*

В настоящее время широко применяются модели сжимаемых двухфазных течений разработанные на основе традиционного рассмотрения течения как смеси двух фаз, каждая из которых подчиняется своим законам баланса массы, импульса и энергии. При этом взаимодействие фаз в вышеуказанных уравнениях баланса учитывается правыми частями, как алгебраическими, так и дифференциальными. Определяющие уравнения такого типа моделей являются гиперболическими, но не все уравнения могут быть записаны в дивергентном виде.

Использование формализма термодинамически согласованных систем [1] позволяет сформулировать гиперболическую систему определяющих уравнений многофазных сред в дивергентной форме. При этом среда рассматривается как континуум с параметрами состояния характеризующими многофазность. Применение данного подхода проиллюстрировано примерами некоторых моделей двухфазных сред. Приведены также результаты расчетов тестовых задач, которые показывают хорошее совпадение с известными аналитическими и численными решениями других авторов а также с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00221), Программы Президиума РАН (проект № 2) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-4292.2008.1)

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.

Об одном методе получения уравнения поверхности ударной волны

On one method of deducing the equation for a shock wave surface

Рубина Л. И.¹, Ульянов О. Н.²

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
Россия; ¹rli@imm.uran.ru, ²uon@imm.uran.ru

Для нелинейных уравнений в частных производных вида

$$L(x_i, u, u_i^{(1)}, u_{ij}^{(2)}, \dots, u_{i_1 \dots i_m}^{(m)}) = 0, \quad (1)$$

где x_i , $i = 1, \dots, n$ — исходные независимые переменные уравнения, u — неизвестная функция (решение уравнения), $u_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}$ — частные производные функции u (верхний индекс указывает порядок производной, нижние индексы — номера независимых переменных, по которым берется производная), m — порядок уравнения ($1 \leq k \leq m$); вводятся такие независимые переменные ψ , α_j , $j = 1, \dots, n-1$, при переходе к которым решение уравнения зависит только от ψ .

Тогда $\psi(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$ является поверхностью уровня функции, представляющей решение уравнения [1].

В новых переменных уравнения (1) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^N A_k(u, u', u'', \dots, \overbrace{u'' \dots'}^m) B_k(x_i, \psi, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = 0, \quad (2)$$

где

$$A_k = h_k(\psi), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$B_k(x_i, \psi, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = g_k(\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}).$$

Здесь и далее штрих (') означает дифференцирование по ψ .

Доказано, что уравнение (2) выполняется тождественно по независимым переменным в некоторой области изменения $\{\psi, \alpha_j\} \subset X$, тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$h_1 + \sum_{k=2}^N h_k f_{k-1}(\psi, \alpha_1^o, \alpha_2^o, \dots, \alpha_{n-1}^o) = 0, \quad f_{k-1} = \frac{g_k}{g_1}, \quad \{\psi, \alpha_j^o\} \subset X,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \psi} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Описанный подход использовался для решения ряда задач для нелинейных уравнений в частных производных [2].

В докладе предполагается детально остановиться на решении одной из таких задач — задаче о примыкании плоского нестационарного течения политропного газа к области покоя или постоянного движения через поверхность ударной волны.

Для уравнения потенциала получены уравнение вида (2) и формулы перехода к новым независимым переменным. Выписаны уравнения поверхностей ударных волн, отделяющих рассматриваемое потенциальное течение от областей покоя и постоянного движения [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы совместных проектов фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубина Л. И. Метод построения линий уровня для получения точных решений нелинейных уравнений в частных производных // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: Тез. докл. конф. Абрау-Дюрсо, 2004. С. 89–90.
2. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. О применении метода поверхностей уровня для построения решений нелинейных уравнений // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: Тез. докл. конф. Абрау-Дюрсо, 2008. С. 53–54.
3. Рубина Л. И., Ульянов О. Н. О решении уравнения потенциала // Тр. Инст. математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 130–145.

Метод разностных потенциалов The method of difference potentials

Рябенский В. С.

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Москва, Россия; ryab@keldysh.ru*

В докладе будут описаны идея, возможности и примеры реализованных приложений метода разностных потенциалов к дискретному моделированию и численному решению ряда актуальных задач математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рябенский В. С. Метод разностных потенциалов и его приложения. М.: Физматлит, 2002.

О некоторых задачах классической электродинамики

On some problems of the classical electrodynamics

Садовой Г. С.

*Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия; sadovoi_g@mail.ru*

При исследовании мощных электронных приборов (см., например, [1]) возникают задачи расчёта движения электронов в самосогласованных электромагнитных полях, изменяющихся в течение времени пролета электронов. Известно также [2], что даже при движении точечного заряда в однородном электрическом поле физические процессы оказываются весьма сложными и для их интерпретации надо использовать законы электродинамики. Если же при расчете необходимо учитывать собственный пространственный заряд электронов, то аналитически решить соответствующую самосогласованную задачу уже при самой простой геометрии поля невозможно, поэтому приходится использовать численные методы.

В докладе рассматриваются задачи о взаимодействии нерелятивистских электронов, движущихся в вакууме, с нестационарными электромагнитными полями. В рамках классической электродинамики при общей постановке такие задачи можно решать, объединив уравнения Максвелла и уравнения механики.

В докладе рассмотрены 4 задачи математической физики для этого случая.

ЗАДАЧА I. Движение тонкого слоя электронов между двумя плоскими электродами (образующими вакуумный зазор), подключенными к электрической цепи. Из плоскости одного электрода вылетает дискретный тонкий слой электронов, имеющих одинаковые начальные скорости. Начальные условия для токов и напряжений в цепи в момент вылета известны. Необходимо рассчитать переходной процесс в этой цепи за интервал времени, пока электроны находятся в промежутке между электродами. При решении надо учитывать ток, наводимый электронами во внешней цепи. За основу приняты уравнения теории цепей и уравнение движения электронов в нестационарном поле. Задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Показано, что в зависимости от значений безразмерных параметров их величин характер процессов качественно разный. В частности, возможно возникновение механических колебаний слоя.

ЗАДАЧА II. Задача аналогична задаче I за исключением того, что из одного электрода в течение определённого интервала времени вылетают электроны, образующие импульс конвекционного тока. Функция тока и функция начальных скоростей электронов заданы. За основу приняты уравнения Максвелла и уравнения движения электронов с учетом влияния пространственного заряда электронов. Эти уравнения сведены к функциональным уравнениям с разрывными правыми частями. Решение полученной системы рассматривается как обобщенное решение уравнений по аналогии с классом задач, исследованных в [3].

ЗАДАЧА III. Постановка задачи отличается от предыдущих тем, что из одного электрода происходит электронная эмиссия при выполнении некоторого условия на поверхности этого электрода.

ЗАДАЧА IV. Рассматривается движение электронов в устройстве, состоящем из трёх зазоров.

Во всех перечисленных задачах области определения искомых функций ограничены. Решения надо искать в течение некоторого временного интервала, определяемого решением задачи. Справедливы интегральные соотношения, которые используются при построении решений. В задачах II–IV физические процессы периодически повторяются. Предложен численный метод решения функциональных уравнений. Приведены результаты моделирования.

В докладе использованы некоторые результаты, опубликованные в монографии [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Месяц Г. А. Импульсная энергетика и электроника. М.: Наука, 2004.
2. Гайдуков Г. Н., Абрамов А. А. Об интерпретации закона сохранения энергии при движении точечного заряда в однородном электрическом поле // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178, № 2. С. 171–174.
3. Соболев С. Л. Избранные труды. Т. I. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Ин-т математики, 2003. С. 448–463.
4. Садовой Г. С. Моделирование систем с переменным запаздыванием. Новосибирск: НГТУ, 1994.

О резонансных свойствах моментной упругой среды

On resonance properties of the couple–stress elastic medium

Садовская О. В.¹, Садовский В. М.²

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН,

Красноярск, Россия; o_sadov@icm.krasn.ru

²Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;

sadov@icm.krasn.ru

Математическая модель моментного упругого континуума Коссера, учитывающая вращательное движение частиц микроструктуры, сводится к линейной симметрической t -гиперболической системе

$$A\dot{U} = B^1U_{,1} + B^2U_{,2} + B^3U_{,3} + QU + G,$$

в которой U — вектор-функция, составленная из компонент векторов скорости и угловой скорости, несимметричных тензоров напряжений и моментных напряжений. В пространственном случае она включает в себя 24 уравнения относительно 24-х неизвестных функций. Анализ разрывных решений показывает, что кроме продольных и поперечных волн эта модель описывает еще два типа ударных волн — крутильные волны и волны вращательного движения.

Оказывается, в отличие от классической теории упругости, моментная теория предсказывает появление собственных колебаний вращательного движения частиц микроструктуры материала на фронтах волн нагружения с частотой, зависящей от момента инерции частиц и от феноменологического параметра континуума Коссера, характеризующего несимметрию тензора напряжений. В случае крутильных волн это следует из анализа общего решения телеграфного уравнения, описывающего процесс распространения волн в изотропной упругой среде. Для поперечных волн аналогичный эффект исследован численно. Выполнены расчеты возбуждения резонансов на частоте собственных колебаний вращательного движения частиц в плоском слое из вязкоупругого материала с моментными свойствами при помощи спектрально-разностного метода. Для идеально упругого материала получены точные зависимости амплитуды угловой скорости от толщины слоя.

Разработан вычислительный алгоритм для решения трехмерных динамических задач моментной теории упругости [1, 2]. Чтобы получать корректные численные решения, расчеты необходимо выполнять на сетках, размер ячеек которых значительно меньше характерного размера частиц микроструктуры. Поэтому алгоритм реализован в виде комплекса параллельных программ для многопроцессорных вычислительных систем. Алгоритм основан на методе расщепления по пространственным переменным и времени. Одномерные системы уравнений решаются с помощью монотонной ENO-схемы. Используется библиотека передачи сообщений MPI и технология SPMD. Тестирование комплекса программ выполнено путем сопоставления результатов расчетов с точным решением двумерной задачи о распространении поверхностных волн Рэлея в среде Коссера и с точными решениями, описывающими одномерные движения с плоскими волнами.

Проведены расчеты трехмерной задачи Лэмба о действии сосредоточенной нагрузки под углом к поверхности однородного упругого полупространства, а также задачи о действии сосредоточенной импульсной нагрузки, периодической по времени. Сформулированы условия симметрии, позволяющие многократно снизить объем вычислений. На сейсмограммах, построенных по результатам расчетов, идентифицированы четыре типа волн, характерные для моментной среды — продольные, поперечные, крутильные и вращательные волны; обнаружены собственные колебания вращательного движения частиц.

Результаты анализа колебательных процессов в пространственных задачах показывают, что в моментной упругой среде существует не зависящая от размеров исследуемой области собственная частота акустического резонанса материала, которая проявляется при определенных условиях возмущения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00148), комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 и СО РАН (междисциплинарный интеграционный проект № 40).

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовская О. В., Садовский В. М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: Физматлит, 2008.
2. Садовская О. В. Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 2. С. 313–322.

О моделировании эффекта трансформации частот упругих волн

Modelling of the phenomenon of transformation of the frequency of elastic waves

Садыков А. Д.¹, Роменский Е. И.²

¹Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
asilkhan@rambler.ru

²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; evrom@math.nsc.ru

В докладе обсуждается проблема моделирования так называемого эффекта трансформации частот акустических волн. Данное явление наблюдается, например, при низкочастотном (~ 10 Гц) виброакустическом воздействии на поверхность земли вблизи нефтесодержащего пласта, в результате которого в пласте порождаются волны килогерцового диапазона.

В основу моделирования данного явления положена гипотеза о том, что трансформация частот происходит в результате взаимодействия волновых полей с неоднородностями среды (включениями, трещинами и т. д.), которые мы будем называть дефектами. Множество распределенных дефектов в континуальном приближении будем описывать полем плотности дефектов и полем потока их взаимодействия. При этом принимается во внимание, что внутри элемента сплошной среды волны напряжений воздействуют на поле дефектов, вызывая поток полевого взаимодействия дефектов между собой. Этот поток, в свою очередь, порождает упругие волны, генерируя напряжения в элементе среды. При этом происходит обмен энергией между полем упругих напряжений и полем дефектов.

Модель такой среды [1] строится на основе формализма термодинамически согласованных систем [2]. Возникающие дифференциальные уравнения записываются в виде системы уравнений нелинейной теории упругости, дополненной уравнениями баланса полей плотности дефектов и потока их взаимодействия. Эти две системы полевых уравнений замыкаются правыми частями описывающими взаимодействие полей и диссипацию. При этом полная система уравнений удовлетворяют первому и второму законам термодинамики (закону сохранения энергии и

возрастания энтропии соответственно). Кроме этого, уравнения могут быть приведены к симметрической гиперболической форме, что обеспечивает локальную по времени разрешимость задачи Коши.

Для изучения возможности описания эффекта трансформации частот акустических колебаний рассмотрен одномерный вариант линеаризованных уравнений:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{K} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= -\beta q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial q}{\partial t} + r \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \beta \sigma - \chi q,\end{aligned}$$

где u, σ — скорость и напряжение вдоль оси x ; θ, q — плотность дефектов и поток их взаимодействия; ρ, K, R, r, β — константы материала, χ — нелинейная функция параметров состояния.

Была проведена серия численных экспериментов для некоторых видов нелинейной функции χ , которые показали, что модель может быть использована для описания эффекта трансформации частот.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00221), Программы Президиума РАН (проект № 2), Программы АВЦП Рособразования (проект № 2.1.1.4918), Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-4292.2008.1)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Romenski E. I.* Thermodynamics and balance laws for processes of inelastic deformations // Proc. WASCOW 2001, 11th Conf. on Waves and Stability in Continuous Media, Porto Ercole, Italy, 3–9 June 2001. World Scientific, 2002. P. 484–495.
2. *Годунов С. К., Роменский Е. И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.

Решение общей смешанной задачи для уравнения Лаврентьева — Бицадзе с оператором Бесселя методом интегральных уравнений

Solution of general mixed problem for the Lavrentiev–Bitsadze equation with the Bessel operator by integral equations method

Сафина Р. М.

Татарский государственный гуманитарно-педагогический
университет, Казань, Россия; rimma77705@mail.ru

Рассмотрим уравнение Лаврентьева — Бицадзе с оператором Бесселя

$$E_B(u) \equiv B_x u + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где $B_x = x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} (x^k \frac{\partial}{\partial x})$ — оператор Бесселя, $k > 0$ — постоянная.

Пусть Γ — спрямляемая жорданова кривая с концами в точках $A(0, 1)$ и $B(1, 0)$, лежащая в первой четверти координатной плоскости. Обозначим через D область, ограниченную кривой Γ , осью Oy и характеристикой $x - y = 1$ с концами в точках $B(1, 0)$ и $D(0, -1)$.

Части области D , в которых $y > 0$ и $y < 0$, обозначим соответственно через D^+ и D^- . С помощью характеристики OC : $y = -x, \frac{1}{2} \leq x \leq 1$, область D^- разбиваем на две области D_1^- и D_2^- , где D_1^- — область, ограниченная отрезками $\Gamma_0 = OB$, OC и $BC = \Gamma_2$; $D_2^- = D^- \setminus D_1^-$.

В данной работе изучается общая смешанная задача об отыскании четной по x функции $u(x, y)$, удовлетворяющей условиям:

$$u \in C^2(D^+ \cup D_1^- \cup D_2^-) \cap C^1(D^+ \cup D_1^- \cup \Gamma_0) \cap C(\overline{D}); \quad (2)$$

$$E_B(u) = 0, \quad (x, y) \in D^+ \cup D_1^- \cup D_2^-; \quad (3)$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(\xi, \eta), \quad u|_{\Gamma_2} = u|_{y=x-1} = 0. \quad (4)$$

Из условия (2) следует, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям склеивания:

$$u(x, 0-0) = u(x, 0+0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0-0) = u_y(x, 0+0) = \nu(x). \quad (5)$$

Теорема. *Общая смешанная задача не может иметь более одного решения.*

При решении общей смешанной задачи нужно отдельно решить задачу N для уравнения (1) в области D^+ и задачу Коши для уравнения (1) в области D^- , считая как бы известными функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

Решение задачи N при граничных условиях

$$u|_{\Gamma} = \varphi(\xi, \eta), \quad u_y|_{y=0} = \nu(x)$$

может быть представлено в виде

$$u(x, y) = - \int_0^1 G(\xi, 0; x, y) \nu(\xi) \xi^k d\xi - \int_{\Gamma} \varphi(\xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial n_p} \xi^k d\Gamma, \quad (6)$$

где $G(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле для области D^* , ограниченной кривой Γ , ее зеркальным отражением в прямой $y = 0$ и частью Γ_1^* прямой $y = 0$.

А решение задачи Коши при начальных условиях

$$u|_{y=0} = \tau(x), \quad u_y|_{y=0} = \nu(x)$$

— в виде

$$u(x, y) = a_k \left\{ k|y| \int_0^1 \tau(\eta) T_{\eta}^x (y^2 - \eta^2)^{-\frac{k+2}{2}} \eta^k d\eta + \int_0^1 \nu(\eta) T_{\eta}^x (y^2 - \eta^2)^{-\frac{k}{2}} \eta^k d\eta \right\}. \quad (7)$$

Полагая $y = 0$ в решении (6) задачи N и $y = x - 1$ в решении задачи Коши (7), с учетом условий (4) и (5), получаем функциональные уравнения относительно $\tau(x)$ и $\nu(x)$. В результате исключения $\nu(x)$ из этих функциональных уравнений имеем

$$\tau(x) = \lambda \int_0^1 \tau(\xi) K(\xi, x) \xi^k d\xi + F(x). \quad (8)$$

Уравнение (8) является интегральным уравнением со слабой особенностью. Существование единственного решения уравнения (8) следует из единственности решения общей смешанной задачи для уравнения (1).

О построении разностных схем высокого порядка аппроксимации, имеющих аналоги законов сохранения

On construction of high-order difference schemes admitting discrete analogues of conservation laws

Сказка В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; skazka@math.nsc.ru

Пусть имеется система гиперболических уравнений первого порядка, у которой (при выполнении соответствующих краевых условий) имеется интегральный закон сохранения. Одним из путей численного решения такого рода задачи является построение разностной схемы по пространственным переменным и решения получившейся системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для устойчивости решения системы желательно, чтобы у вновь получившейся системы обыкновенных дифференциальных уравнений был первый интеграл, являющийся аналогом закона сохранения для исходной задачи.

С математической точки зрения формулой, лежащей в основании получения интегральных законов сохранения, является известная формула интегрирования по частям. Следовательно, если мы хотим построить разностную схему, для которой выполнен аналог интегрального закона сохранения, нам необходимо уметь строить разностные аналоги производных, для которых выполняется формула, аналогичная формуле интегрирования по частям.

Предлагается способ нахождения формул вычисления разностных производных четвертого порядка аппроксимации, для которых справедлив аналог формулы интегрирования по частям. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на $N - 1$ частей равномерной сеткой, т. е. в качестве узлов выберем точки $x_i = (i - 1)/(N - 1)$, $i = 1, \dots, N$. Обозначим $u_n = u(x_n)$, $v_n = v(x_n)$. В качестве аналога интеграла будем использовать следующее скалярное произведение: $(u, v)_D = h \sum_{n=1}^N D_n u_n v_n$, где $D_n > 0$ — некоторые константы, подлежащие также определению, $h = 1/(N - 1)$. Строится аналог разностных производных u_h , обладающий следующими свойствами. Первое — это аналог формулы интегрирования по частям.

$$(u_h, v)_D + (u, v_h)_D = u_N v_N - u_0 v_0.$$

Другое свойство — это аппроксимация четвертого порядка первой производной.

Аппроксимация четвертого порядка была выбрана нами, помимо обычных соображений точности, еще и по следующей причине. При использовании разностных схем второго порядка аппроксимации в двумерных задачах возникает следующая проблема [2]. У разностного оператора, аппроксимирующего дифференциальный оператор, возникают “паразитические собственные векторы”. Т. е. там, где у дифференциального оператора было однократное собственное число, у приближенного разностного оператора может возникать, например, четырехкратное собственное число, причем собственные векторы, взятые по отдельности, не представляют из себя ничего похожего на значения, взятые из гладких функций. Вид их “пилообразный”. При использовании разностных операторов четвертого порядка, этой проблемы замечено не было.

Построенные таким образом коэффициенты применялись для расчета задачи теории упругости в цилиндрически симметричной постановке “скорости-напряжения” [3]. Если рассматривается среда, содержащая точку $r = 0$, то идеология построения разностной схемы, оставаясь в целом похожей, имеет некоторые отличия. За недостатком места мы не останавливаемся на этом вопросе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00221), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (№ 2), СО РАН (проекты 19, 22) и проекта АВЦП Рособразования № 2.1.1.4918.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
2. Годунов С. К., Жуков В. Т., Федоритова О. Б. Метод расчета инвариантных подпространств для симметрических гиперболических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 6. С. 1041–1053
3. Коновалов А. Н. Динамическая задача теории упругости в постановке “скорости-напряжения” // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 2. С. 238–248.

Численное моделирование аномальной теплопроводности в высокотемпературной плазме **Numerical simulation of anomalous heat conductivity in high-temperature plasma**

Снытников А. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; snytav@ssd@sscc.ru

Динамика высокотемпературной плазмы описывается бесстолкновительным кинетическим уравнением Власова. Существуют два подхода к численному решению этого уравнения: гидродинамический и кинетический. Для того, чтобы моделировать теплопроводность плазмы в гидродинамическом приближении, необходимо сделать предположение что функция распределения входящая в уравнение Власова, является равновесной. Кинетический подход в меньшей степени зависит от начальных предположений, кроме того, известно, что в реальных экспериментах, в которых наблюдается эффект аномальной теплопроводности, плазма не является равновесной. В рамках кинетического подхода уравнение Власова решается с помощью метода частиц.

В методе частиц каждая частица становится носителем некоторого набора характеристик среды, таких как заряд, масса, импульс, кинетическая энергия и т. д. Для того, чтобы аналогичным образом связать с каждой модельной частицей определенную температуру, или для того, чтобы моделировать теплопроводность плазмы в гидродинамическом приближении, необходимо сделать некоторое предположение относительно вида функции распределения в этой точке пространства (например, как это делается в методе SPH). Другой вариант — вычисление температуры по ансамблю частиц, но при этом возникает проблема отделения температуры от нефизических эффектов (шумов), возникающих в методе частиц. Основной источник нефизических шумов в методе частиц-ячейках — наличие сетки, на которой вычисляются распределения плотности, скорости, тока.

На сегодняшний день нет единого подхода к решению проблемы нефизических шумов, нет даже общепринятого количественного определения, что такое нефизический шум в методе частиц. Для уменьшения уровня нефизических шумов чаще всего либо увеличивают количество частиц, что не всегда возможно в силу ограниченности ресурсов

ЭВМ, либо модифицируют форму частицы. Трудность заключается в том, что при этом меняется и значение модельной температуры.

Актуальность настоящей работы связана с тем, что в экспериментах на многопробочной магнитной ловушке ГОЛ-3 (ИЯФ СО РАН) наблюдается понижение электронной теплопроводности на 2–3 порядка по сравнению с классическим значением. Использование метода частиц в ячейках в данной работе обусловлено тем, что этот метод позволяет вычислить неравновесную функцию распределения электронов плазмы. Однако для метода частиц в ячейках не известны критерии, позволяющие понять, насколько правильным является полученное в расчетах распределение температуры, и таким образом, корректность моделирования теплопроводности также оказывается под вопросом. В данной работе предлагается методика расчета температуры в методе частиц в ячейках с обоснованием корректности.

Проведены расчеты по моделированию температуры в плазме с применением предложенной методики. Показано, что поведение температуры одно и то же при различных сочетаниях физических параметров, что количество модельных частиц не меняет принципиально значения температуры, а также что стохастические перемещения модельных частиц не оказывают определяющего влияния на распределение температуры. Таким образом, поведение температуры в расчетах носит физический характер. Расчеты проводились на суперкомпьютере МВС-100000.

Обнаружен эффект понижения классической теплопроводности при инжекции в плазму мощного электронного пучка. Показано, что релаксация пучка приводит к увеличению инкремента плазменных волн и возникновению модуляций плотности плазмы. Это соответствует реальным экспериментам: предполагается, что именно за счет рассеяния электронов на модуляциях плотности понижается электронная теплопроводность.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00615, № 08-01-00622) и СО РАН (интеграционные проекты № 103, № 113).

**Математическое моделирование
на суперкомпьютерах физико–химической
эволюции вещества при планетообразовании**
**Supercomputer modelling of physico–chemical
evolution of matter on the stage of planet formation**

**Снытников В. Н.^{1,2}, Кукшева Э. А.¹, Маркелова Т. В.^{1,2},
Мищенко Т. И.¹, Снытников Н. В.³, Стадниченко О. А.^{1,2},
Стояновская О. П.^{1,2}, Черных И. Г.³**

¹*Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск,
Россия; snyt@catalysis.ru*

²*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*

³*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*

Современные естественнонаучные данные указывают, что при образовании планет в околозвездных дисках могли быть обеспечены необходимые условия для синтеза предбиологических соединений, ставших основой для земной биосферы. Такие условия могли создаваться на этапах оседания пыли к экваториальной плоскости протопланетного диска, формирования пылевого субдиска и образования сгустков из газа и первичных тел при развитии гравитационных неустойчивостей.

Для изучения быстрых, на масштабе нескольких лет, изменений условий в протопланетном диске созданы и развиваются нестационарные численные модели, которые реализуются на суперкомпьютерах. Численное моделирование динамики околозвездных дисков проведено с использованием кинетического уравнения для описания подсистемы твердых первичных тел, газодинамических уравнений для газовой компоненты, уравнения Пуассона для самосогласованного гравитационного поля и уравнений химической кинетики. Уравнение для функции распределения тел по скоростям решается методом частиц-в-ячейках. Газодинамические уравнения интегрируются методом крупных частиц и в другом варианте бессеточным SPH-методом. Для уравнения Пуассона, которое необходимо решать на каждом временном шаге эволюционной задачи, используется быстрое преобразование Фурье как самостоятельно, так и в комбинации с другими численными алгоритмами

для достижения эффективности на декартовой и цилиндрической сетках. Верификация кодов в решении нестационарных задач осуществляется путем сравнения результатов, получаемых при использовании программ, реализующих численные алгоритмы с принципиально разными свойствами. Среди представленных программ наибольшее развитие получили коды, в которых не учитывается динамика среды вдоль оси вращения околозвездного диска. Основные созданные коды эксплуатируются на параллельных вычислительных комплексах Москвы и Новосибирска с удаленным доступом.

В докладе представлены результаты изучения процессов развития гравитационных неустойчивостей в околозвездных дисках, которые происходят в двухфазной среде газ — первичные тела с химическими реакциями, а также при росте твердых тел при их слипании.

В вычислительных экспериментах на суперкомпьютерах изучены превращения водорода и других газовых компонент в каталитических реакциях в околозвездных дисках для условий астрокатализа [1]. Исследованы условия гравитационной устойчивости околозвездных дисков в гравитационном поле диска и протозвезды, формирования и эволюции нелинейных структур в дисках. Продолжено изучение сгустков и обнаруженных ранее одиночных волн плотности. Эти волны и сгустки рассматриваются как каталитические реактора синтеза предбиологических соединений.

В создаваемых кинетических моделях газофазных реакций легких алканов используются экспериментальные данные по синтезу этилена, ацетилена и других непредельных углеводородов. Эти соединения наблюдаются в современной атмосфере Титана. Они могут играть важную роль в процессе укрупнения частиц в околозвездных дисках.

Работа выполнена при поддержке программ Президиума РАН “Происхождение и эволюция биосферы” и “Происхождение, строение и эволюция объектов Вселенной”, а также СО РАН (интеграционный проект № 26).

ЛИТЕРАТУРА

1. Снытников В. Н. Абиогенный допланетный синтез пребиотического вещества для биосферы Земли // Вестн. РАН. 2007. № 3. С. 218–226.

Квадратурная формула для дробного интеграла Вейля от периодических функций

Quadrature formula for Weyl's fractional integral of periodic functions

Сунгатуллина З. Ю.

Казанский государственный энергетический университет, Казань,
Россия; zulfia82@mail.ru

Квадратурные формулы широко применяются при решении разнообразных задач прикладного характера. Рассмотрим приближенные методы вычисления дробных интегралов Вейля от периодических функций вида

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\pm}^{(\alpha)}(t)dt, \quad \alpha > 0,$$

где

$$\Psi_+^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{(ik)^{\alpha}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^{\alpha}},$$

$$\Psi_-^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{(-ik)^{\alpha}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^{\alpha}}.$$

В данной работе получены следующие квадратурные формулы для дробных интегралов $I_-^{(\alpha)}$ и $I_+^{(\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$:

$$I_+^{(\alpha)}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\Psi_+^{(\alpha)}(t)dt \approx \frac{1}{2\pi+1} \sum_{j=0}^{2n} A_j \varphi(x-t_j), \quad (1)$$

где

$$A_j = 2 \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} \cos\left(kt_j - \frac{\alpha\pi}{2}\right);$$

$$I_-^{(\alpha)}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\Psi_-^{(\alpha)}(t)dt \approx \frac{1}{2\pi+1} \sum_{j=0}^{2n} A_j^* \varphi(x-t_j), \quad (2)$$

где

$$A_j^* = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} \cos \left(kt_j + \frac{\alpha\pi}{2} \right).$$

Обозначим через $R_n(\varphi; t)$ остаточный член квадратурных формул (1) и (2). Тогда

$$|R_n(\varphi; t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon c |t|^{\alpha-1} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{(2\pi)^\alpha}{\alpha} \varepsilon = \frac{(2\pi)^{\alpha-1}}{\alpha} \varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е. А. Численные методы. СПб: Лань, 2004.
2. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

**Рассеяние поверхностных волн на плавающей
упругой пластине при периодической
топографии дна**

**The scattering of surface waves on an elastic floating
plate over undulating topography**

Ткачева Л. А.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; tkacheva@hydro.nsc.ru*

Гидроупругое поведение тонких пластин, плавающих на поверхности жидкости, представляет значительный интерес для ряда практических приложений: ледовые поля, плавучие платформы различного назначения, волноломы, понтонные мосты. Эти объекты имеют очень большие горизонтальные размеры, достигающие нескольких километров, и относительно малую изгибную жесткость. При математическом моделировании такие объекты часто рассматриваются как тонкие упругие пластины.

Гидроупругое поведение однородных плавающих пластин в жидкости постоянной глубины изучено достаточно хорошо. Однако рельеф дна может оказывать существенное влияние на поведение пластины, особенно при малой глубине жидкости. В данной работе в линейной постановке изучается влияние периодической неровности дна под пластиной на рассеяние набегающих поверхностных волн и на амплитуды колебаний пластины.

Пластина предполагается тонкой однородной. Жидкость идеальная несжимаемая, глубина жидкости мала по сравнению с горизонтальными размерами: длиной пластины, длиной поверхностных и изгибно-гравитационных волн, длиной периода топографии. Используется приближение мелкой воды. Учитывается осадка пластины в воду.

Для решения задачи используется метод нормальных мод. Прогиб пластины ищется в виде разложения по собственным функциям в пустоте. Потенциал скорости жидкости определяется с помощью разбиения области течения на подобласти и метода сшивания [1]. Для определения неизвестных коэффициентов разложения, коэффициентов отражения и прохождения получена система линейных алгебраических уравнений, которая решается методом редукции. Определяются также

собственные частоты совместных гидроупругих колебаний пластины и жидкости, которые являются комплексными.

Проведенные расчеты показали, что система периодических препятствий на дне может существенно изменить собственные частоты гидроупругих колебаний. В некоторых случаях происходит попарное сближение собственных частот, что приводит к существенному увеличению коэффициента отражения в широком диапазоне частот набегающих волн.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-08-00145) и Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-2260.2008.1)

ЛИТЕРАТУРА

1. Стурова И. В. Нестационарное поведение неоднородной упругой балки, плавающей на мелководье // Прикл. математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 6. С. 971–984.
2. Meylan M. H. Computation of resonances for a floating one dimensional thin plate on shallow water // Hydroelasticity in Marine Technology. Proc. of the 3rd Int. Conf. on Hydroelasticity in Marine Technology. Oxford, UK, 15–17 Sept. 2003. Oxford: University of Oxford, 2003. P. 251–257.

Компьютерная квантовая инженерия в нанофизике и образовании

Computer quantum engineering in nanophysics & education

Ткаченко О. А.^{1,2}, Ткаченко В. А.¹,
Коткин Г. Л.², Квон З. Д.¹, Асеев А. Л.¹

¹Институт физики полупроводников СО РАН, Новосибирск, Россия;
otkach@isp.nsc.ru

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
kotkin@math.nsc.ru

Введение. Компьютерная квантовая инженерия является гибридом на стыке новых вычислительных технологий, квантовой физики и нанотехнологий. Ее смысл в том, что исследователи и учащиеся конструируют с помощью некоторых программ-конструкторов наглядную виртуальную квантовую реальность, развивая воображение, ассоциативное мышление и лучше понимая изучаемую действительность. Вот уже 20 лет как этот метод внедрен в преподавание квантовой механики. Им уже пользовались тысячи студентов, сотни физматшкольников, десятки преподавателей, группы экспериментаторов и технологов из ИФП СО РАН, General Motors Research Labs (USA), National Research Institute for Metals (Japan), Cavendish Laboratory (United Kingdom), Grenoble High Magnetic Field Laboratory (France), NTT Basic Research Laboratories (Japan) и Института физики металлов УрО РАН.

Образовательные применения. Квантовая механика трудна для начинающих, и, чтобы помочь ее изучению, был создан комплекс программ и задач “Квант”. Речь идет о задачах, сводимых к решению стационарного уравнения Шредингера с одномерными кусочно-постоянными потенциалами. Квантовые микроструктуры прекрасно подходят для реализации таких потенциалов, но ими же моделируются естественные объекты (ядра, атомы, малые металлические частицы, колебания и вращения двухатомных молекул, рассеяние на центре), а на качественном уровне — линейные, замкнутые молекулы и кристаллы. Из простых задач известен алгоритм решения данного уравнения (сшивки функций в местах разрыва потенциала) и студенты работают с программой, как с отлаженной экспериментальной установкой, открывая для себя новые факты и эффекты.

Научные применения. В 80-х годах появилась новая область физического эксперимента и нанотехнологий, которая имеет дело с квантовыми структурами разных типов. Самыми известными являются квантовые ямы и сверхрешетки с резкими границами между плоскими слоями разного состава. Более сложная ситуация возникает, когда нанолитографией создаются и при низких температурах исследуются одиночные субмикронные квантовые структуры. Для моделирования удерживающего потенциала и электронного транспорта в таких объектах необходимо было реализовать и испытать алгоритмы численного решения некоторых разновидностей уравнений Шредингера и Пуассона. Например, для моделирования когерентного сцепления многоканального рассеяния с вынужденными квантовыми переходами в наноструктурах необходимо ввести добавку к одномерному потенциалу, которая гармонически зависит от времени. Другие разновидности многоканального рассеяния подразумевают двумерность потенциала и включение в гамильтониан вектор-потенциала для моделирования действия внешнего магнитного поля. Вместо произвольного задания потенциала в уравнении Шредингера интересен его расчет из решения полной задачи трехмерной электростатики, включающей структурную информацию (толщины и состав слоев, двумерные распределения глубины травления, трехмерные конструкции управляющих электродов-затворов), а также самосогласованное с трехмерным потенциалом распределение заряда подвижных электронов, легирующих примесей и локализованных поверхностных состояний. В итоге реализации алгоритмов на многих примерах было показано, что расчеты на основе программ-конструкторов помогают предсказывать новые эффекты, экспериментально изучать и создавать квантовые микро-, наноструктуры.

Суперкомпьютерные расчеты. Иногда вместо интерактивного моделирования необходимо провести много однотипных расчетов при систематическом изменении управляющих параметров. Например, детальное моделирование малого кольцевого интерферометра, изготовленного атомно-силовым микроскопом, требовало нескольких месяцев счета на настольном компьютере, поскольку это сотни тысяч решений двумерного уравнения Шредингера. Оказалось, что суперЭВМ, используя 64 процессора, справляется с этой задачей за 6 часов. Суперкомпьютерные расчеты помогли также выявить неожиданный эффект электрон-электронного взаимодействия во многомодовом баллистическом микроконтакте.

Высокопроизводительные вычисления в задачах моделирования радиационного переноса

High-performance computations in problems of modelling radiation transfer

Ульянов О. Н.¹, Леликова Е. Ф.², Рубина Л. И.³,
Чащин М. А.⁴

*Институт математики и механики УрО РАН,
Екатеринбург, Россия;*

¹uon@imm.uran.ru, ²lef@imm.uran.ru, ³rli@imm.uran.ru,
⁴cma@imm.uran.ru

Авторами на протяжении ряда лет разрабатывается методика численного моделирования на многопроцессорных вычислительных системах взаимодействия излучения с плоским слоем вещества [1, 2].

Рассматривается задача переноса излучения в неоднородном (по составу, температуре, плотности) плоском слое конечной толщины, состоящем из смеси нескольких веществ. Требуется определить состояние смеси (населенности уровней веществ) и излучение, возникающее в результате взаимодействия смеси с излучением, падающим на границу слоя. Вещества в смеси связаны через излучение, интенсивность которого удовлетворяет уравнению переноса. Населенности удовлетворяют системе уравнений кинетики, элементы матрицы которой зависят от некоторых средних — интегралов по угловой и энергетической переменным от интенсивности излучения с весовыми функциями различных видов. Учитывается до нескольких десятков резонансных линий каждого вещества.

В докладе излагаются особенности разработанной методики и применения высокопроизводительных вычислений на многопроцессорных системах для вышеописанных задач радиационного переноса в смесях веществ с доплеровскими или фойгтовскими профилями излучения и поглощения.

Методика включает параллельные алгоритмы и программы, основанные на двух разных подходах к решению уравнения переноса излучения. Алгоритмы МАПИ базируются на явном представлении решения уравнения. В методе МПЛЧ для решения уравнения используются интерполяционные полиномы Лагранжа с чебышевскими узлами.

Алгоритмы МАПИ разработаны в двух модификациях, отличающихся способом вычисления средних интенсивностей излучения: с использованием различных интерполяционных полиномов; с применением метода Лобатто с гарантированной точностью.

Разработанные параллельные алгоритмы хорошо масштабируемы; программы, использующие MPI и DVM технологии параллельного программирования, достаточно мобильны и позволяют для ряда задач эффективно использовать более 2000 процессоров МВС-50К.

Программы МАПИ, обеспечивая заданную точность, для расчета сложных вариантов требуют довольно большого времени (до часа на итерацию) и количества процессоров (сотни и тысячи). Программы МПЛЧ используют меньшее число процессоров (до 151) и время (одна итерация — от 0.5 сек. до 90 сек.), но требуют настройки — выбора степени полиномов и длин отрезков интегрирования.

Для предложенных алгоритмов использование параллельных технологий и развитие многопроцессорных вычислительных систем позволили в десятки раз сократить время расчета, достичь приемлемых времен для содержательных задач, проводить численное моделирование, постоянно усложняя рассматриваемые задачи.

Расчеты проводятся на МВС 1000/17ЕК в ИММ УрО РАН (г. Екатеринбург) и МВС-50К в МСЦ РАН (г. Москва).

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы совместных проектов фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леликова Е. Ф., Рубина Л. И., Ульянов О. Н., Чащин М. А. Параллельные вычислительные технологии в задаче о переносе радиационного излучения // *Вопр. атомн. науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов*. 2002. Вып. 3. С. 3–13.
2. Леликова Е. Ф., Рубина Л. И., Ульянов О. Н., Чащин М. А. Параллельные вычисления в задачах, возникающих при математическом моделировании переноса излучения // *Автоматика и телемеханика*. 2007. № 5. С. 124–140.

Метод декомпозиции для пристеночных турбулентных течений

Domain decomposition for near-wall turbulent flows

Утюжников С. В.

Университет Манчестера, Манчестер, Великобритания;
`s.utuzhnikov@manchester.ac.uk`

Моделирование пристеночных турбулентных течений при больших числах Рейнольдса требует больших затрат вычислительных ресурсов. Это связано с наличием тонкого пристеночного ламинарного подслоя. Неверное его разрешение может приводить к большим ошибкам в решении. В тоже время, моделирование ламинарного подслоя занимает до 90% всего расчетного времени. В результате при промышленных расчетах часто задают граничные условия вне ламинарного подслоя в виде, так называемых, пристеночных функций. Оригинальные пристеночные функции основывались на гипотезе перемежаемости Прандтля и аналитическом решении для бесконечно тонкой пластины. В случае течений связанных, например, со сложной геометрией или большими градиентами давления такие пристеночные функции приводят к значительной ошибке. В литературе, модификации данного подхода, главным образом, основаны на введении специальных подгоночных коэффициентов, которые заранее неизвестны.

В [1, 2] предложено переносить граничные условия со стенки на удаленную границу. Уравнения Рейнольдса предварительно линеаризуются с помощью аппроксимации профиля эффективной вязкости и нелинейных конвективных членов. Применение этого подхода в локально-одномерном случае приводит к граничному условию 3-го рода для внешней области. Тестовые расчеты турбулентной струи набегающей на стенку, проведенные на основе $k - \epsilon$ модели, показали относительно хорошую точность при значительной экономии машинного времени. Показано, что решение не сильно зависит от выбора пристеночной промежуточной границы. Важно заметить, что такой подход не основан на использовании каких-либо подгоночных коэффициентов. Полученные пристеночные функции (промежуточные граничные условия) очевидно не зависят от расчетной сетки, в отличие от многих других подходов.

На многомерный случай предложенный подход обобщается с помощью теории потенциалов [3], что приводит к декомпозиции расчетной

области на пристеночную и внешнюю. В этом случае для внешней области граничное условие формулируется с помощью псевдо-дифференциального уравнения. Эффективность алгоритма показана на примере модельного двумерного уравнения. Предложенный подход без принципиальных трудностей обобщается на трехмерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

2. *Utyuzhnikov S. V.* The method of boundary condition transfer in application to modeling near-wall turbulent flows // *Comput. Fluids*. 2006. V. 35, N 10. P. 1193–1204.
3. *Utyuzhnikov S. V.* Robin-type wall functions and their numerical implementation // *Appl. Numer. Math.* 2008. V. 58, N 10. P. 1521–1533.
4. *Utyuzhnikov S. V.* Generalized Calderon–Ryaben’kii’s potentials // *IMA J. Appl. Math.* 2009. V. 74, N 1. P. 128–148.

Алгоритмы построения структурированных сеток в многоблочных областях вращения

Algorithms for structured grid generation in multiblock revolution domains

Ушакова О. В.

*Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
Россия; uov@imm.uran.ru*

Описываются алгоритмы построения трехмерных структурированных сеток, предназначенные для моделирования задач многокомпонентной гидродинамики [1] в областях, полученных вращением образующей, заданной в плоскости x, z , относительно оси z на угол φ ($0 < \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi$) для случая много-блочных конструкций. Образующая кривая может состоять из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов. В [2, 3] были предложены алгоритмы для расчета трехмерных структурированных сеток в областях вращения для случая одно-блочных конструкций. Алгоритмы из [2, 3] не сводятся к вращению двумерных сеток вокруг оси и являются развитием вариационного подхода [4]. Они предназначены для построения структурированных оптимальных в смысле [4] сеток (невыврожденных, близких к равномерным ортогональным) и основаны на минимизации специальных дискретных функционалов оптимальности, отвечающих за близость сеток к указанным видам качеств. Алгоритмы допускают различные способы [5, 6] расчета узлов на границе областей вращения. Они позволяют рассматривать свободными или оставлять фиксированными узлы на границе областей вращения, рассматривать условия ортогональности координатных линий границам области и др. Предложенные алгоритмы являются дальнейшим развитием алгоритмов [2, 3]. Новые алгоритмы позволяют “держат” в процессе построения сетки отдельные точки образующей кривой на границах областей вращения. Эта возможность реализуется фиксированием узлов сетки, формирующих линии вращения изломов образующей или отдельных точек на ней, в процессе расчетов. Алгоритмы позволяют также осуществлять расчеты блочных сеток или сеток со вставками для конструкций, состоящих из различных материалов. В данных алгоритмах узлы фиксируются на выделенных поверхностях вращения, образуемых границам блоков,

задаваемых в плоскости образующей кривой. Алгоритмы построения начальных сеток для предлагаемых алгоритмов описаны в [7]. Демонстрируются примеры расчетов сеток. Тестирование сеток на невырожденность осуществляется согласно критериям [8]. Приводится краткое описание данных критериев.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00173) и целевой программы фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с СО РАН и ДВО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anuchina N. N., Volkov V. I., Gordeychuk V. A., Es'kov N. S., Ilyutina O. S., and Kozyrev O. M. Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by MAH-3 code // *Advances in Grid Generation*. Ed. Ushakova O. V. Nova-science Publishers. 2007. P. 215–240.
2. Бронина Т. Н., Гасилова И. А., Ушакова О. В. Алгоритмы построения трехмерных структурированных сеток // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 2003. Т. 43, №6. С. 875–883.
3. Bronina T. N., Ushakova O. V. Application of optimal grid generation algorithms to the volumes of revolution // *Advances in Grid Generation*. Ed. Ushakova O. V. Novascience Publishers. 2007. P. 283–320.
4. Khairullina O. B., Sidorov A. F., and Ushakova O. V. Variational methods of construction of optimal grids // *Handbook of Grid Generation*. Thompson J. F., Soni B. K., and Weatherill N. P., eds. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 1999. P. 36-1–36-25.
5. Бронина Т. Н., Ушакова О. В. Расчеты трехмерных структурированных сеток в конфигурациях с особенностями // *Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления: Тр. всеросс. конф. М.: Выч. центр РАН. 2006. С. 190–199.*
6. Ушакова О. В. Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения // *Тр. Инст. математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 150–180.*
7. Бронина Т. Н. Алгоритмы построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения // *Тр. Инст. математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 3–10.*
8. Ушакова О. В. Классификация шестигранных ячеек // *Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 8. С. 1426–1428.*

Резонанс и развитие вихревых структур во вращающейся идеальной жидкости

Resonance and evolution of vortex structures in a rotating ideal fluid

Фокин М. В.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия fokin@math.nsc.ru*

В докладе рассматривается задача о возбуждении гармонических колебаний в идеальной вращающейся жидкости, исходным состоянием которой является твердотельное вращение. В качестве математической модели этого процесса исследуются линеаризованные уравнения Эйлера (система уравнений Пуанкаре — Соболева) с дополнительно введенной внешней силой, меняющейся по гармоническому закону с частотой ω_0 . Жидкость заполняет бесконечный цилиндр с образующей, перпендикулярной оси вращения. Рассматриваются решения, удовлетворяющие условию непротекания на границе цилиндра и инвариантные относительно сдвигов вдоль образующей. В случае свободных колебаний эволюция поля скоростей описывается уравнением вида $U' = iAU$, где A — самосопряженный оператор в некотором гильбертовом пространстве. Известно, что спектральные свойства оператора A существенно зависят от геометрических свойств области, лежащей в сечении цилиндра. Его спектр может быть точечным, абсолютно непрерывным и сингулярно непрерывным. Появление участков непрерывного спектра связано с возможностью построения для области однопараметрических семейств обобщенных решений линеаризованных уравнений Эйлера, которые могут быть истолкованы с физической точки зрения как осциллирующие с некоторой заданной частотой тонкие слои жидкости.

Характеристика резонансных явлений существенно зависит от того, в какой части спектра окажется возбуждающая частота ω_0 . В случае, когда ω_0 является собственным числом оператора, наблюдается объемный резонанс, т. е. неограниченный рост компонент поля скоростей на множестве положительной меры. Если ω_0 принадлежит интервалу непрерывного спектра, то резонансный рост поля скоростей происходит только в точках некоторого конечного множества плоскостей, параллельных образующей цилиндра. Отметим, что в [1] изучалось воз-

буждение гармонических колебаний во вращающемся сосуде с жидкостью малой вязкости. Обнаруженные эффекты характеризуются как “появление тонких интенсивно колеблющихся слоев, отражающихся от стенок сосуда”. Такое описание близко к полученному в случае непрерывного спектра задачи.

При изучении вихрей в жидкости основную роль играет гамильтонова подсистема, состоящая из двух компонент поля скоростей. С ее помощью определяются вихревые структуры, связанные с точками локальных экстремумов по пространственным переменным гамильтониана, и описывается их эволюция. Для различных случаев резонансного возбуждения колебаний жидкости в докладе дается описание поведения вихревых структур, в частности, эффектов прохождения их через резонансные плоскости на непрерывном спектре оператора. В случае, когда частота ω_0 является собственным числом оператора, образуется конечное число осциллирующих вихрей, оси вращения которых являются неподвижными. Если ω_0 принадлежит интервалу непрерывного спектра, то в этом случае наблюдается неограниченный рост числа вихревых структур и уменьшение их масштаба при $t \rightarrow \infty$. При этом цилиндр разбивается на некоторые подобласти, в части которых возникают вихревые пульсации: в течение периода воздействия вынуждающей силы есть промежутки времени, когда множество вихревых структур становится пустым, но в остальное время они присутствуют и их общее число увеличивается с ростом времени t . В оставшейся части подобластей пульсации отсутствуют: подвижные вихревые структуры существуют для всех моментов времени, общее их число неограниченно возрастает.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00221), Министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/3543) и Программы междисциплинарных интеграционных исследований СО РАН (проект № 65).

ЛИТЕРАТУРА

1. Oser H. Experimentelle Untersuchung über harmonische Schwingungen in rotierenden Flüssigkeiten // Z. Angew. Math. Mech. 1958. Bd. 38. S. 386–391.

Метод молекулярной динамики и его применение к решению задач механики сплошных сред

Molecular dynamics simulation and its application to continuum mechanics problems

Фомин В. М.¹, Головнев И. Ф.²

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;*
¹fomin@itam.nsc.ru, ²golovnev@itam.nsc.ru

Механика сплошных сред является феноменологической теорией, так как для замыкания основных уравнений она должна использовать ряд дополнительных замыкающих условий, которые невозможно найти в рамках этой теории. Например, всегда требуются калорическое и термическое уравнения состояния среды. Кроме того, для газов необходима зависимость объемного и сдвигового коэффициентов вязкости от температуры и давления, а для твердых тел — связь компонент тензора напряжения и тензора деформации и условия разрушения. Задача еще более усложняется, если эти связи необходимы в широком интервале температур и давлений.

До настоящего времени все эти характеристики находились в очень сложных и дорогостоящих экспериментах. Причем сама обработка экспериментальных данных и определение искомых связей требовала ряда упрощений и, опять же, привлечения феноменологических моделей. Лишь для достаточно разреженных газов удалось использовать теоретические методы статистической физики и теории Больцмана.

Все это обусловило повышенный интерес современной науки к методу молекулярной динамики, который базируется на первых принципах, т. е. только на знании потенциалов межатомного взаимодействия вещества, рассчитываемых в рамках квантовой теории, и предположения о применимости классической механики к описанию движения атомов. Этот метод позволяет рассчитать траекторию системы большого количества атомов в фазовом пространстве, а затем, путем осреднения по мезообъемам, найти все необходимые характеристики этой наносистемы. С другой стороны как экспериментально, так и теоретически доказано, что с определенных размеров наноструктуры ее свойства совпадают со свойствами макротел. Это позволяет, увеличивая размеры

исследуемой системы, рассчитать любые характеристики, необходимые в механике сплошных сред.

В настоящей работе показано, каким образом моделируются начальные данные и граничные условия механики сплошных сред на микроуровне, приводится иллюстрация этих положений для изучения процессов в твердых телах при интенсивных динамических нагрузках на примере расчета механических характеристик деформации и разрушения структур. Впервые предложен способ расчета уравнения состояния наноструктур с помощью метода молекулярной динамики, основанного на первых принципах. Это позволило рассчитать термодинамические свойства нанообъектов. Показана возможность его применения к расчету термодинамических свойств макроструктур, необходимых в механике сплошных сред.

**Минимизация сопротивления тела,
движущегося в жидкости**
Drag minimization for a body moving in fluid

Фурсиков А. В.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, Россия; fursikov@mtu-net.ru*

Рассматриваются две задачи оптимального управления для уравнений Навье — Стокса. Первая — это задача для трехмерной нестационарной системы Навье — Стокса во внешности ограниченной области Ω . Цель управления — минимизировать функционал работы по преодолению сопротивления тела, а в качестве управления берется скорость жидкости на границе $\partial\Omega$. Доказано существование решения задачи оптимального управления и для него выведена система оптимальности [1].

Эти результаты основаны на теории краевых задач для уравнений Навье — Стокса с краевыми данными Дирихле из нестандартных функциональных пространств, а также на теореме о гладкости решений для сопряженной задачи Озеена с гладкими начальными данными без условий согласования.

Вторая задача связана с оптимизацией для двумерных стационарных уравнений Навье — Стокса в специальной ограниченной области Ω с управлением u на части Γ границы $\partial\Omega$, “сопряженным” условию Дирихле: $u = (\partial_n v - pn)|_\Gamma$, где v — скорость течения жидкости, p — давление и n — нормаль к Γ .

Это управление естественнее управления Дирихле с точки зрения приложений, тем более, что оно задано лишь на части границы, которая соприкасается с остальной ее частью, где задано условие прилипания. Последнее обстоятельство приводит к ряду математических осложнений, которые обсуждаются в докладе.

Доказано существование решения указанной задачи, и выведена соответствующая система оптимальности [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Fursikov A. V., Gunzburger M., Hou S. Optimal boundary control for the evolutionary Navier–Stokes system: the three-dimensional case // SIAM J. Control Optim. 2005. V. 43, N 6. P. 2191–2232.

2. *Fursikov A. V., Rannacher R.* Optimal Neumann control for the 2D steady-state Navier–Stokes equations. Boston: Birkhäuser, 2009. (Adv. Math. Fluid Mech.; to appear).

Расчет сильного сжатия несферического кавитационного пузырька

Computation of strong compression of nonspherical cavitation bubble

Халитова Т. Ф., Хисматуллина Н. А.

*Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань,
Россия; taliny@kfti.knc.ru*

Интерес к сильному сжатию парогазового пузырька обусловлен экстремально высокими значениями температуры и плотности содержимого пузырька и жидкости в его окрестности. Так, при сонолюминесценции [1] возникает свечение пузырька, которое связано со значениями температуры газа, превышающими 10^5 К. Кроме того, появляются сообщения о возможности инициирования термоядерных реакций в полости пузырька при его коллапсе [2]. В связи с малостью размеров пузырька особую роль в изучении его сильного сжатия приобретает математическое моделирование. Так, с помощью численных методов показано, что при коллапсе сферического пузырька в его полости формируется сферическая ударная волна, сходящаяся к центру, которая и приводит к экстремальным значениям параметров газа. При этом очевидно, что несферичность пузырька может вызывать значительное отклонение ударной волны от сферической формы, а значит, и снижение значений температуры и плотности газа в центре пузырька. В связи с этим моделирование сильного сжатия несферического кавитационного пузырька является весьма актуальным.

Существующие в настоящее время методы численного решения задач динамики пузырька при его сильном сжатии позволяют изучать лишь движение газа в его полости в случае сферической симметрии задачи. Они, как правило, основаны на схемах Годунова или Лакса — Фридрихса. Как известно, схема Годунова за счет точного решения задачи о распаде произвольного разрыва обладает меньшей численной вязкостью и лучше описывает разрывные решения, чем схема Лакса — Фридрихса. Моделирование динамики газа внутри несферического кавитационного пузырька в финальной высокоскоростной стадии сжатия до настоящего времени не проводилось.

В данной работе приводятся результаты расчета сильного сжатия несферического (осесимметричного) кавитационного пузырька. Применяется метод расщепления по физическим процессам, в котором двумерные уравнения газовой динамики решаются по явной UNO-модифицированной (UNO — Uniformly NonOscillatory, равномерно неосциллирующая) схеме Годунова [3], а уравнение теплопроводности — неявным методом переменных направлений. При этом учитываются процессы испарения и конденсации, применяются реалистичные уравнения состояния. UNO-модификация позволяет повысить точность схемы Годунова до второго порядка по пространству и времени всюду в области гладких решений. Для этого вводится предположение о кусочно-линейном законе распределения плотности, компонент вектора плотности импульса и плотности полной энергии, а при определении пространственных производных используется ограничитель. UNO-ограничитель включает в себя анализ аппроксимаций не только первых производных (как в TVD-схемах), но и производных второго порядка.

Численные эксперименты позволили выявить возможные сценарии развития несферичности ударной волны в кавитационном пузырьке в финальной высокоскоростной стадии сжатия. В частности, показано, что положение областей экстремально высокого давления и температуры в несферическом и сферическом случаях оказывается различным.

Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00215, № 08-01-97029-р_поволжье_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gaitan D.F., Crum L.A. Observation of sonoluminescence from a single, stable cavitation bubble in a water/glycerine mixture // 12th Int. Symp. on Nonl. Acoustics. New York: Elsevier, 1990. P. 459–463.
2. Taleyarkhan R.P. et al. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // Science. 2002. V. 295. P. 1868–1873.
3. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. III // J. Comp. Phys. 1987. V. 71. P. 231–303.

Об одном обобщении уравнений Навье — Стокса On one generalization of the Navier–Stokes equations

Ханхасаев В. Н.

Восточно-Сибирский государственный технологический
университет, Улан-Удэ, Россия; hanhvladnick@mail.ru

В работах Рагаллера динамика дугового разряда моделировалась системой Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v_r) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \eta \frac{\partial v_z}{\partial r}), \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = v_z \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda \frac{\partial T}{\partial r}) + Q(T). \quad (3)$$

Эта система описывает эволюцию во времени поля температуры T и поля радиальной v_r и аксиальной v_z скорости газа. Система выведена с рядом допущений: импульс p предполагается не зависящим от радиуса; аксиальные теплопроводность и вязкость не учитываются; эффекты турбулентного переноса включаются в коэффициенты радиальных теплопроводности и вязкости.

В данной постановке исследуется случай свободного остывания при интенсивном обдуве столба дуги в области перехода тока через ноль. Тогда, если пренебречь остаточным током и излучательным переносом энергии, то джоулево тепло $Q(T) = \sigma E^2 = 0$ и хорошей аппроксимацией для импульса $p(z)$ служит известное аксиальное распределение давления газа в зависимости от различной геометрии сопла.

В работах автора, посвященных математическому моделированию процесса электрической дуги в спутном потоке газа, численно и аналитически решались различные краевые задачи для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье.

Продолжая это исследование, модифицируем систему Рагаллера, заменяя параболическое уравнение энергии (3) обобщением гипотезы Фурье и уравнением теплового баланса:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} - \alpha \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = v_z \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq) + Q(T). \quad (5)$$

Для полученной системы ставятся соответствующие начальные и краевые условия; составлены и отлажены программы на языке Фортран, дающие хорошие результаты, согласующиеся с проведенными экспериментами при соответствующем выборе коэффициента тепловой релаксации α .

Система Рагаллера (1)–(3) является частным случаем системы уравнений (1), (2), (4), (5) при $\alpha = 0$. Это один из этапов обобщения уравнений Навье — Стокса на пути к более общим уравнениям Бернетта, вытекающих из кинетической теории газов.

Работа выполнена в рамках программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)” (проект № РНП 2.1.1./1533).

Вычислительные аспекты реализации модели гидродинамики озера Байкал

Numerical aspects of a hydrodynamics model for the Baikal lake

Цветова Е. А.

*Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; e.tsvetova@ommgp.sccc.ru*

Основные проблемы при моделировании природных процессов возникают из-за существенной разницы в их горизонтальных и вертикальных масштабах. Так, например, при моделировании общей циркуляции озера Байкал приходится учитывать тот факт, что масштабы различаются примерно в 600 раз. Поэтому большое значение имеют согласованное описание горизонтальных и вертикальных операторов в моделях и обеспечение достаточной точности вычислений. Особое внимание требуется расчетам вертикальной компоненты вектора скорости, которая на несколько порядков величины отличается от горизонтальных составляющих вектора скорости.

В докладе представлены численные модели гидродинамики и процессов переноса примесей в озере Байкал и методы реализации основных типов разработанных для этих целей алгоритмов в рамках схем расщепления по физическим процессам. Основной аппарат для построения численных схем — вариационный принцип и метод конечных объемов.

Модель гидродинамики несжимаемой жидкости в негидростатическом приближении представлена уравнениями движения, неразрывности и энергии. Нелинейное уравнение состояния учитывает изменение плотности в зависимости от температуры и давления. В качестве примесей рассматриваются твердые, растворенные и газовые субстанции.

В задачах конвекции-диффузии требуется обеспечить сохранение баланса массы, импульса, количества тепла и примесей. Численные схемы, кроме выполнения соотношений баланса, должны обладать свойствами монотонности, транспортности, устойчивости. Этими свойствами обладают схемы, построенные с помощью вариационного принципа и метода конечных объемов при использовании фундаментальных аналитических решений специальным образом определённых локальных сопряженных задач [1].

Алгоритм для учета силы Кориолиса, которая представлена в трех уравнениях движения негидростатической модели, основан на нестационарных аппроксимациях экспоненциального типа с антисимметричным матричным оператором в каждой точке пространственно-временной сеточной области. Использование аналитического решения приводит к численным схемам с ортогональными операторами, обладающими свойствами сохранения энергии.

Для обеспечения точности вычислений при расчетах производных и интегралов используются аппроксимации сглаживающими сплайнами четвертого порядка точности, построенные с использованием вариационной оптимизации со слабыми ограничениями.

В качестве иллюстрации рассматривается задача об обновлении глубинных вод озера. Специфика процессов перемешивания в глубоком пресноводном водоеме проявляется в том, что естественная конвекция, имеющая место при переходе температуры поверхности воды через температуру максимальной плотности, затрагивает водную толщу лишь частично, до определенной глубины. Это происходит из-за того, что температура максимальной плотности из-за влияния давления практически линейно уменьшается от 4°C на поверхности на 0.21°C каждые 100 м глубины. В то же время существуют другие механизмы, которые при определенных условиях запускают глубокую конвекцию, что обеспечивает частичное обновление глубинных вод. Приводятся результаты тестовых и сценарных расчетов, демонстрирующих специфику изучаемых процессов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-05-00673), Президиума РАН (программа № 17) и Отделения математических наук РАН (программа № 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Penenko V., Tsvetova E. Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 226. P. 319–330.

Численное моделирование ретроспективной задачи естественной тепловой конвекции

Numerical modelling of retrospective problem of natural thermal convection

Цепелев И. А.¹, Короткий А. И.¹, Попов В. Н.²

¹Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург,
Россия; tsepelev@imm.uran.ru; korotkii@imm.uran.ru

²Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;
popov@itam.nsc.ru

Рассматривается задача о численном моделировании ретроспективной задачи естественной тепловой конвекции высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости. Математическая модель трехмерных термоконвективных течений упомянутой жидкости включает в себя нестационарную начально-краевую задачу для определения температуры, уравнение несжимаемости и квазистационарную краевую задачу для определения скорости и давления [1]. Модель рассматривается в приближении Буссинеска. Для решения задачи требуется найти (аналитически или численно) решение соответствующей краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей эволюцию состояний жидкости в обратном направлении времени. Известно, что подобные задачи являются, как правило, некорректными и требуют для численного решения разработки специальных методов регуляризации [2].

Модели динамики высоковязкой жидкости получили широкое распространение в геофизике при моделировании различных процессов в недрах Земли. Подобные модели используются, например, при изучении процессов эволюции осадочных бассейнов и соляных диапиров в земной коре, тепловой конвекции в мантии Земли, движения континентов под действием мантийных течений и ряда других задач геофизики [3, 4]. Большой интерес вызывают также задачи моделирования эволюции различных геологических структур в прошлом. Внимание к таким задачам возрастает в связи с увеличивающейся производительностью современных ЭВМ и расширяющимся кругом приложений.

В данной работе рассматриваются процедуры численного моделирования ретроспективной задачи, основанные на итерационном методе

уточнения начального условия [3–6]. Для построения численных аппроксимаций комбинируется метод конечных элементов со специальным базисом из кубических сплайнов для определения поля скоростей и конечноразностный метод для определения температуры. Учитывая большую размерность дискретных задач, численные алгоритмы ориентированы на применение современных ЭВМ параллельного действия. В численной реализации учитываются условия соблюдения основных физических законов, закона сохранения импульса, закона сохранения объема и монотонность построенных аппроксимаций [7]. Обсуждаются также проблемы выбора параметров в итерационном процессе и различные способы построения предобуславливателей, основанные на анализе доступной априорной информации о решении задачи [8].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00029) и гранта совместных фундаментальных научных исследований УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
3. Ismail-Zadeh A. T., Schubert G., Tsepelev I. A., Korotkii A. I. Inverse problem of thermal convection: numerical approach and application to mantle plume restoration // *Phys. Earth Planet. Interiors*. 2004. V. 145. P. 99–114.
4. Ismail-Zadeh A., Schubert G., Tsepelev I., Korotkii A. Three-dimensional forward and backward numerical modeling of mantle plume evolution: Effects of thermal diffusion // *J. Geophys. Res.* 2006. V. 111, N B6 (B06401, doi:10.1029/2005JB003782).
5. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. Korotkii A. I., Tsepelev I. A. Solution of a retrospective inverse problem for one nonlinear evolutionary model // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2003. Suppl. 2. P. 80–94.
7. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
8. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

**Фундаментальные модели течений
неоднородных жидкостей**

**The fundamental models of inhomogeneous
liquid's flow**

Чашечкин Ю. Д.

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Москва, Россия; chakin@ipmnet.ru*

Устойчивая стратификация атмосферы и океана, обеспечивающая существование внутренних волн, обычно обладает “тонкой структурой”, природа образования которой изучается теоретически и экспериментально. В развиваемом подходе для описания динамики природных систем используется система фундаментальных уравнений механики неоднородных жидкостей, включающая уравнения состояния, неразрывности, переноса импульса, температуры и вещества. К основным подмоделям относятся редуцированные системы, при выводе которых пренебрегается влиянием части термодинамических переменных, и вырожденные системы (в силу симметрии геометрии задачи или пренебрежения влиянием изменения плотности). Все системы являются сингулярно возмущенными.

Свойства общих решений систем фундаментальных уравнений в линейном и слабо нелинейном приближениях изучаются методами теории возмущений и интегральных представлений. Анализируются все компоненты решений, как регулярно возмущенные, описывающие волны и вихри, так и сингулярно возмущенные, которые характеризуют пограничные слои на контактных поверхностях и их аналоги в толще жидкости, включающие протяженные высокоградиентные прослойки. При редукции или упрощении задачи, когда понижается порядок системы, сохраняются (с некоторой модификацией) регулярно возмущенные компоненты, число сингулярно возмущенных компонент сокращается. В вырожденных системах происходит слияние разнородных сингулярно возмущенных компонент общего решения. В полной постановке все компоненты течений непосредственно взаимодействуют между собой, несмотря на различия в характерных масштабах, и порождают новые волны или вихри, дополненные собственными тонкоструктурными компонентами.

В качестве примеров рассмотрены задачи генерации периодических и присоединенных внутренних волн. Формулируются требования к методике эксперимента, обеспечивающей регистрацию всех компонент течений. Кратко характеризуются оригинальные экспериментальные установки. Приводятся результаты опытов, позволяющие оценить условия применимости подхода, степень согласия расчетов и наблюдений и проследить эволюцию структуры течений в более широких областях значений параметров. В частности, прослежена динамика формирования вихревых систем в областях конвергенции сингулярных оболочек пучков внутренних волн и процессов переноса примеси в компактных вихрях. Обсуждаются условия экстраполяции результатов расчетов и лабораторных опытов на природные системы.

**О движениях газа типа автомоделного
вихря Овсянникова**
Selfsimilar Ovsyannikov's vortex gas motions

Черевко А. А.¹, Чупахин А. П.²

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*

¹cherevko@mail.ru, ²chupakhin@hydro.nsc.ru

В классических работах по газовой динамике [1–3] рассматривалась задача о сферически-симметричном автомоделном разлете или фокусировке газа.

Исследование исходной сферически-симметричной задачи сводится к построению решений двумерной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждому решению этой системы соответствует свой режим течения газа. Так течению со слабым разрывом соответствует интегральная кривая системы проходящая через особую точку. Эта особая точка должна лежать на одной из двух прямых, вдоль которых система вырождается. Такие прямые соответствуют инвариантным звуковым характеристикам системы уравнений газовой динамики на данном решении.

Л. В. Овсянниковым в [4] было открыто частично инвариантное решение, являющееся обобщением сферически-симметричных движений сплошной среды, названное впоследствии вихрем Овсянникова. В таких движениях инвариантными относительно вращений в $\mathbb{R}^3$ являются все термодинамические переменные, а также модули касательной и нормальной к сферам компонент вектора скорости среды. При этом сам вектор скорости инвариантным не предполагается.

Автомоделные решения для модели вихря Овсянникова в газовой динамике являются обобщением решений, рассмотренных в [1–3]. Будем называть такие решения автомоделным вихрем Овсянникова.

Для газа с уравнением состояния $p = f(S)\rho^3$ исследование инвариантных функций в автомоделном вихре Овсянникова сводится к анализу решений четырехмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$2(\alpha - w)\dot{w} = -2H^2 + hH(v - w) - v(2 + v) + w(4 + 3w),$$

$$\begin{aligned}
2(\alpha - v)\dot{v} &= -2H^2 + hH(w - v) - w(2 + w) + v(4 + 3v), \\
(v + w - 2\alpha)\dot{H} &= -2H(1 + v + w), \\
(v + w - 2\alpha)\dot{h} &= 2(1 + h^2)H.
\end{aligned}
\tag{1}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по автомодельной переменной $l = \ln(r/t^{\alpha+1})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — параметр автомодельности ($\alpha \neq -1$).

Скорость звука c , нормальная u_n и модуль касательной u_τ к сферам $r = \text{const}$ компоненты скорости выражаются через решения системы.

В случае $H \equiv 0$ система (1) сводится к системе, описывающей классические сферически-симметричные движения газа.

Доказано, что при $H \neq 0$ все особые точки системы (1) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4(w, v, H, h)$ лежат на трехмерных гиперплоскостях $v = \alpha$ и $w = \alpha$. При этом, аналогично сферически-симметричному случаю, интегральная кривая системы (1), соответствующая течению газа со слабым разрывом пересекает гиперплоскость $v = \alpha$ (или $w = \alpha$) в особой точке. Но в отличие от классического случая, когда на каждой прямой $v = \alpha$ и $w = \alpha$ лежит не более трех особых точек (считая и их точку пересечения), в автомодельном вихре Овсянникова особые точки полностью заполняют некомпактную двумерную поверхность в трехмерной гиперплоскости. В гиперплоскости $v = \alpha$ данная поверхность Σ задается уравнением $\alpha(4 + 3\alpha) - 2w - w^2 - 2H^2 + (w - \alpha)Hh = 0$. На Σ имеются особые точки различных типов, кроме того и сама поверхность и распределение на ней особых точек по типам зависят от параметра автомодельности α .

Более сложное поведение интегральных кривых системы (1) приводит к более сложным и разнообразным движениям газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-2826.2008.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00047а) и Министерства образования и науки РФ (проект 2.1.1/3543).

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
2. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // Успехи мат. наук. 1963. Т. XVIII, вып. 2(110). С. 3–23.
3. Годунов С. К., Киреева И. Л. О некоторых автомодельных движениях идеального газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1968. Т. 8, № 2. С. 374–392.
4. Овсянников Л. В. Особый вихрь // Прикл. механика и техн. физика. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.

Законы сохранения для уравнений газовой динамики

Conservation laws for gas dynamics equations

Чиркунов Ю. А.

*Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия; chr01@rambler.ru*

Движение газа описывается уравнениями

$$\begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0, \quad \rho_t + (u \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} u = 0, \\ p_t + (u \cdot \nabla) p + \rho c^2(p, \rho) \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где t — время; $u = u(t, x)$ — вектор скорости; $\rho = \rho(t, x)$ — плотность; $p = p(t, x)$ — давление; $x \in R^n$ ($n \geq 1$); $c = c(p, \rho) > 0$ — скорость звука.

Безвихревое движение газа описывается уравнениями (1) и уравнениями

$$\nabla \rho \wedge \nabla p = 0, \quad \nabla \wedge u = 0. \quad (2)$$

Второе уравнение в (2) можно проинтегрировать $u = \nabla \varphi$ введением потенциала $\varphi = \varphi(t, x)$.

В газовой динамике физический смысл закона сохранения [1] $A = (A^0, A^1, A^2, \dots, A^n)$ определяется компонентой A^0 — плотностью закона сохранения и вектором потока $B = A_1 - A^0 u$, где $A_1 = (A^1, A^2, \dots, A^n)$.

Теорема 1. Если $c(p, \rho)$ — произвольная функция, то при $n = 1$ множество законов сохранения нулевого порядка для системы (1) исчерпывается классическими законами сохранения. Расширение этого множества имеет место только в двух случаях:

1) для политропного газа с показателем адиабаты, равным 3, когда добавляются законы сохранения, полученные в [1];

2) для обобщенного газа Чаплыгина с уравнением состояния $c^2 = 1/(\rho^2 w''(p))$ ($w(p)$ — любая заданная функция), когда добавляется бесконечное множество законов сохранения $A^0 = \rho H_u$, $B = H_p/w''(p)$, где $H = H(u, p)$ — любое решение уравнения $H_{uu} = [H_p/w''(p)]_p$.

При $n > 1$ новые законы сохранения для уравнений газовой динамики добавляются только в случае безвихревого движения газа.

Теорема 2. Множество законов сохранения нулевого порядка для системы (1), (2), описывающей безвихревое движение газа, при произвольной функции $c^2(p, \rho)$ состоит из классических законов сохранения. Расширение этого множества происходит только в двух случаях:

1) для политропного уравнения состояния газа с показателем адиабаты, равным $\frac{n+2}{n}$, когда добавляются законы сохранения, полученные в [1];

2) для обобщенного газа Чаплыгина, когда добавляются три дополнительных закона сохранения:

— дополнительный обобщенный закон сохранения импульса

$$A^0 = \rho w'(p) u \cdot \lambda, \quad B = \left[w(p) - \frac{|u|^2}{2} \right] \lambda + (u \cdot \lambda) u;$$

— дополнительный обобщенный закон сохранения момента импульса

$$A^0 = \rho w'(p) \Omega \langle x \rangle \cdot u, \quad B = \left[w(p) - \frac{|u|^2}{2} \right] \Omega \langle x \rangle + (\Omega \langle x \rangle \cdot u) u;$$

— закон сохранения, определяющий дополнительный обобщенный закон движения центра масс

$$A^0 = \rho w'(p) (tu - x) \cdot \mu, \quad B = \left[t \left(w(p) - \frac{|u|^2}{2} \right) - \frac{x \cdot u}{n-1} \right] \mu + [(tu - x) \cdot \mu] u + \frac{u \cdot \mu}{n-1} x,$$

где λ, μ — произвольные постоянные единичные векторы; Ω — произвольный антисимметричный тензор ранга 2 в R^n .

Теорема 3. Система (1) имеет нелокальные законы сохранения вида $A = A(t, x, u, p, \rho, \varphi, \varphi_t)$ только при $n = 1$ и только для обобщенного газа Чаплыгина. При этом каждый такой закон сохранения эквивалентен закону сохранения

$$A^0 = \rho w'(p) (tu - x), \quad B = t \left[w(p) + \frac{u^2}{2} \right] - xu + \varphi.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00489).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин

Numerical modelling of laser welding of thin metal plates

Шапеев В. П.¹, Исаев В. И.², Черепанов А. Н.¹

¹ *Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия;
shapeev@itam.nsc.ru, ancher@itam.nsc.ru*

² *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
issaev.vadim@gmail.com*

Рассматривается установившийся процесс лазерной сварки тонких металлических пластин. Последние являются прямоугольными параллелепипедами, состыкованными между собой узкими боковыми гранями. Ось луча лазера лежит в плоскости стыка пластин и направлена перпендикулярно к их поверхности. Лазер движется параллельно пластинам вдоль стыка. В данной работе предложена трехмерная квазистационарная математическая модель процесса лазерной сварки. В ней предполагается, что скорость сварки (скорость перемещения лазера) постоянная, поле температур и положения фазовых границ в сварочной ванне квазистационарные. Для описания теплопереноса используется уравнение теплопроводности с конвективными членами. Теплообмен с окружающей средой и между областями с металлом в твердой и жидкой фазах моделируется нелинейными краевыми условиями и условием Стефана на поверхности фазового перехода соответственно. Для описания течения в сварочной ванне используются уравнения Навье — Стокса. В модели также учитывается образование парового канала в окрестности луча лазера.

На основе предложенной модели созданы два численных алгоритма ее реализации. В первом алгоритме предполагается, что скорость жидкого металла в сварочной ванне постоянна и равна скорости сварки. Для приближенного решения трехмерного уравнения теплопроводности используется консервативная разностная схема приближенной факторизации. Во втором алгоритме течение в сварочной ванне рассчитывается на основе решения краевой задачи для уравнений Навье —

Стокса в криволинейной области. Ввиду существенной сложности трехмерной модели во втором алгоритме пока реализован только двумерный ее вариант. Приближенное решение задачи строится в нем при помощи итерационного процесса, в котором на каждой итерации по значениям компонент скорости с предыдущего шага рассчитывается поле температур и новое приближение для межфазных границ. По изотерме ликвидуса определяется граница сварочной ванны. По новому приближению для области расплава рассчитываются распределения скоростей и давления. Для построения поверхности парогазового канала в обоих алгоритмах был использован подход, предложенный в работе [1].

Для приближенного решения краевой задачи для уравнения теплопереноса в области с криволинейной границей здесь используется консервативный вариант метода коллокаций и наименьших квадратов (КНК) [2]. В нем в качестве уравнений коллокаций используются требования выполнения интегрального уравнения баланса тепла в каждой ячейке сетки. Условиями согласования решения являются требования непрерывности тепловых потоков на границе соседних ячеек и непрерывности температуры. Для приближенного решения уравнений Навье — Стокса применялся вариант метода КНК с аппроксимацией компонент скорости и давления полиномами второго порядка [3]. Последний хорошо зарекомендовал себя при решении эталонной задачи для уравнений Навье — Стокса — задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой [3].

Проведены численные эксперименты, в которых показано влияние конвекции на распределение температуры в сварочной ванне и на ее размеры.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-08-00249-а) и СО РАН (интеграционный проект № 26).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапеев В.П., Черепанов А.Н. Конечно-разностный алгоритм для численного моделирования процессов лазерной сварки металлических пластин // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, № 4. С. 102–117.
2. Исаев В.И. Консервативный вариант метода коллокаций и наименьших квадратов // Тр. 40-й всероссийской конф. “Проблемы теоретической и прикладной математики”. Екатеринбург, 2009.
3. Isaev V.I., Shapeev V.P. Development of the collocations and least squares method // Proc. Steklov Inst. Math. 2008. Suppl. 1. P. S87–S106.

**Итеративный метод решения задачи
быстродействия для нелинейных
стационарных систем**
**Iterative method of solving time optimal control
problem for nonlinear stationary systems**

Шевченко Г. В.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
Россия; shevch@math.nsc.ru*

Для задач оптимального быстродействия с нелинейными системами со стационарной правой частью предлагается итерационный метод решения, который является обобщением метода решения нелинейных задач оптимального быстродействия для систем, разделённых по фазовым состояниям и управлениям [2]. Метод основан на построении конечных последовательностей смежных симплексов с вершинами на границах областей достижимости. При предположении об управляемости системы доказано, что за конечное число итераций минимизирующая последовательность сходится к ε -оптимальному решению. Следуя [1], пару $\{T, u\}$, где $T \leq T_{\text{opt}}$, T_{opt} — время оптимального по быстродействию перевода системы из начального состояния в ε -окрестность начала координат, u — допустимое управление, под действием которого система переходит в ε -окрестность начала координат за время T , назовём ε -оптимальным решением.

Пусть управляемый объект описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор фазового состояния объекта; $x(0) = x^0$ — начальное состояние; $f(x, u)$ — непрерывная по x и u и непрерывно дифференцируемая по x вектор-функция, $f(x, u)|_{x \neq 0, u \neq 0} \neq 0$, $f(0, 0) = 0$ и $f(0, u)|_{u \neq 0} \neq 0$; u — s -мерный вектор управляющих воздействий, компоненты которого являются измеримыми функциями и стеснены ограничением

$$u(t) \in U, \quad (2)$$

U — компактное выпуклое тело из $\mathbb{R}^s$, причём 0 является внутренней точкой множества U .

Предполагается, что система (1) полностью управляема.

ЗАДАЧА. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее систему (1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат за минимально возможное время $T = T_{\text{opt}}$.

Предлагаемый метод решения задачи оптимального быстродействия состоит из двух этапов. На *первом* этапе строятся монотонно возрастающая последовательность времён $\{T_k\}$ и последовательность симплексов $\{\sigma^k\}$ с вершинами на границе области достижимости $\mathfrak{R}(T_k)$. Построение заканчивается, когда очередной построенный симплекс поглотит начало координат. Следует отметить, что построение ведётся так, что если $T_k = T_{k+1}$, то симплексы σ^k и σ^{k+1} являются смежными и $\rho(\sigma^k) > \rho(\sigma^{k+1})$, где $\rho(\sigma)$ — расстояние от начала координат до симплекса $\sigma = [z^1, \dots, z^{n+1}]$, т. е.

$$\rho(\sigma) = \min_{\sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i z^i \right\|^2.$$

На *втором* этапе для уточнения оптимального времени используются процедуры проверки принадлежности начала координат множеству $\mathcal{R}_{\sigma^k}$ или области достижимости $\mathfrak{R}(T_k)$. Множество $\mathcal{R}_{\sigma^k}$ представляет из себя концы траекторий системы (1) с началом в $x(0) = x^0$ при управлениях, которые являются линейными выпуклыми комбинациями управлений, соответствующих вершинам симплекса σ^k . Показано, что эти процедуры конечны.

Доказана сходимость предлагаемого итеративного метода.

Работа выполнена при поддержке СО РАН (проект № 85).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко Г. В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 8. С. 1184–1196.
2. Шевченко Г. В. Метод численного решения нелинейной задачи оптимального быстродействия с аддитивным управлением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 11. С. 1843–1853.

**Определение коэффициентов
в обратной задаче акустики**
**Determining unknown coefficients
in inverse acoustic problem**

Шишленин М. А.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия; mshishlenin@ngs.ru*

Обратная задача акустики сформулирована в виде обратной задачи для симметрической t -гиперболической системы уравнений первого порядка. Требуется по данным на части границы восстановить коэффициенты, входящие в систему уравнений.

Метод квазирешения В. К. Иванова обычно рассматривается для линейных уравнений и на компактных множествах. Этот метод был применен для решения обратной задачи акустики, причем множеством корректности был выбран не компакт, а шар в гильбертовом пространстве. Удалось показать, что использование в алгоритме в качестве априорной информации радиуса шара позволяет на несколько порядков сократить количество итераций метода простой итерации (Ландвебера).

Построен оптимизационный метод решения обратной задачи. Проведен сравнительный анализ численных методов решения [1, 2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00746).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., and Shishlenin M. A.* Direct methods of solving multidimensional inverse hyperbolic problems. The Netherlands: VSP, 2005.
2. *Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A.* Quasi-solution in inverse coefficient problems // J. Inv. Ill-Posed Probl. 2008. V. 16, N 7. P. 707–715.

Анализ вычислительных схем решения трехмерного векторного уравнения Гельмгольца

Analysis of numerical schemes for the three-dimensional vector Helmholtz equation

Шурина Э. П.¹, Нечаев О. В.²

¹Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия; shurina@online.sinor.ru

²Институт нефтегазовой геологии и геофизики
им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия; oleg-n@mail.ru

В частотной области моделирование электромагнитного поля может быть приведено к процедуре решения уравнения Гельмгольца относительно комплекснозначной векторной функции напряженности электрического поля в трехмерной области с липшиц-непрерывной границей. Особенности решения такого класса задач связаны с ядром роторного оператора, условиями непрерывности тангенциальных компонент электрического поля, максимально точным выполнением условия совместности системы линейных алгебраических уравнений, полученных после дискретизации сформулированной задачи, условием сохранения заряда в областях с разрывными коэффициентами. Последнее условие связано с аппроксимацией скачка нормальной компоненты электрического поля на межфрагментарных границах, разделяющих расчетную область на подобласти с достаточно высокой контрастностью коэффициентов уравнения.

Конечноэлементная аппроксимация краевой задачи выполняется в дискретном подпространстве пространства векторных функций, квадрат ротора которых интегрируем по расчетной области, на тетраэдральном (либо гексаэдральном) разбиении расчетной области. В работах R. Hiptmayer, D. N. Arnold, P. Monk, D. White, J. R. Webb рассматриваются вычислительные схемы, построенные на edge-элементах (базис низкого порядка), либо предлагаются алгоритмы построения иерархических базисов высоких порядков.

Только в последнее время появились работы (Y. Saad, 2006; C. Vuik, 2008), в которых анализируются двухуровневые и многоуровневые предобусловленные методы на подпространствах Крылова. В работе

(O. V. Nechaev, E. P. Shurina, M. A. Botchev, 2008) рассматривается новая итерационная схема для эффективного решения трехмерного уравнения Гельмгольца в областях со скачками коэффициента электропроводности в подобластях.

В данной работе рассматривается аппроксимация векторного уравнения Гельмгольца, тангенциальные векторные иерархические базисные функции полного (базис второго типа) второго, третьего порядков, удовлетворяющие условиям включения (диаграмма Де Рама), и методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), ассоциированных с этими аппроксимациями. При моделировании электрического поля в составных областях при соизмеримых токах проводимости и смещения, и высоких контрастах в физических характеристиках подобластей наиболее эффективными являются многоуровневые алгоритмы, реализованные на полных иерархических базисах второго типа, порядок которых не менее двух. Так расчет электрического поля в скважине со смещенным зондом в диэлектрическом корпусе (частота 14 МГц, удельное сопротивление бурового раствора 1 Ом м; зоны проникновения буровой жидкости, тонкие пласты, удельное сопротивление 2 Ом м; вмещающая среда, удельное сопротивление 10 Ом м; относительная норма невязки СЛАУ не более 10^{-7}) выполняется в течение 15 минут. При этом размерность СЛАУ более 2000000. В качестве решателя использовался многоуровневый метод, разработанный для решения СЛАУ — дискретных аналогов векторных вариационных формулировок для уравнения Гельмгольца.

Сравнительный анализ вычислительных схем для расчета высокочастотных полей (частоты выше 1 ГГц) в средах с проводимостью равной нулю и достаточно высоким коэффициентом диэлектрической проницаемости диэлектрика (волноводы, оптоволоконная техника) показал наибольшую эффективность решателей, ориентированных на аппроксимации векторными базисными функциями высоких порядков первого типа (неполный базис).

**Моделирование отклика глобального океана
на охлаждение поверхностных вод с временным
масштабом ледникового периода**

**Simulation the global ocean response to cooling
the surface waters with time scale of the ice age**

Щербаков А. В.¹, Малахова В. В.²

¹ Югорский НИИ информационных технологий, Ханты-Мансийск,
Россия; scherbak@uriit.ru

² Институт вычислительной математики и математической
геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; malax@sscc.ru

На основе данных об изменении климата на протяжении последних 420 тысяч лет, которые были получены при изучении ледяных кернов из Антарктиды и Гренландии [1], установлены четыре долговременных климатических цикла состоящих из чередования периодов оледенения и потепления, которые происходили с периодичностью в 90–120 тыс. лет. Для всех четырех циклов характерным является быстрое потепление, когда средняя температура атмосферы за 10 тыс. лет увеличивается на величину порядка 10 градусов и за время порядка 70–100 тыс. лет уменьшается на эту же величину. Используемая квазигеострофическая численная модель климата Мирового океана [2] основана на решении трехмерных уравнений переноса тепла и соли на равномерной пятиградусной широтно-долготной сетке и неравномерной, сгущающейся к поверхности, сетке по вертикали с 24 расчетными уровнями. Компоненты вектора скорости определяются из линейных уравнений движения через интегральную функцию тока и найденные температуру и соленость. На поверхности океана заданы сезонно изменяющиеся температура, соленость и напряжение трения ветра. На боковых границах и дне океана заданы нулевые потоки тепла и соли и условия скольжения. Исследованы свойства численной модели глобального климата в зависимости от вертикального и временного разрешения. Эксперимент начинается с климатического состояния, которое было получено в результате интегрирования глобальной геострофической модели [2] под действием заданных на поверхности океана сезонно изменяющихся значений температуры, солености и напряжений трения ветра.

Предполагая, что изменения температуры поверхностных вод океана следуют за изменениями температуры атмосферы всюду, кроме

покрытых льдом полярных областей, исследуется реакция океанского климата на эти изменения с характерным временным масштабом ледникового периода 120 тыс. лет. В граничных условиях на поверхности океана задается медленное длительное похолодание, в результате которого заданные зимние и летние значения температуры поверхности океана из атласа Левитуса в каждой точке расчетной сетки уменьшаются на величину порядка 8 градусов за 90 тыс. лет. Далее задается относительно быстрое за 10 тыс. лет потепление на ту же величину. Анализ полученных результатов показал, что верхняя часть главного термоклина синхронно следует за изменением поверхностной температуры. Но, начиная с глубин порядка 800 м, изменение температуры происходит в противофазе к поверхностным изменениям. Причем максимальное повышение температуры испытывают придонные воды между 30 и 90 тыс. лет. После относительно быстрого потепления поверхностных вод между 90 и 100 тыс. лет глобальный климат вернулся в исходное состояние.

Существующие в настоящее время данные по реконструкции температуры поверхности Мирового океана в период последнего ледникового максимума показывают, что похолодание поверхности океана носит существенно неоднородный — преимущественно зональный характер. При этом температура поверхности океана в тропиках уменьшается всего на 2–3°, тогда как в высоких, как правило, зимних широтах, она уменьшается на 7–10°. Поэтому если проделать численные эксперименты такой же продолжительности в 120 тыс. лет, когда температура поверхности океана в период максимума оледенения в тропических широтах меньше сегодняшней на 2–3° или на 5–6°, а в высоких широтах по-прежнему на 7–10°, то такой глобальной перестройки всей термохалинной структуры Мирового океана уже не получается. Имеет место плавный переход от описанного экстремального случая к более умеренным изменениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Котляков В. М. Скважина на станции Восток рассказывает о прошлом климате Земли // ГНТП “Глобальные изменения природной среды и климата”. Избр. научн. тр. под ред. Лаверова Н. П. М., 1997. С. 281–291.
2. Щербаков А. В., Малахова В. В. Численное моделирование глобального климата океана. Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2008. 159 с.

**Двумерные фильтрационные течения
со свободными границами: новые подходы
к моделированию и анализу**

**Two dimensional filtration flows with free
boundaries: new approaches to modelling and analysis**

Эмих В. Н.

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия; emikh@hydro.nsc.ru*

Выход в свет книги [1] положил начало математическому моделированию фильтрационных течений на базе краевых задач теории аналитических функций. Гидродинамическая теория фильтрации стала центральным разделом подземной гидродинамики.

В середине прошлого столетия исследователи обратились к многопараметрическим краевым задачам фильтрации со свободными границами. Единственной основой полноценного анализа таких течений является прямая постановка. На пути её осуществления возникает проблема нахождения неизвестных параметров конформных отображений из систем трансцендентных уравнений, связывающих эти параметры с определяющими физическими параметрами задачи. При имевшихся в то время вычислительных ресурсах эта трудоёмкая процедура была подчас невыполнимой, что привело к замедлению развития гидродинамической теории.

Другая, обозначившаяся в ходе исследований проблема состоит в том, что моделируемые течения со свободными границами реализуются в описывающих эти течения многопараметрических краевых задачах при определённых ограничениях на параметры отображения, а в конечном итоге — на входные физические параметры. В задачах фильтрации к горизонтальным дренам и скважинам выявление указанных ограничений означает установление технологии эксплуатации таких устройств, исключающей поступление в них воздуха или содержащихся в пласте жидкостей с иными физическими свойствами. В связи с этим на первом этапе моделирования расчёту подлежат критические режимы, возникающие на грани дестабилизации подвижных границ потоков. За этой гранью краевые задачи описывают иные схемы течения, также являющиеся критическими, гидродинамически неустойчивыми

и в силу этого — физически нереализуемыми. Принципиально новых подходов потребовали задачи фильтрации пресных вод над солёными с дренажём, воздействию которого подвержены как свободная поверхность потока, так и поверхность раздела между пресными и солёными водами. Ключевую роль при математическом моделировании таких течений играет специфический для них *двойной критический режим* [2]. Он состоит в том, что при интенсификации дренажа, заложенного на определённой глубине, на грани дестабилизации оказываются одновременно обе подвижные границы. В других случаях критический режим возникает на одной из границ в зависимости от соотношения между фактической глубиной дрен и их глубиной в двойном критическом режиме. Именно он и подлежит, следовательно, первоочередному расчёту. Вычисляемая в этом режиме глубина дренажа является в некотором смысле оптимальной, позволяя достичь максимально возможной продуктивности дрен. Таким образом, сугубо предельная ситуация приобретает самостоятельную значимость при исследовании течений к горизонтальным водозаборам или нефтедобывающим скважинам. Применительно к проблемам гидромелиорации подобные оптимизационные расчёты также можно выполнить в рамках критических режимов.

На такой основе создан обширный комплекс математических моделей фильтрации с дренажём. При их построении наряду с классическими методами теоретического анализа существенную роль играют численные расчёты, осуществляемые по специальным компьютерным программам как на стадии обоснования разрешимости уравнений относительно параметров отображений, так и на завершающем этапе вычисления фильтрационных характеристик моделируемых течений и выявления их закономерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и её основные приложения. Собр. соч. Т. 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 3–352
2. Эмих В. Н. Краевая задача о дренируемой кайме пресных вод и её приложения // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 494–503.

Design of very high order schemes for compressible fluid dynamics

Abgrall R.

*University of Bordeaux I, Institut National de Recherche en Informatique
et Automatique, Talence, France; remi.abgrall@inria.fr*

We are interested in the numerical simulation of the compressible Euler equations on unstructured meshes by mean of a high order method. In this paper, we develop an systematic extension of the Residual Distribution method of [Abgrall, JCP 2006] for getting arbitrary order. If the method is general, particular emphasis is given on the third order case. After having developed the method, it is tested and validated against several classical bench mark problems. In particular, we demonstrate that we an both have a non oscillatory behavior, even for very strong shocks and complex flow patterns, but also the expected accuracy on smooth problems.

This paper summarizes and extend a series of conference papers (ICCFD 2008 and ECCOMAS 2008 in Venice).

The history and analysis of computer architecture development

Babayan B. A.

Intel® Corporation, Moscow, Russia; boris.a.babayan@intel.com

1. Introduction. During the long history of computing, computer architecture has gone through a good deal of changes and improvements. Having over 50 years experience in computer design, the author provides analysis of the computer architecture development from the start of computer age. Particular emphasis is placed on the significant contributions that the Soviet and Russian scientists have made in designing and building microprocessor and computer systems. The evolution of computer architectures is reviewed starting from early sequential computers and going through various innovations of parallel machines up to superscalar architecture computer. The author shares his knowledge, insights and observations of developing a few generations of high-performance Elbrus computers used for the most critical applications in the former Soviet Union and Russia. Today the computer architecture development reached the level, when it has to consider and manage the limits of superscalar architecture. Capabilities and limitations of today's superscalar architecture are analyzed and assessed. A critical situation in computer architectures caused by limitations of superscalar performance growth and ways of coping with it are discussed.

2. Analysis of computer architecture evolution. The performance of the first sequential computers depended on the performance of arithmetic units. Basic architectural solutions, including carry-safe arithmetic, fail-safe capability, etc., were used to improve their speed and reliability. These solutions were embodied in M-40, 5E92b machines. Back in early 50s, one of the major research and design challenges was design and implementation of parallel computations. The first steps towards parallelism in Russia were made by Sergey Lebedev, who designed BESM — the forefather of parallel computations in Russia.

With the number of arithmetic units increased the designers were challenged with the goal how to make them work in parallel. First superscalars arrived. In Russia — Elbrus 1, at Intel — PentiumPro. Elbrus-1 was designed in 1978, it had an advanced stack oriented processor architecture

with superscalar issue, multiprocessor support, tagged architecture for high reliability and other state-of-the-art features. One of the most important technologies implemented in Elbrus 1 was type safety. Before the 80s, many universities and companies in the West were doing intensive research in that area, they created test samples and prototypes of the systems aimed at solving the problem of system protection against adverse effect of SW bugs, viruses and malicious attacks. In early 80s Intel designed iAPX 432 computer. This design supported type-safety, however its implementation was not successful, because Intel did not introduce tags and used instead the traditional approach. Elbrus type-safety approach is based on type checking at all system levels, including hardware, language and operating system. The benefits of this seamless integration of hardware and software eliminate the possibility of virus propagation, substantially improving program debugging facility. This solution was further advanced and embodied in the next generations of Elbrus computers.

Elbrus developed into a series of even more advanced designs. Ten-processor supercomputer Elbrus 2 was delivered in 1984, it ran critical applications for the Soviet government, including the Russian missile-defense system. In the 1985, fifteen years before Intel and HP were considering EPIC, the design of the new line of VLIW oriented supercomputer Elbrus 3 was started. Innovative design concepts and features implemented in this computer are still ahead of the similarly designed systems in the West. A key technology was Very Long Instruction Word (VLIW)/Explicitly Parallel Instruction Computing (EPIC). This technology was later to be used in the Intel Itanium processor family, released in 2000. Transmeta Corp. built Crusoe and Efficeon based on VLIW/EPIC using binary translation (code morphing) as a core technology.

With rapid advances in technology computer complexity is getting worse. High complexity of superscalar does not provide for further performance growth. It must parallelize execution of sequential operations on the fly. It must define information dependences and be aware what instructions must be executed out-of-order, it must perform register renaming. The technical solution used in Elbrus 3 provided for compiler and HW being together responsible for the complexity of accomplishing of computing tasks. The Elbrus-3 VLIW/EPIC implementation relied on strong compilers and explicit parallelism for performance. Along with VLIW/EPIC, Elbrus-3 also drove the development of binary translation technology. This technology solves the problem of compatibility between the new and old architectures. Elbrus 3M microprocessor released in 2007 improving on many

of Elbrus features has demonstrated significant benefits of this approach.

Today binary translation approach is much talked about. Many computer minds are focused on this technology, because superscalar has reached its limit and does not provide for significant performance improvement. Efficient hardware-supported binary translation can offer a new way to design processors. It has a potential to change the computer world and save it from stagnation.

Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case

Bukhgeim A. L.¹, Bukhgeim A. A.²

¹ *Wichita State University, Wichita, USA;*

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia;

Boukhgueim@math.wichita.edu; Bukhgeim@math.nsc.ru

² *Schlumberger, Oslo, Norway; ABoukhgueim@slb.com*

The task of scattering theory is to reconstruct the atomic forces in quantum mechanics, or the refractive index in acoustics, or electromagnetic medium, from the observable quantities. In quantum mechanics the observable is the scattering operator (scattering amplitude). In 1943 Heisenberg assumed that all information about atomic forces (say, potential) can be extracted from the scattering operator. Inverse problems involving a radial potential were solved in the well-known papers by Borg, Levinson, Gelfand and Levitan, and Marchenko. In the multidimensional case ($n > 2$) uniqueness on fixed energy level follows from the paper by Sylvester and Uhlmann and the Rellich-Vekua lemma. This was done by R. Novikov. The $n = 2$ case fails to be overdetermined and is hence much more difficult. In this case uniqueness is known only for sufficiently small potentials, or for potentials of “conductivity type”.

Acoustic or seismic observables are Cauchy data sets on the boundary. Similar problems arise in electro-impedance tomography. In the acoustic case, just like the case above, the first eigenvalue of the Dirichlet problem for the Laplace operator is like the Great Chinese Wall.

Only recently the first author [1] proved that the set of Cauchy data for the Schrödinger (or Helmholtz) equation in the two-dimensional case determines the bounded potential uniquely. Hence the scattering amplitude at a fixed energy uniquely determines a bounded potential with compact support. An inversion formula was also obtained for smooth potentials. In collaboration with the second author this formula was tested numerically. For solving this problem numerically we use some new properties of the Zernike polynomials. This approach significantly reduces the time complexity of the problem. The purpose of this report is to provide basic analytic and numerical tools for solving such kind of inverse problems. We also provide a short fresh overview of Zernike polynomials which we use in our numerical algorithms.

REFERENCES

1. *Bukhgeim A.L.*, “Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case,” *J. Inv. Ill-Posed Probl.*, **16**, No. 1, 19–33 (2008).

Approximate and exact solitary wave solutions of the higher-order KdV equations

Burde G. I.

*Jacob Blaustein Institutes for Desert Research, Ben-Gurion University,
Sede-Boker Campus, Israel; georg@bgu.ac.il*

In many practical physical problems, the nonlinear wave equations of interest are nonintegrable. In some cases they may be close to an integrable equation, and then the perturbation techniques can be applied for constructing approximate solutions. However, even in these cases and certainly in general, it is useful to construct exact explicit solutions. The famous Korteweg–de Vries (KdV) equation arises in many physical contexts as an equation governing weakly nonlinear long waves when nonlinearity and dispersion are in balance at leading order. If higher order nonlinear and dispersive effects are of interest, then the asymptotic expansion can be extended to the higher orders in the wave amplitude which leads to the KdV equation with higher-order corrections. In this paper, the methods of constructing the approximate and exact solitary wave solutions are developed and applied to a general class of scalar higher-order (fifth-order) KdV equations (defined, for example, in [1]).

First, based on the ideas of the approach developed in [2] and [3], the Lie group machinery is used to construct approximate solutions stemming from the solutions of the leading order KdV equation. This approach is further generalized by introducing the concept of the extended symmetries which, as distinct from standard symmetries, map solutions of the evolution equation with higher order corrections to solutions of the leading order equation. The extended symmetries can be used in several ways for construction of (exact or approximate) solutions of the perturbed evolution equations starting from the solutions of the leading order equations. They may be also used for construction of the equations asymptotically close to the considered perturbed equation but possessing the closed-form solutions.

Second, a modification of the direct method for finding solitary wave solutions is introduced and the new exact and explicit solitary wave solutions of the higher-order KdV equations, and of the standard KdV equation, found using this technique are presented.

REFERENCES

1. Kichenassamy S., Olver P. J., "Existence and nonexistence of solitary wave solutions to higher-order model evolution equations," SIAM J. Math. Anal., **23**, 1141–1166 (1992).
2. Burde G. I., "Potential symmetries of the nonlinear wave equation $u_{tt} = (uu_x)_x$ and related exact and approximate solutions," J. Phys. A: Math. Gen., **34**, 5355–5371 (2001).
3. Burde G. I., "On the asymptotic solutions of the KdV equation with higher-order corrections," Nonlinearity, **18**, 1443–1461 (2005).

Model reduction in applications

Bykov V. V.¹, Maas U.²

Karlsruhe University, Karlsruhe, Germany;

¹bykov@itt.uni-karlsruhe.de, ²maas@itt.uni-karlsruhe.de

The qualitative system analysis and model reduction for reacting flows has gained an increasing interest during the last years. Nowadays, numerical simulations based on sophisticated algorithms and implemented on powerful workstations turn out to be a prevailing tool of the system analysis. However, the fast progress both in the detailed understanding of the underlying processes and the continuous trend from the solution of simple model systems towards realistic systems of technical importance leads to an extreme growth of the mathematical models (which represents conservation laws and describes the reacting flow from the first principles) both in complexity (nonlinearity) and in dimension. Typically, in order to describe the reacting flow properly, very large models are designed, which deliver vital information about the flow, but they are not treatable even by modern computational facilities.

The resulting problems are excessive CPU and storage requirements, and a possible stiffness of the underlying system. Moreover, even if the system has been simulated, to filter terabytes of data and obtain crucial information about the system behaviour is not a trivial task. Accordingly, the need for automatic numerical methods providing with important properties of systems and their reduced models, which are simple (low dimensional, less complex etc.), but nonetheless, describe quantitatively well the underlying process, has increased constantly.

Much research is dedicated to reduced mechanisms with less system variables and parameters. This approach is not universal in the sense that it requires a thorough investigation for each particular type of reacting flow system with subsequent benchmarking against the underlying detailed model for all operating conditions. On the other hand, one would be interested in an universal method for analysing large systems that does not require an intimate knowledge of the underlying physics and chemistry that is necessary for an a-priori reduction of the system dimension and complexity. The reduction method should be automatically applicable to any phenomena described by a large and complex system, thus lending itself to a numerical implementation in a vast area of science and technology.

Recently, the framework of Singularly Perturbed Vector Fields (SPVF) has been suggested in [1, 2]. It incorporates the concept of a system decomposition by using invariant, attractive and stable manifolds, which allows to study properties of the detailed system describing the reacting flow by considering appropriate low dimensional manifolds that naturally appear in the detailed system state space as a manifestation of a restricted number of degrees of freedom governing the system.

The method of automatic reduction of chemical kinetics models that both produces the reduced models and provides a strategy for the implementation of this model for the system integration will be presented. The reduced kinetic mechanism is constructed as a table of a slow manifold mesh in the composition or state space. The manifold table contains all necessary information about the reduced kinetics as well as about the projection of the original system of governing equations on this low dimensional manifold. Thus, the actual reduction is realized by a reformulation of the system of governing equations on the low dimensional manifold that approximates the full system dynamics in the whole state space.

REFERENCES

1. Bykov V., Goldfarb I., Gol'dshtein V., "Singularly perturbed vector fields," J. Phys., Conf. Ser., **55**, 28–44 (2006).
2. Bykov V., Gol'dshtein V., Maas U., "Simple global reduction technique based on decomposition approach," Combust. Theory Model., **12**, No. 2, 389–405 (2008).

Solid–fluid diffuse interface model

Gavrilyuk S.

Aix-Marseille University, UMR CNRS 6595, IUSTI, Marseille, France;
`sergey.gavrilyuk@polytech.univ-mrs.fr`

We derive an Eulerian diffuse interface model for elastic solid-compressible fluid interactions in situations involving extreme deformations. Elastic effects are included following the Eulerian conservative formulation proposed in Godunov (1978), Miller and Colella (2001), Godunov and Romenski (2003), Plohr and Plohr (2005), Gavrilyuk, Favrie and Saurel (2008). We apply first the Hamilton principle of stationary action to derive the conservative part of the model. The relaxation terms are then added which are compatible with the entropy inequality. In the limit of vanishing volume fractions the Euler equations of compressible fluids and a conservative hyperelastic model are recovered. Capabilities of the model and methods are illustrated on various tests of impacts of solids moving in an ambient compressible fluid.

High-performance computing for solving grid elliptic problems with separable variables

Gololobov S. V.¹, Kalinkin A. A.¹, Laevsky Yu. M.²

¹*ZAO INTEL A/O, Novosibirsk, Russia*

²*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics
SB RAS, Novosibirsk, Russia; laev@labchem.ssc.ru*

Among elliptic boundary value problems, the class of problems with separable variables can be solved fast and directly. Elliptic problems with separable variables usually assume that the computational domains are simple e.g., rectangle or circle, and constant coefficients [3]. This kind of problems can serve to generate preconditioners in iterative procedures or used in low-accuracy models similar to the ones used in Numerical Weather Simulations.

A straightforward implementation of solvers for such problems makes them considered as too simple to pay much attention to them. For instance, NETLIB* contains the codes of various solvers for problems with separable variables. We are not aware if such solvers are provided as separate solvers in other software packages except NETLIB Fishpack* and Intel®Math Kernel Library (Intel®MKL) together with Intel®Cluster Poisson Solver Library (Intel®CPSL).

Computational Mathematics suggests that we take into consideration not only arithmetic operations, but also the cost of memory operations as well. Modern computers can perform computations at a very high speed, while lacking the ability to deliver data to the computational units. Keeping in mind that a memory operation can easily be dozen to hundred times slower than an arithmetic one, a computationally optimal algorithm could compute the solution slower than memory optimal algorithm.

The recent developments in processor industry resulted in multicore processors become standard processors not only for powerful clusters, but also for home computers and laptops. Therefore, the algorithm can also be non-optimal from the parallelization point of view. Optimality here can be understood in terms of the number of synchronization points and/or in terms of the amount of data that needs to be transferred between different cores/processors.

In summary, the modern computational algorithm should focus on 3 key aspects, namely, parallelization, memory operations, and arithmetic costs.

The purpose of this talk is to demonstrate on a simple 2D problem with separable variables that taking into account modern model the solution can be computed efficiently and fast. To complete our goal, we will evaluate software provided by Intel Corporation. In particular, we focus on the comparison (where possible) of NETLIB Fishpack* and Intel®CPSL provided at [1] as well as Intel®MKL provided at [2].

In particular, we took to solve the 2D Poisson problem of meshsize $10^5 \times 10^5$, that is, the problem with 10^{10} unknowns and ran it.

Performance tests and ratings are measured using specific computer systems and/or components and reflect the approximate performance of Intel products as measured by those tests. Any difference in system hardware or software design or configuration may affect actual performance. Buyers should consult other sources of information to evaluate the performance of systems or components they are considering purchasing. For more information on performance tests and on the performance of Intel products, visit Intel Performance Benchmark Limitations.

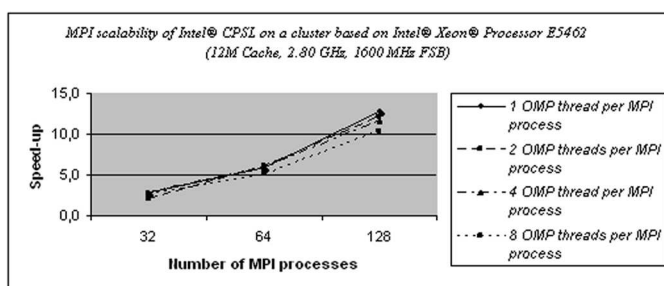


Fig. 1. Scalability of Intel®MKL PL (2D Cartesian case) (double precision).

REFERENCES

1. Intel®Cluster Poisson Solver Library, <http://software.intel.com/en-us/articles/intel-cluster-poisson-solver-library>
2. Intel®Math Kernel Library, <http://www.intel.com/software/products/mkl>
3. Samarskii A. A. and Nikolaev E. S., Methods of Solution of Grid Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1978).

Conservation of the Loitsyansky invariant in the Millionshtchikov model of homogeneous isotropic turbulence

Grebenev V. N.

Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia;
vngrebenev@gmail.com

We study analytically the dynamics in time of homogeneous isotropic turbulence and use the Millionshtchikov closure model for the von Kármán–Howarth equation [1] which is written in the following form [2]

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} r^4 \left(2\kappa_2 r \sqrt{u'^2(t)} + 2\nu \right) \frac{\partial}{\partial r} B_{LL},$$

$$r = |\vec{r}|, \quad \vec{r} = (r_1, r_2, r_3) \in K^3.$$

Here $B_{LL}(r, t)$ is the so-called longitudinal correlation function and presents the first diagonal element of the two-point correlation tensor $B_{ij}(\vec{x}, \vec{x}'; t)$ which acts in the correlation space $K^3 \simeq \mathbb{R}^3$ for each time t , where $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$, $\kappa_2 = \sqrt{2}/(5C^{3/2})$, C is the Kolmogorov constant. The above-mentioned equation is the lowest-order two-point statistical equation for turbulence dynamics and may be understood as a relationship between the rate of change of energy in scales $\sim r$ to the flux of energy through scales $\sim r$.

Loitsyansky invariant (conservation law) [3]

$$\Lambda = \overline{u'^2(t)} \int_0^\infty r^4 f(r, t) dr, \quad \Lambda \equiv const,$$

(where $B_{LL}(r, t) = \overline{u'^2(t)} f(r, t)$ and f is the normalized two-point double velocity correlation) plays the role of a conservation law that enables to determine both final period of decay of turbulence for $t \rightarrow \infty$ and asymptotic decreasing the longitudinal correlation function as the correlation distance $r \rightarrow \infty$. In particular, this conservation law is used to determine the parameter σ for the invariants obtained of the two-parametric Lie scaling group (see [4])

$$G^{a_1, a_2} : t^* = e^{a_2} t, \quad r^* = e^{a_1} r, \quad \overline{u'^2}^* = e^{2(a_1 - a_2)} \overline{u'^2}, \quad f^* = f,$$

admitted by the inviscid form of the Millionshtchikov closure model for the von Kármán-Howarth equation. The invariants of G^{a_1, a_2} are

$$\xi = \frac{r}{t^{2/(\sigma+3)}}, \quad \hat{f} = \frac{\overline{u'^2} f}{t^{-2(\sigma+1)/(\sigma+3)}}, \quad \text{with } \sigma = \frac{2a_2 - 3a_1}{a_1},$$

where a_i , $i = 1, 2$ are given above. Here r is scaled by the integral length scale $l_t \propto t^{2/(\sigma+3)}$. The parameter σ is determined by $\sigma = 4$ due to the Loitsyansky conservation law that enables us to compute the evolution of $\overline{u'^2}(t)$ and the integral length scale l_t

$$\overline{u'^2}(t) \propto (t + a)^{-10/7}, \quad l_t \propto (t + a)^{2/7}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

The aim of the present work is to prove that the Loitsyansky invariant is admitted by the Millionshtchikov closure model. First, we study the existence of solutions to an initial-boundary value problem for this model and establish the asymptotic stability of the Millionshtchikov selfsimilar solution [2]. The theory of contractive linear semigroups combined with the iterative process (the Trotter–Kato product formula) is used to find a solution of the original problem. Then, we prove that the continuous semigroup constructed admits the Loitsyansky invariant for a suitable initial date. However, this assertion is incorrect in general, depending on how the homogeneous isotropic turbulence is created. Dependence of solution obtained on the laminar viscosity (in the limit of small Reynolds numbers) is also studied together with other accompanying questions.

This work was supported by Inter-regional Integration project SD RAN (grant № 103).

REFERENCES

1. von Kármán Th., Howarth L., “On the statistical theory of isotropic turbulence,” Proc. Roy. Soc., **A168**, 192–215 (1938).
2. Millionshtchikov M., “Isotropic turbulence in the field of turbulente viscosity,” JETP Lett., **10**, No. 8, 259–263 (1969).
3. Monin A. S., Yaglom A. M., Statistical Hydromechanics [in Russian], Gidrometeoizdat, St.-Petersburg (1996).
4. Grebenev V. N., Oberlack M., “A geometric interpretation of the second-order structure function arising in turbulence,” Math. Phys. Anal. Geom, **12**, No. 1, 1–18 (2009).

Stabilization of a layered piezoelectric 3-D body by boundary dissipation

Kapitonov B. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
`borisvk@lncc.br`

We consider a linear coupled system of quasi-electrostatic equations which govern the evolution of a 3-D layered piezoelectric body. Assuming that a dissipative effect is at the boundary, we study the uniform stabilization problem. We prove that this is the case, provided some geometric conditions on the region and the interface hold. We also assume a monotonicity condition on the coefficients. As an application, we deduce exact controllability of the system with boundary control via a classical result due to Russell.

A review of effective parallelization schemes in application to computational linear algebra

Kobotov A. V.

Intel® Corporation, Novosibirsk, Russia;
`alexander.v.kobotov@intel.com`

The number of cores in today's high performance computers continues to increase, and it is important to develop algorithms that can be efficiently parallelized to exploit these new capabilities. The biggest challenge for parallelizing existing algorithms is to create an efficient load balance between computational cores together with extracting maximal performance on every core and keeping operation count on the same level. Several different approaches exist to distribute a work between computational threads. It looks like a quite obvious task if we talk about perfectly parallel algorithms (like matrix multiplication) — just divide work by number of cores. But in reality performance of cores could differ (eq. affected by other OS processes, by dynamically changed frequency, by NUMA data access, etc.), and such distribution becomes not the optimal one. The situation could befall to even worse if we assume not a perfectly parallelizable algorithm with data dependencies between its stages.

A solution is dynamical parallelization where free thread receives next available portion of work. But it also consider several problems to solve: balance between high performance of big subtasks and fine granularity for better subtasks distribution, data dependencies control and different way of doing that (OpenMP 3.0 [1], FLAME API [2], Cilk [3], etc.), workflow optimization to minimize critical path on data dependency graph, and so on.

The talk is devoted to an overview of these different parallelization approaches demonstrated on popular examples from Linear Algebra: Cholesky and QR factorizations. High efficiency of the best approaches is proven by achieving more than 90% utilization of overall floating point efficiency available at dual socket Intel® Core™ i7 Platform. Described algorithms are available as a part of Intel® Math Kernel Library [4].

REFERENCES

1. *Chapman B., Jost G., van der Pas R., Using OpenMP — Portable Shared Memory Parallel Programming, The MIT Press (2007). ISBN-10: 0-262-53302-2.*

2. Bientinese P., Quintana-Orti E. S., van de Geijn R. A., “Representing linear algebra algorithms in code: The FLAME application programming interfaces,” ACM Trans. Math. Softw., **31**, No. 1, 27–59 (2005).
3. Leiserson C., Plaat A., “Programming parallel applications in Cilk,” SIAM News, **31**, No. 4, 6–7 (1998)
4. Intel® Math Kernel Library, <http://www.intel.com/software/products/mkl>

Singular solutions of mixed boundary value problems of water impact

Korobkin A. A.

*Laurentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
University of East Anglia, Norwich, UK; a.korobkin@uea.ac.uk*

Unsteady two-dimensional and incompressible flow generated by impulsive motion of a floating body is studied during the early stage. Three shapes are considered: (a) plate, (b) wedge, (c) rectangle. Uniformly valid initial asymptotic solutions are derived for each shape.

In the problem of floating plate impact, the ratio of the plate displacement to the plate dimension plays the role of a small parameter. Asymptotic analysis is performed within the ideal and incompressible liquid model. Method of matched asymptotic expansions is used to derive the second order outer solution, which is valid outside small vicinities of the plate edge, and the equations which govern the flow close to the plate edge. It is shown that the initial flow close to the plate edge is self-similar in the leading order. This flow is governed by non-linear boundary-value problem with unknown shape of the free surface. The inner velocity potential was calculated numerically by boundary-element method. The far-field asymptotic behaviour of the inner solution is analytically derived. This asymptotics reveals an eigen solution which gives rise to important singular contribution to the second-order outer velocity potential. In addition to this singular eigen solution the second-order velocity potential is singular on its own at the plate edge. The singular solution of the outer second-order problem is obtained with the help of theory of analytic functions. The second-order outer solution is matched with the leading order inner solution. Uniformly valid distribution of the hydrodynamic pressure over the plate is obtained. Initial asymptotic behaviour of the total hydrodynamic force acting on the entering plate is analytically evaluated and compared with the results of numerical calculations by non-linear potential solver. It is shown that the eigen solution of the outer problem gives the most important contribution to the total force. Within the incompressible liquid model, the jet length is infinite.

The leading order outer and inner solutions are obtained in the problem of floating wedge impact. It is shown that this solution predicts infinite length of the jets formed by the impact. In order to estimate the jet

length, the weakly compressible liquid model is considered. The jet length is evaluated for small Mach number. The obtained solution is applied to the shaped charge problem studied by S. K. Godunov. Predicted length of cumulative jet is compared with experimental data by Kinelovskii. Fairly good agreement is reported.

The two-dimensional problem of floating box impact is studied by using asymptotic methods with the small parameter being the ratio of initial draft of the box to the width of its bottom. Initial stage of the process is subdivided into three phases. The outer solution is the same as that in the problem of floating plate impact but the inner solution is different for each phase. During the first phase the fluid separates from the corner points of the box. The dynamics of the cavity is approximately independent of the presence of the liquid free surface and is self-similar in the leading order. The cavity grows during the second phase, interacts with the free surface and finally escapes on the free surface with formation of the jet flow. At the third phase the flow approaches that derived in the problem of floating plate impact.

Optimization aspects of Intel® Math Kernel Library (Intel® MKL) sparse linear algebra on multi-core architectures

Kuznetsov S. V.

Intel® Corporation, Novosibirsk, Russia;
`sergey.v.kuznetsov@intel.com`

The solving large sparse linear systems of equations is often a stumbling block in many scientific problems. MKL offers several approaches for solving such problems. The PARDISO solver is sparse direct solver that is a thread-safe, high-performance and memory-efficient. Using this solver, you can solve symmetric and non-symmetric sparse linear systems of equations on shared-memory multiprocessors. There is a point for PARDISO* where the memory requirements for large systems can become prohibitively high and PARDISO/DSS will not work. This is where MKL iterative sparse solvers come in: these solvers can provide a remedy because only a few working vectors and the primary data need to be stored.

The Intel® MKL iterative solvers are based on a reverse communication interface (RCI) scheme that makes the user responsible for providing certain operations for the solver (for example, matrix-vector multiplications). To simplify the usage of Intel® MKL iterative solvers and gain additional performance, Intel® MKL offers Sparse BLAS functions that perform a number of common vector and matrix operations for the most popular sparse storage schemes: compressed Sparse Row (CSR), Compressed Sparse Column (CSC), diagonal, coordinate(COO), skyline and block sparse row (BSR) formats. Most Intel® MKL Sparse BLAS routines are OpenMP threaded and performance is much better when the data are in the cache.

Like dense matrices, the performance of Intel® MKL DSS/PARDISO* and Sparse BLAS depends on the details of the machine architectures, but unlike dense problems, the performance of these components also depends on the structure of the matrix because the distribution of the nonzero elements in a sparse matrix determines the memory access patterns. Surprisingly, many physical problems expose well-behaved sparse structure or rows which can be re-ordered to yield a better structure. PARDISO* uses approximate minimum degree ordering and threaded METIS reordering techniques for getting permutations to minimize fill-in and the associated

memory requirements. Internal storage for the matrix factors in PARDISO* is a block format. Most of computations are done with the help of Intel® MKL Level-3 BLAS and LAPACK. The usage of Level-3 BLAS, supernode pivoting, coupled with dynamic parallelization and asynchronous computations allows PARDISO* to achieve high gigaflops rates and nearly linear speedup on multi-core platforms.

There are differences in the way Level 2 and Level 3 Sparse BLAS are optimized on many core platforms. Some of the optimization techniques used are similar to those used for the dense level 2 and level 3 BLAS (e.g. low locality in Level 2 routines). For level 3 Sparse BLAS, reorganizing the computations to perform the entire set of multiplications as a single operation produces significantly better performance. It is natural to expect that the performance and scalability of Level 3 Sparse BLAS are better than those of the Level 2 Sparse BLAS. MKL sparse BLAS routines for the block sparse row format exploit the benefits of data blocking, have better data locality and make use of vector instructions. For example, the SSE2 instruction set can be used even for the level 2 sparse BLAS in this case. Similar optimizations are done for the diagonal and skyline format because the elements of the source vector as well as destination vector are accessed sequentially. The level 2 sparse BLAS operations for point entry sparse formats such as the compressed sparse row (CSR) or coordinate format (COO) are the most difficult to optimize because the elements of the source vector are accessed in a discontinuous way that leads to poor temporal locality. Nevertheless, many well-known optimization techniques are used in the Intel® MKL Sparse BLAS on multi-core architectures, among them blocking, pre-fetching, and advanced threading.

2D numerical model of hydraulic fracturing

Lapin V. N.¹, Cherny S. G.¹, Chirkov D. V.¹, Esipov D. V.¹,
Aleksenko O. P.², Medvedev O. O.²

¹*Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Engineering company Schlumberger, Novosibirsk, Russia;*

lapdump@ngs.ru

Hydraulic fracturing is the one of the most efficient way to increase oil well debit. High viscosity fluid is pumped in to the wellbore and forces the fracture to grow in the direction of rock maximum in situ stresses. The proppant is placed into the fracture to avoid its closing. Fracture form after pumping end and fluid leak-off is depends on proppant distribution.

Hydraulic fracture quality depends both on fluid, rock properties and on the phenomenon of tortuosity. This phenomenon is convoluted pathway connecting the wellbore to the main body of the fracture further away from the wellbore. It is very important to predict hydraulic fracturing fluid performance and screenout frequency in the near wellbore region.

There are number of planar two-dimensional models (PI2D) taken into account near-wellbore fracture tortuosity effect at any way. But they are not sophisticated enough. No one of them take into account all of the physical effects namely: non-Newtonian power law fluid flow inside the fracture, fluid leak-off through fracture walls and its filtration into the rock, rock deformation under fluid pressure, fracture propagation caused by rock destruction. In present method all this physical effects are taken into account. To define direction and speed of fracture tip propagation we use directly opening and shear modes of stress intensity factors.

At present proppant transport is not taken into account but it can be easily included in to the model. In the framework of our model we solve the fluid flow equations inside the crack coupled with the elasticity equations in the near wellbore area. Comparing our model with the most similar approaches one note the pressure gradient along the fracture is not taken into account as well as the interaction of the crack elements with the hole. However, these effects can be significant in the immediate vicinity of the wellbore and can change the stress picture.

Submodels mentioned above are fully coupled together and are solved simultaneously. Elastic equilibrium equations are solved by boundary element method (BEM). Proposed BEM has some preferences in comparison

with BEM used in hydraulic fracturing modeling. It is based on the most advanced in present method, namely the Dual BEM with discontinuous elements. The method employs directly physical variables on the boundary. There is no need to recalculate fictional variables to physical ones. The using of discontinues elements, which have all points inside gives simple approximation scheme of integral equations and simple method of regularizations of singular integrals. The approach gives us the usual way to construct the high order approximation schemes for integral equations.

The non-linear system of equations of our model consists of is solved by Newton's method to perform the time stepping. Model equations are rewritten regarding only the one vector variable — pressure distribution. It allows us to reduce system degree to mesh size and so to make algorithm more effective.

Detailed sensitivity analysis of fracture shape and width to the perforation misalignment, properties of fluid and rock have been carried out and would be presented into the paper.

Modelling diffuse interfaces with compressible materials

Saurel R.

*Polytech Marseille, UMR CNRS 6595, INRIA SMASH, Marseille,
France; richard.saurel@polytech.univ-mrs.fr*

A multiphase flow model with single pressure and single velocity is considered to solve artificial mixture zones that appear at material interfaces during numerical resolution. The Kapila et al. (2001) model is an excellent candidate in this aim. However it poses serious computational and theoretical challenges due to the non-conservative character of the equations. To close this model in the presence of shocks, appropriate jump conditions are proposed and validated (Saurel et al., 2007). However, even when shock conditions are known, convergence of the numerical algorithm is an issue. The reason is related to cell averages of non-conservative variables that have no physical sense. To circumvent these difficulties, another flow model is considered, with two pressures and a single velocity. It is also non-conservative, but easier to solve, in particular regarding positivity issues. Convergence at the shock front is reached with the help of:

- a supplementary compatible energy equation,
- extra equations for the Hugoniot poles that correspond to invariants across the multiphase shock.

The resulting method is extremely robust and accurate. Applications involving extra physics, such as phase transition at interfaces, capillary effects, detonations and compaction of granular powders are presented.

REFERENCES

1. Saurel R., Favrie N., Petitpas F., and Gavrilyuk S. “Modelling irreversible dynamic compaction of powders,” J. Fluid Mech. (2009), submitted.
2. Petitpas F., Saurel R., Franquet E., Chinnayya A. “Modelling detonation waves in condensed energetic materials: Multiphase CJ conditions and multidimensional computations,” Shock Waves (2009), in press.
3. Saurel R., Petitpas F., and Berry R. A., “Simple and efficient relaxation for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures,” J. Comput. Phys., **228**, 1678–1712 (2009).
4. Saurel R., Petitpas F., and Abgrall R., “Modeling phase transition in metastable liquids. Application to flashing and cavitating flows,” J. Fluid Mech., **607**, 313–350 (2008).

5. Saurel R., Le Metayer O., Massoni J., and Gavriluk S., “Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation,” *Shock Waves*, **16**, No. 3, 209–232 (2007).
6. Perigaud G. and Saurel R., “A compressible flow model with capillary effects,” *J. Comput. Phys.*, **209**, No. 10, 139–178 (2005).

Differentiability criterion of the solution of the nonlinear elliptic equation with respect to the absolute term

Serovajsky S. Ya.

al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
serovajskys@mail.ru

The qualitative and numerical analysis of optimal control problems and mathematical physics inverse problems uses as a rule necessary conditions of the optimality or gradient methods. Then it is necessary the differentiating of the state functional (discrepancy) with respect to the control (identifiable parameter). However the minimizing functional depends from the state function. Therefore the differentiability of the control-state-mapping is the obligatory step of the problem solving. We consider the criterion of the Gataux differentiability of the nonlinear elliptic boundary problem solution with respect to the absolute term.

Let us consider the homogenous Dirichlet problem for the equation

$$-\Delta u + |u|^\rho u = f, \quad (1)$$

where $\rho > 0$. We determine the space $Y = H_0^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ and its conjugate space $X = H_{-1}(\Omega) + L_{q'}(\Omega)$, where $q = \rho + 2$, $1/q + 1/q' = 1$. The equation (1) has a unique solution $u = u(f)$ from the set Y for all $f \in X$.

Theorem 1. *The necessary and sufficient condition of the Gataux differentiability of the mapping $u(\cdot) : X \rightarrow Y$ in the point f is the existence of the solution of the homogenous Dirichlet problem for the equation*

$$-\Delta v + (\rho + 1)|u(f)|^\rho v = g \quad (2)$$

from the set Y for all $g \in X$.

Theorem 2. *The necessary and sufficient condition of the Gataux differentiability of the mapping $u(\cdot) : X \rightarrow Y$ in the arbitrary point is the inclusion $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$. Besides its derivative in the point f satisfies the equality*

$$\int_{\Omega} \mu u'(f) h d\Omega = \int_{\Omega} p_\mu(f) h d\Omega \quad \forall h, \mu \in H_0^1(\Omega), \quad (3)$$

where $p_\mu(f)$ is the solution of the homogeneous Dirichlet problem for the equation

$$-\Delta p_\mu(f) + (\rho + 1)|u(f)|^\rho p_\mu(f) = \mu. \quad (4)$$

The inclusion $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ is true for all parameter ρ if $n = 2$ and for $\rho \leq 4/(n-2)$ if $n \geq 3$ (see Sobolev's Theorem). Then there is a critical value of the nonlinearity parameter for $n \geq 3$. Our mapping is Gataux differentiable for the small parameter ρ and it is not differentiable for its large values. However there is the weak form of operator derivative. This mapping is differentiable for all parameters in this sense.

DEFINITION. Operator $L : X \rightarrow Y$ is $(X_0, Y_0; X_1, Y_1)$ -extended differentiable in the point $x \in X$, if there will be linear topological spaces X_0, Y_0, X_1, Y_1 with continuous inclusions $X_1 \subset X_0 \subset X, Y \subset Y_0 \subset Y_1$, and linear continuous operator $D : X_0 \rightarrow Y_0$, such as $[L(x + \sigma h) - Lx]/h \rightarrow Dh$ in Y_1 if $\sigma \rightarrow 0$ for all $h \in X_1$.

The $(X, Y; X, Y)$ -extended derivative is equal to the usual Gataux one of course.

Theorem 3. The operator $u(\cdot) : X \rightarrow Y$ for the equation (1) is $(X_0, Y_0; X_1, Y_1)$ -extended differentiable in the point f , where $Y_1 = H_0^1(\Omega)$, $Y_0 = Y_1 \cap \{y \mid |u(f)|^{\rho/2} y \in L_2(\Omega)\}$, X_0 and X_1 are the conjugate spaces for Y_0 and Y_1 . Besides its derivative satisfies to the equality

$$\int_{\Omega} \mu u'(f) h d\Omega = \int_{\Omega} p_{\mu}(f) h d\Omega \quad \forall h, \mu \in Y_0, \quad (5)$$

where $p_{\mu}(f)$ is the solution of the homogeneous Dirichlet problem for the equation (4).

It is possible to obtain the general results. We consider Banach spaces X, Y and the continuously differentiable operator $A : Y \rightarrow X$ in the neighbourhood of the point $u \in Y$. We have the following criterion of the differentiability of the corresponding inverse operator.

Theorem 4. Let there is a neighbourhood U of the point u , such as the set $V = A(U)$ is an open neighbourhood of the point $f = Au$, there is the inverse operator $A^{-1} : V \rightarrow U$, and the equation $A'(u)v = g$ has no more than one solution. Then the necessary and sufficient condition of the Gataux differentiability of the operator A^{-1} in the point f is the surjectivity of the derivative $A'(u)$.

The Theorem 1 is the corollary of the last result. The Gataux derivative of the inverse operator can be founded by means of the Inverse Function Theorem; besides the equality (3) is the corollary of this result. We have also the possibility to get the extended differentiability of the inverse operator with the Theorem 3 as the corollary. These results could be used for the analysis of optimal control problems and inverse problems for the equation (1) with the absolute term f as the control or the identifiable parameter.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абрамов А. А., 13
Адрианов А. Л., 15
Азаренок Б. Н., 17
Александров В. М., 19
Алексеев Г. В., 21
Алексеева Л. А., 23
Алёхин В. В., 26
Аниконов Д. С., 25
Анисимов С. И., 156
Аннин Б. Д., 26
Артемова Н. А., 28
Асеев А. Л., 243
Ахмерова И. Г., 30
- Бабаян Б. А., 32
Базовкин А. В., 142
Банников Д. В., 35, 174
Барух Г., 37
Белоносов В. С., 39
Белых В. Н., 41
Бельгарт Л. В., 219
Бердышев В. И., 43
Бибердорф Э. А., 45
Боган Ю. А., 47
Богданов В. В., 48
Боговский М. Е., 50
Богульский И. О., 52
Бронина Т. Н., 54
Брушлинский К. В., 56
- Васкевич В. Л., 58
Виноградова П. В., 60
Вишневский О. В., 62
Воеводин А. Ф., 64
Волков Ю. С., 66
- Волчков Ю. М., 52
Воропаева О. Ф., 68
Вшивков В. А., 70
- Гаврилов Н. В., 180
Гаврилова Л. В., 72
Гаевой В. П., 74
Гайдов Ю. А., 76
Галкин В. М., 78
Гарипов Р. М., 80
Глазатов С. Н., 82
Годунов С. К., 84
Головашкин Д. Л., 86
Головнев И. Ф., 253
Голубятников А. Н., 88
Голубятников В. П., 76
Гордиенко В. М., 90
Горобчук А. Г., 92
Грек Г. Р., 148
Григорьев Ю. Н., 92
Губарев Ю. Г., 94
Гузев М. А., 96, 98
- Деменков П. С., 100
Демиденко Г. В., 102
Демидов В. Н., 104
Денисенко В. В., 106
Дмитриев А. А., 98
- Евстигнеев Н. К., 108
Егоршин А. О., 110
Емельянов К. В., 112
Ефимова М. В., 114
- Жданова Н. С., 56
Жуков В. Т., 116

Задорин А. И., 118

Иванисенко В. А., 100

Иванов М. Я., 120

Иванова А. В., 122

Ильин А. М., 124

Ильин В. П., 126

Исаев В. И., 127, 271

Казаков А. Л., 129

Казанцев С. Г., 131

Кайшибаева Г. К., 23

Каменщиков Л. П., 133

Капцов О. В., 135

Каропова Е. Д., 136

Квон З. Д., 243

Киселев В. П., 138

Киселев С. П., 138

Князева А. Г., 108, 140

Ковеня В. М., 142

Ковыркина О. А., 144

Кожанов А. И., 145

Козлов А. Н., 146

Козлов В. В., 148

Козлов Г. В., 148

Козлов Н. Н., 150

Колпаков А. Г., 152

Колпаков Ф. А., 45

Компаниец Л. А., 72, 154

Коновалов А. Н., 155

Конюхов А. В., 156

Конюхова Н. Б., 158

Короткий А. И., 263

Коткин Г. Л., 243

Кугушев Е. И., 150

Кукшева Э. А., 237

Куликов И. М., 84, 160

Куликовский А. Г., 162

Кургузов В. Д., 164

Курзин В. Б., 165

Лаврентьев М. М., 62

Лазарева Г. Г., 167

Ларченко В. В., 168

Лашина Е. А., 170

Лежнев В. Г., 172

Леликова Е. Ф., 245

Леонова Т. И., 45

Литвиненко Ю. А., 148

Лихачев А. П., 156

Лихошвай В. А., 102

Лобарева И. Ф., 174

Логанова Л. В., 86

Лысаков К. Ф., 176

Люлько Н. А., 178

Ляпидевский В. Ю., 180

Малахова В. В., 278

Мали В. И., 138

Мальшев А. Н., 182

Маркелова Т. В., 237

Меграбов А. Г., 184

Меньшов И. С., 186

Месяц Е. А., 70

Мирошниченко В. Л., 188

Михайленко Б. Г., 190

Мищенко Т. И., 237

Моисеев Н. Я., 191

Нечаев О. В., 276

Нечепуренко Ю. М., 193

Никифоровская В. С., 64

Новиков Е. А., 195

Опарин А. М., 156

Остапенко В. В., 122, 144

Остросаблин Н. И., 197

Палымский И. Б., 199

- Пальцев Б. В., 201
 Папин А. А., 30
 Пененко А. В., 203
 Пененко В. В., 205
 Пешков И. М., 84
 Питальская О. С., 154
 Плотников П. И., 207
 Помозов Е. В., 106
 Попов В. Н., 263
 Прокопов Г. П., 208
 Прохорова М. Ф., 211
 Пудов С. Г., 213
 Пухначев В. В., 215
 Пятков С. Г., 217
- Романенко А. А., 62
 Романовский Р. К., 219
 Роменский Е. И., 221, 229
 Рубина Л. И., 222, 245
 Рудаков А. В., 176
 Рябенский В. С., 224
 Рябченко В. П., 165
- Садовой Г. С., 225
 Садовская О. В., 227
 Садовский В. М., 227
 Садыков А. Д., 229
 Сафина Р. М., 231
 Свешникова Е. И., 162
 Северин А. В., 208
 Сказка В. В., 233
 Скороспелов В. А., 35, 174
 Слюняев А. Ю., 142
 Снытников А. В., 235
 Снытников В. Н., 237
 Снытников Н. В., 237
 Соловьев М. Б., 158, 201
 Соловьев С. А., 213
 Стадниченко О. А., 237
- Стояновская О. П., 237
 Суков А. И., 158
 Сунгатуллина З. Ю., 239
- Терешко Д. А., 21
 Ткачева Л. А., 241
 Ткаченко В. А., 243
 Ткаченко О. А., 243
 Турук П. А., 35, 174
- Ульянов О. Н., 222, 245
 Ульянова В. И., 13
 Утюжников С. В., 247
 Ушакова О. В., 249
- Фадеев С. И., 102
 Феодоритова О. Б., 116
 Фибих Г., 37
 Фокин М. В., 251
 Фомин В. М., 253
 Фортов В. Е., 156
 Фурсиков А. В., 255
- Халитова Т. Ф., 257
 Ханхасаев В. Н., 259
 Хисматуллина Н. А., 257
- Цветова Е. А., 261
 Цепелев И. А., 263
 Цынков С., 37
- Чашечкин Ю. Д., 265
 Чащин М. А., 245
 Черевко А. А., 122, 267
 Черепанов А. Н., 271
 Черный С. Г., 35, 174
 Черных Г. Г., 68
 Черных И. Г., 237
 Чирков Д. В., 35, 174
 Чиркунов Ю. А., 269

- Чумаков Г. А., 170
Чумакова Н. А., 170
Чупахин А. П., 122, 267
- Шадрин М. Ю., 176
Шайдуров В. В., 136
Шапеев В. П., 127, 271
Шевченко Г. В., 273
Шишленин М. А., 275
Штокало Д. Н., 102
Шурина Э. П., 276
- Щербаков А. В., 278
- Эмих В. Н., 280
Энеев Т. М., 150
- Юдин В. А., 165
Южно Л. Ф., 13
- Якубайлик Т. В., 154
- Abgrall R., 282
Alekseenko O. P., 304
- Babayan B. A., 283
Bukhgeim A. A., 286
Bukhgeim A. L., 286
Burde G. I., 288
Bykov V. V., 290
- Cherny S. G., 304
Chirkov D. V., 304
- Esipov D. V., 304
- Gavrilyuk S., 292
Gololobov S. V., 293
Grebenev V. N., 295
- Kalinkin A. A., 293
- Kapitonov B. V., 297
Kobotov A. V., 298
Korobkin A. A., 300
Kuznetsov S. V., 302
- Laevsky Yu. M., 293
Lapin V. N., 304
- Maas U., 290
Medvedev O. O., 304
- Saurel R., 306
Serovajsky S. Ya., 308

СОДЕРЖАНИЕ

О научной и педагогической деятельности С. К. Годунова (Белых В. Н.)	5
Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф. Индекс однородной самосопряженной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений The index of a homogeneous self-adjoint boundary problem for systems of ordinary differential equations	13
Адрианов А. Л. Математическое моделирование ударных течений вязкого тепло- проводного газа на основе асимптотической модели Mathematical modelling of shock flows of viscous heat-conducting gas based on the asymptotic model.....	15
Азаренок Б. Н. К вопросу о построении расчетных сеток в двумерных областях с помощью отображений On grid construction problem in 2D domains by means of mappings .	17
Александров В. М. Итерационный метод вычисления оптимального по расходу ресур- сов управления линейными системами Iterative method of computing optimal resource consumption control of linear systems	19
Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Численный анализ задач граничного управления для нестационар- ных уравнений тепловой конвекции Numerical analysis of boundary control problems for nonstationary equations of heat convection	21
Алексеева Л. А., Кайшибаева Г. К. Сингулярные граничные интегральные уравнения краевых задач динамики упругих сред при движущихся нагрузках Singular boundary integral equations in boundary value problems of the elastic medium dynamics under moving loads.....	23

Аниконов Д. С.

- Задача типа Стефана для сингулярного интегрального уравнения
первого рода
Stephan problem for the singular integral equation
of the first kind 25

Аннин Б. Д., Алёхин В. В.

- Численное решение задачи Коши для уравнений идеальной пла-
стичности с условием текучести, зависящим от среднего напряже-
ния
Numerical solution of the Cauchy problem for equations of ideal plas-
ticity with yield condition depending on the mean stress..... 26

Артемova Н. А.

- Алгоритм построения ротационных сеток без вырождений
Algorithm for construction of rotational grids without singularities .. 28

Ахмерова И. Г., Папин А. А.

- О решениях начально-краевой задачи одномерного движения теп-
лопроводной двухфазной смеси
On solutions to the initial-boundary problem for the one-dimensional
heat-conducting motion of a two-phase mixture 30

Бабаян Б. А.

- История и анализ развития компьютерной архитектуры
The history and analysis of computer architecture development..... 32

**Банников Д. В., Черный С. Г., Чирков Д. В., Скороспе-
лов В. А., Турук П. А.**

- Совершенствование проточной части гидротурбины методами ма-
тематического моделирования
Improvement hydroturbine flow passage shape using mathematical
modeling methods..... 35

Барух Г., Фибих Г., Цынков С.

- Численное решение нелинейного уравнения Гельмгольца
Numerical solution of the nonlinear Helmholtz equation 37

Белоносов В. С.

- Метод усреднения в теории нелинейных почти периодических ко-
лебаний
Averaging method in the theory of nonlinear almost periodic oscilla-
tions 39

Белых В. Н.	
К проблеме численного решения эллиптических задач	
On the problem of the numerical solution to the elliptic problems....	41
Бердышев В. И.	
Относительная видимость объекта в задаче навигации	
Relative visibility of an object in navigation problem	43
Бибердорф Э. А., Колпаков Ф. А., Леонова Т. И.	
Моделирование артериальной системы человека на основе 1D модели гемодинамики	
Modelling of human arterial system on the basis of 1D hemodynamics model.....	45
Боган Ю. А.	
Алгебры Клиффорда и краевые задачи анизотропной теории упругости	
Clifford algebras and boundary value problems in anisotropic theory of elasticity	47
Богданов В. В.	
Кубическая сплайн-интерполяция, наследующая кусочную монотонность	
Cubic spline interpolation inheriting piecewise monotonicity	48
Боговский М. Е.	
О скорости сходимости некоторых итерационных методов для уравнений Навье — Стокса	
On the rate of convergence of certain iterative methods for the Navier–Stokes equations	50
Богульский И. О., Волчков Ю. М.	
Об одной численной схеме решения трехмерной задачи динамики упругих тел	
On numerical method for three-dimensional dynamic elasticity problems	52
Бронина Т. Н.	
Алгоритм построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения	
An algorithm of constructing initial three-dimensional structured grids for domains of revolution.....	54

Брушлинский К. В., Жданова Н. С.

Численные модели ускорения плазмы в магнитном поле
Computational models of plasma acceleration in the magnetic field .. 56

Васкевич В. Л.

Гарантированная точность вычисления многомерных приближенных формул
The guaranteed computing accuracy of multidimensional approximate formulas 58

Виноградова П. В.

Оценки скорости сходимости метода Галеркина для квазилинейного дифференциально-операторного уравнения
Convergence estimates of Galerkin method for quasilinear operator-differential equation 60

Вишневский О. В., Лаврентьев М. М., Романенко А. А.

Применение графических ускорителей для выявления вырожденных олигонуклеотидных мотивов в регуляторных районах генов эукариот
Application of the graphics accelerators for detection of degenerate oligonucleotide motifs in the regulatory regions of eukaryotic genes .. 62

Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С.

Численные методы для расчета неустановившихся течений воды в системах открытых русел и водотоков на основе неявной схемы Годунова
Numerical methods for calculation of unsteady flows in systems of open channels and water passages by the implicit Godunov scheme 64

Волков Ю. С.

Оценки элементов и норм обратных циклических ленточных матриц
The estimates for entries and norms of matrices inverse to the cyclic band matrices 66

Воропаева О. Ф., Черных Г. Г.

Взаимодействие зоны турбулентного смешения и локального возмущения поля плотности в пикноклине
The interaction of turbulent spot and local density perturbation in pycnocline 68

Вшивков В. А., Месяц Е. А. Исследование погрешностей метода частиц-в-ячейках An analysis of particle-in-cell method error	70
Гаврилова Л. В., Компаниец Л. А. О точных решениях уравнений ветрового движения стратифицированной жидкости (двумерный случай) On the exact solutions of the stratified fluid wind motion equations (two-dimensional case)	72
Гаевой В. П. Существование и устойчивость обобщенного решения системы уравнений каталитического процесса в кипящем слое Existence and stability of the generalized solution to the system of equations for a fluidized-bed catalytic process	74
Гайдов Ю. А., Голубятников В. П. Одна модель генной сети, исправляющей повреждение ДНК DNA-reparation gene network model	76
Галкин В. М. Способ расчета непотенциальных смешанных течений газа A method for calculation of non potential mixed gas flow	78
Гарипов Р. М. Наилучшие в среднем квазиконформные отображения The best in average quasiconformal maps	80
Глазатов С. Н. О задачах электродинамики, моделируемых псевдопараболическими уравнениями в нецилиндрических областях On problems of electrodynamics modelled by pseudoparabolic equations in noncylindrical domains	82
Годунов С. К., Куликов И. М., Пешков И. М. Вычислительное моделирование сплошной среды при помощи ячеистых дискретных структур Computational modelling of continuous medium using discrete structures	84
Головашкин Д. Л., Логанова Л. В. Параллельный алгоритм метода встречных циклических прогонок с циклическим разбиением A parallel algorithm in the cyclic counter-sweep method with cycle decomposition	86

Голубятников А. Н.

- О концентрации кинетической энергии при фазовых переходах
On concentration of kinetic energy at phase transitions 88

Гордиенко В. М.

- Применение кватернионов в теории волнового уравнения
Application of quaternions to the theory of the wave equation 90

Григорьев Ю. Н., Горобчук А. Г.

- Численное моделирование плазмохимического травления кремния
Numerical modeling of plasma-chemical silicon etching 92

Губарев Ю. Г.

- Об устойчивости струйных магнитогидродинамических течений
On a stability of jet MGD flows 94

Гузов М. А.

- Пороговое поведение поля напряжений в неевклидовой модели сплошной среды
Threshold behaviour of stress field in non-euclidean model of continuum 96

Гузов М. А., Дмитриев А. А.

- Переमेжаемость спектра матрицы, имеющей блочную структуру
Intermittency of spectrum of matrix with block structure 98

Деменков П. С., Иванисенко В. А.

- Применение графических ускорителей для решения задачи раскладки графа
Graph layout using graphic accelerators 100

Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Штокало Д. Н.

- Исследование предельных переходов в моделях матричного синтеза линейных полимеров
A study of limiting transitions in models of matrix synthesis of linear polymers 102

Демидов В. Н.

- О роли времени релаксации в формировании структуры ударных волн в нелинейной максвелловской среде. Численный анализ
To the influence of relaxation time on the formation of shock waves structure in nonlinear Maxwell medium. Numerical analysis 104

Денисенко В. В., Помозов Е. В.

Расчет крупномасштабных электрических полей в атмосфере Земли
Calculation of the large scale electric fields in the Earth's atmosphere 106

Евстигнеев Н. К., Князева А. Г.

Моделирование влияния условий нагружения на режимы распространения твердофазной химической реакции
Modelling of loading conditions influence on behavior of solid-phase chemical reaction propagation 108

Егоршин А. О.

Об одной задаче аппроксимации динамических процессов
On one approximation problem of the dynamical processes 110

Емельянов К. В.

Об одной разностной схеме подгонки для сингулярно возмущенной задачи
On a finite difference fitting scheme for singularly perturbed problem 112

Ефимова М. В.

Возникновение конвекции в двухслойной системе с деформируемыми поверхностями раздела
Formation of convection in two-layer system with deformable interfaces 114

Жуков В. Т., Феодоритова О. Б.

Программа расчета газодинамики НЗТ
НЗТ code for gas dynamics simulation 116

Задорин А. И.

Двухсеточный метод решения эллиптического сингулярно возмущенного уравнения
Two-grid method for an elliptic singular perturbed equation 118

Иванов М. Я.

О законах сохранения и термодинамике рабочего процесса высокотемпературных ГТД
On laws of conservation and thermodynamics of high-temperature gas turbine engine working process 120

Иванова А. В., Остапенко В. В., Черевко А. А., Чупахин А. П. О разрывных решениях уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере On discontinuous solutions of shallow water equations on the rotating attractive sphere	122
Ильин А. М. Бисингулярная начальная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений Bisingular initial problem for the system of the ordinary differential equations	124
Ильин В. П. Метод A-ортогонализации Арнольди и его применения The Arnoldi A-orthogonalization method and its applications	126
Исаев В. И., Шапеев В. П. О возможностях метода коллокаций и наименьших квадратов On the collocations and least squares method capabilities	127
Казаков А. Л. Обобщенная задача Коши для квазилинейной системы и некоторые ее приложения в механике сплошных сред Generalized Cauchy problem and some its applications in continuum mechanics	129
Казанцев С. Г. Сингулярное разложение оператора продольного лучевого преобразования векторных полей в шаре Singular value decomposition of the longitudinal x-ray transform of vector fields in the ball	131
Каменщиков Л. П. Параллельная реализация метода решеточного уравнения Больцмана для задач гидродинамики Parallel realization of a lattice Boltzmann method for problems of hydrodynamics	133

Капцов О. В.

Образующие левых идеалов кольца дифференциальных операторов и преобразование решений уравнений с частными производными

Left ideal generators of differentiation operator ring and transformation of solutions of partial differential equations 135

Каропова Е. Д., Шайдунов В. В.

Исследование эффективности параллельных реализаций МКЭ для краевой задачи для уравнений мелкой воды

A study of efficiency of parallel realization of FEM for boundary problem of shallow water equations 136

Киселев С. П., Киселев В. П., Мали В. И.

Эффект волнообразования на поперечных перегородках при компактировании микропорошка скользящей детонационной волной

Effect of wave formation on the transverse partitions in the compaction micropowders by the sliding shock wave 138

Князева А. Г.

Термодинамически согласованные модели однофазной фильтрации

Thermodynamically coordinated models of single-phase filtration 140

Ковеня В. М., Базовкин А. В., Слюняев А. Ю.

Численное моделирование задач аэрогидродинамики на основе метода расщепления

Numerical simulation of aerodynamical problems based on splitting method 142

Ковыркина О. А., Остапенко В. В.

О слабой сходимости разностных схем при сквозном расчёте разрывных решений

On weak convergence of shock capturing difference schemes 144

Кожанов А. И.

О разрешимости нелокальных краевых задач с общим граничным условием А. А. Самарского

On solvability of nonlocal boundary value problems with the general boundary Samarsky condition 145

Козлов А. Н.

Применение векторного потенциала в расчетах МГД-течений плазмы

Application of the vector potential in calculations of the MHD plasma flows..... 146

Козлов В. В., Грек Г. Р., Козлов Г. В., Литвиненко Ю. А.

Физические аспекты неустойчивости дозвуковых струйных течений

Physical aspects of subsonic jet flow instability..... 148

Козлов Н. Н., Кугушев Е. И., Энеев Т. М.

Математическое моделирование в задачах молекулярной биологии: структуризация макромолекул, генетический код, большие геномы

Mathematical simulation in molecular biology: macromolecules structuring, genetic code, large genomes..... 150

Колпаков А. Г.

Емкость системы близких тел

Capacity of a system of closely placed bodies..... 152

Компаниец Л. А., Якубайлик Т. В., Питальская О. С.

Анализ ветровых течений в замкнутом водоеме на основе новых аналитических решений для уравнений вязкой несжимаемой жидкости

The analysis of the liquid wind induced motion in the closed basin based on the new analytical solutions of the viscous incompressible liquid equations..... 154

Коновалов А. Н.

Экономичные сеточные реализации динамических задач линейной теории упругости

Efficient difference formulations for dynamical problems of linear elasticity..... 155

Конюхов А. В., Лихачев А. П., Фортов В. Е., Анисимов С. И., Опарин А. М.

Устойчивость и неоднозначное представление ударноволнового разрыва в средах с произвольными термодинамическими свойствами

Stability and ambiguous representation of shock wave discontinuity in media with arbitrary thermodynamic properties..... 156

Конюхова Н. Б., Суков А. И., Соловьев М. Б. Автомодельные решения уравнений пограничного слоя: анализ и численное решение сингулярных нелинейных задач Self-similar solutions to the boundary layer equations: analysis and numerical simulation of the singular nonlinear problems	158
Куликов И. М. Моделирование самогравитирующего газового облака на Супер- ЭВМ Supercomputer simulation of self-gravitating gas cloud	160
Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Вынужденные околорезонансные колебания слоя упругой среды Forced oscillations of elastic layer close to resonance	162
Кургузов В. Д. Численные процедуры решения геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела The numerical solution of geometrically nonlinear problems of solid mechanics	164
Курзин В. Б., Рябченко В. П., Юдин В. А. О параметрическом резонансе при аэроупругих колебаниях гидро- динамических решеток в неравномерном потоке On a parametric resonance under aerolastic vibrations of hydrody- namic lattices in nonuniform flow	165
Лазарева Г. Г. Численное решение трехмерных задач взаимодействия галактик Numerical solution of 3D problems of galaxy interaction	167
Ларченко В. В. Механика конвективного течения слабонеоднородной жидкости Mechanics of the convection flow of weakly nonhomogeneous fluid ...	168
Лашина Е. А., Чумакова Н. А., Чумаков Г. А. Оценка глобальной погрешности численного интегрирования на периодических решениях-утках An estimation of the global error of numerical integration of the canard periodic orbits	170
Лежнев В. Г. Алгоритм SVD-разложения и задача сжатия изображений SVD algorithm and image compression	172

Лобарева И. Ф., Черный С. Г., Чирков Д. В., Скороспелов В. А., Турук П. А., Банников Д. В.	
Постановки задач и численные методы для моделирования пространственных нестационарных течений в гидротурбинах	
Problem statements and numerical methods for 3D simulation of unsteady flows in hydraulic turbines	174
Лысаков К. Ф., Рудаков А. В., Шадрин М. Ю.	
Применение FPGA для решения задач биоинформатики и исследования генома	
Application of FPGA for bioinformatics problems and genome study	176
Люлько Н. А.	
О неустойчивости гиперболических систем на плоскости с малым периодическим возмущением	
On instability of hyperbolic systems on the plane with small periodic perturbation	178
Ляпидевский В. Ю., Гаврилов Н. В.	
Плотностные течения и интрузии в стратифицированной жидкости: теория и эксперимент	
Density currents and intrusions in stratified fluids. Theory and experiment	180
Малышев А. Н.	
Новый вариант блочной циклической редукции	
A new variant of the block cyclic reduction	182
Меграбов А. Г.	
Некоторые дифференциальные тождества и гидродинамические уравнения Эйлера	
Some differential identities and Euler's hydrodynamical equations ...	184
Меньшов И. С.	
Численный метод решения задач газовой динамики в пористых средах	
Numerical method for solving problems of gas flow in porous medium	186
Мирошниченко В. Л.	
Об алгоритмах построения интерполяционных и сглаживающих сплайнов многих переменных по хаотическим данным	
On algorithms for construction multivariate interpolating and smoothing splines under the chaotic data	188

Михайленко Б. Г.

Математические модели и численно-аналитические методы в геофизике
Mathematical model and numerical analytical methods in geophysics 190

Моисеев Н. Я.

Разностные схемы повышенной точности для решения задач механики сплошной среды методом Годунова с антидиффузией
High-order difference schemes for solving continuum mechanics problems with the Godunov method with antidiffusion 191

Нечепуренко Ю. М.

Регулярно структурированные псевдоспектры и интегральные критерии качества дихотомии
The regulary structured pseudospectra and integral performance criteria for dichotomy 193

Новиков Е. А.

Адаптивный алгоритм интегрирования жестких задач
The adaptive algorithm for integrating stiff problems 195

Остросаблин Н. И.

Канонические модули и общее решение уравнений двумерной статической задачи анизотропной упругости
Canonical moduli and the general solution for equations of two-dimensional static problem of anisotropic elasticity 197

Палымский И. Б.

Линейный и нелинейный анализ численного метода расчета двумерной конвекции
The linear and non-linear analysis of a numerical method for computation of two-dimensional convection 199

Пальцев Б. В., Соловьев М. Б.

Об одном итерационном методе с расщеплением граничных условий решения 1-ой начально-краевой задачи для нестационарной системы Стокса и его численных реализациях
On an iterative method with boundary condition splitting for first initial-boundary value problem for nonstationary Stokes system and its numerical realizations 201

Пененко А. В.

- Решение обратной коэффициентной задачи теплопроводности с применением дискретно-аналитических схем
 Solution of a coefficient inverse heat conduction problem by discrete-analytical schemes 203

Пененко В. В.

- Оптимизационные модели и методы для природоохранного прогнозирования и оценок экологических рисков
 Optimization models and methods for environmental forecasting and ecological risk assessment 205

Плотников П. И.

- Минимизация сопротивления тела обтекаемого потоком вязкого газа
 Shape optimization problem for compressible viscous flow 207

Прокопов Г. П., Северин А. В.

- Экономичная реализация метода Годунова на основе приближенного решения задач о распаде разрыва
 An efficient implementation of Godunov's method by approximate solution of the Riemann problem 208

Прохорова М. Ф.

- Гомеоморфизмы клеточных разбиений
 Homeomorphisms of regular cell complexes 211

Пудов С. Г., Соловьев С. А.

- Intel®MKL PARDISO* — многофункциональный прямой решатель разреженных систем линейных уравнений
 Intel®MKL PARDISO* — multifunctional parallel direct solver for sparse systems of linear equations 213

Пухначев В. В.

- Вязкие течения в областях с многосвязной границей
 Viscous flow in domains with multiply connected boundary 215

Пятков С. Г.

- О некоторых обратных задачах для эллиптических уравнений и систем
 On some inverse problems for elliptic equations and systems 217

Романовский Р. К., Бельгарт Л. В.

- Исследование дихотомии линейных почти периодических систем
прямым методом Ляпунова
A study of dichotomy of linear almost periodical systems by the direct
Lyapunov method..... 219

Роменский Е. И.

- Термодинамически согласованные законы сохранения моделей
многофазных сплошных сред
Thermodynamically compatible conservation laws for models of mul-
tiphase media..... 221

Рубина Л. И., Ульянов О. Н.

- Об одном методе получения уравнения поверхности ударной волны
On one method of deducing the equation for a shock wave surface... 222

Рябенский В. С.

- Метод разностных потенциалов
The method of difference potentials 224

Садовой Г. С.

- О некоторых задачах классической электродинамики
On some problems of the classical electrodynamics 225

Садовская О. В., Садовский В. М.

- О резонансных свойствах моментной упругой среды
On resonance properties of the couple-stress elastic medium 227

Садыхов А. Д., Роменский Е. И.

- О моделировании эффекта трансформации частот упругих волн
Modelling of the phenomenon of transformation of the frequency of
elastic waves 229

Сафина Р. М.

- Решение общей смешанной задачи для уравнения Лаврентьева —
Бицадзе с оператором Бесселя методом интегральных уравнений
Solution of general mixed problem for the Lavrentiev–Bitsadze equa-
tion with the Bessel operator by integral equations method..... 231

Сказка В. В.

- О построении разностных схем высокого порядка аппроксимации,
имеющих аналоги законов сохранения
On construction of high-order difference schemes admitting discrete
analogues of conservation laws 233

Снытников А. В.

- Численное моделирование аномальной теплопроводности в высокотемпературной плазме
Numerical simulation of anomalous heat conductivity in high-temperature plasma..... 235

Снытников В. Н., Кукшева Э. А., Маркелова Т. В., Мищенко Т. И., Снытников Н. В., Стадниченко О. А., Стояновская О. П., Черных И. Г.

- Математическое моделирование на суперкомпьютерах физико-химической эволюции вещества при планетообразовании
Supercomputer modelling of physico-chemical evolution of matter on the stage of planet formation..... 237

Сунгатуллина З. Ю.

- Квадратурная формула для дробного интеграла Вейля от периодических функций
Quadrature formula for Weyl's fractional integral of periodic functions 239

Ткачева Л. А.

- Рассеяние поверхностных волн на плавающей упругой пластине при периодической топографии дна
The scattering of surface waves on an elastic floating plate over undulating topography..... 241

Ткаченко О. А., Ткаченко В. А., Коткин Г. Л., Квон З. Д., Асеев А. Л.

- Компьютерная квантовая инженерия в нанофизике и образовании
Computer quantum engineering in nanophysics & education..... 243

Ульянов О. Н., Леликова Е. Ф., Рубина Л. И., Чащин М. А.

- Высокопроизводительные вычисления в задачах моделирования радиационного переноса
High-performance computations in problems of modelling radiation transfer..... 245

Утюжников С. В.

- Метод декомпозиции для пристеночных турбулентных течений
Domain decomposition for near-wall turbulent flows..... 247

Ушакова О. В.

- Алгоритмы построения структурированных сеток в многоблочных областях вращения
 Algorithms for structured grid generation in multiblock revolution domains 249

Фокин М. В.

- Резонанс и развитие вихревых структур во вращающейся идеальной жидкости
 Resonance and evolution of vortex structures in a rotating ideal fluid 251

Фомин В. М., Головнев И. Ф.

- Метод молекулярной динамики и его применение к решению задач механики сплошных сред
 Molecular dynamics simulation and its application to continuum mechanics problems 253

Фурсиков А. В.

- Минимизация сопротивления тела, движущегося в жидкости
 Drag minimization for a body moving in fluid 255

Халитова Т. Ф., Хисматуллина Н. А.

- Расчет сильного сжатия несферического кавитационного пузырька
 Computation of strong compression of nonspherical cavitation bubble 257

Ханхасаев В. Н.

- Об одном обобщении уравнений Навье — Стокса
 On one generalization of the Navier–Stokes equations 259

Цветова Е. А.

- Вычислительные аспекты реализации модели гидродинамики озера Байкал
 Numerical aspects of a hydrodynamics model for the Baikal lake 261

Цепелев И. А., Короткий А. И., Попов В. Н.

- Численное моделирование ретроспективной задачи естественной тепловой конвекции
 Numerical modelling of retrospective problem of natural thermal convection 263

Чашечкин Ю. Д.

- Фундаментальные модели течений неоднородных жидкостей
 The fundamental models of inhomogeneous liquid's flow 265

Черевко А. А., Чупахин А. П.

- О движениях газа типа автомодельного вихря Овсянникова
Selfsimilar Ovsyannikov's vortex gas motions 267

Чиркунов Ю. А.

- Законы сохранения для уравнений газовой динамики
Conservation laws for gas dynamics equations 269

Шапеев В. П., Исаев В. И., Черепанов А. Н.

- Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин
Numerical modelling of laser welding of thin metal plates 271

Шевченко Г. В.

- Итеративный метод решения задачи быстродействия для нелинейных стационарных систем
Iterative method of solving time optimal control problem for nonlinear stationary systems 273

Шишленин М. А.

- Определение коэффициентов в обратной задаче акустики
Determining unknown coefficients in inverse acoustic problem 275

Шурина Э. П., Нечаев О. В.

- Анализ вычислительных схем решения трехмерного векторного уравнения Гельмгольца
Analysis of numerical schemes for the three-dimensional vector Helmholtz equation 276

Щербаков А. В., Малахова В. В.

- Моделирование отклика глобального океана на охлаждение поверхностных вод с временным масштабом ледникового периода
Simulation the global ocean response to cooling the surface waters with time scale of the ice age 278

Эмих В. Н.

- Двумерные фильтрационные течения со свободными границами: новые подходы к моделированию и анализу
Two dimensional filtrational flows with free boundaries: new approaches to modelling and analysis 280

Abgrall R.

- Design of very high order schemes for compressible fluid dynamics ... 282

Babayan B. A.	
The history and analysis of computer architecture development	283
Bukhgeim A. L., Bukhgeim A. A.	
Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case	286
Burde G. I.	
Approximate and exact solitary wave solutions of the higher-order KdV equations	288
Bykov V. V., Maas U.	
Model reduction in applications	290
Gavrilyuk S.	
Solid-fluid diffuse interface model	292
Gololobov S. V., Kalinkin A. A., Laevsky Yu. M.	
High-performance computing for solving grid elliptic problems with separable variables	293
Grebenev V. N.	
Conservation of the Loitsyansky invariant in the Millionshtchikov model of homogeneous isotropic turbulence	295
Kapitonov B. V.	
Stabilization of a layered piezoelectric 3-D body by boundary dissipation	297
Kobotov A. V.	
A review of effective parallelization schemes in application to computational linear algebra	298
Korobkin A. A.	
Singular solutions of mixed boundary value problems of water impact	300
Kuznetsov S. V.	
Optimization aspects of Intel® Math Kernel Library (Intel® MKL) sparse linear algebra on multi-core architectures	302
Lapin V. N., Cherny S. G., Chirkov D. V., Esipov D. V., Alekseenko O. P., Medvedev O. O.	
2D numerical model of hydraulic fracturing	304
Saurel R.	
Modelling diffuse interfaces with compressible materials	306

Serovajsky S. Ya.

Differentiability criterion of the solution of the nonlinear elliptic equation with respect to the absolute term..... 308

Авторский указатель..... 310

Научное издание

МАТЕМАТИКА В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Тезисы докладов

Всероссийская конференция,
приуроченная к 80-летию академика
Сергея Константиновича Годунова

20–24 июля 2009 г.

Издание подготовлено с использованием пакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

Подписано в печать 06.07.2009 г. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 19,5. Уч.-изд. л. 20,9. Тираж 250 экз. Заказ № 415.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в РИЦ “Прайс-курьер”
ул. Академика Кутателадзе, 4г, 630128 Новосибирск, Россия.