УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ С НЕОДНОРОДНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

С. Н. Баранов, Ю. Я. Белов

В работе рассмотрена задача идентификации двух коэффициентов многомерного параболического уравнения в случае неоднородных условий переопределения. В случае задачи Коши доказана однозначная классическая разрешимость указанной задачи «в малом». Однородные условия переопределения и условия переопределения в случае, когда одно из них однородное, изучались в [1].

Рассмотрим в $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)|\ 0 \le t \le T,\ x \in E_n,\ z \in E_1\}$, $T = const > 0$, $n \ge 1$, задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + u_{zz}(t,x,z) + \\ + \mu(t,x)u_z(t,x,z) + \lambda(t,x)u(t,x,z) + f(t,x,z), \end{aligned} \tag{1}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),\ x \in E_n,\ z \in E_1. \tag{2}$$

Здесь $L_x(u) = \sum\limits_{k,m=1}^{n} a_{km}u_{x_k x_m} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_{x_k}$, функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\ 0 \le t \le T,\ x \in E_n\}$ соответственно, E_k — k-мерное евклидово пространство, $a_{km} = a_{km}(t)$, $a_k = a_k(t)$ — непрерывные функции переменной t, $t \in [0,T]$. Неизвестными в задаче являются коэффициенты $\mu(t,x)$, $\lambda(t,x)$ и решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2).

Предположим, что выполняются условия переопределения

$$u(t,x,0) = \theta(t,x),\ u_z(t,x,0) = k(t,x),\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{3}$$

условия согласования

$$\theta(0,x) = u_0(x,0),\ k(0,x) = \frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z} \tag{4}$$

и соотношение

$$k^2 - \theta\frac{\partial^2 u_0(x,0)}{\partial z^2} \ge \delta > 0, \quad \delta - const. \tag{5}$$

Приведем задачу (1)–(3) к некоторой вспомогательной прямой задаче (см. задачу (12), (11)).

Положим в уравнении (1) $z = 0$. Получим, учитывая (3), равенство

$$\theta_t(t,x) = L_x(\theta(t,x)) + u_{zz}(t,x,0) + \mu(t,x)k(t,x) + \lambda(t,x)\theta(t,x) + f(t,x,0). \tag{6}$$

Продифференцируем уравнение (1) по z. Положив $z = 0$ в полученном в результате дифференцирования уравнении, на основании (3) получим равенство

$$k_t(t,x) = L_x(k(t,x)) + u_{zzz}(t,x,0) + \mu(t,x)u_{zz}(t,x) + \lambda(t,x)k(t,x) + f_z(t,x,0).$$

Из (6) и последнего уравнения, предполагая, что $k^2(t,x)-\theta(t,x)u_{zz}(t,x,0)\neq 0$, находим:

$$\mu(t,x)=\frac{(\psi_1-u_{zz}(t,x,0))k(t,x)-(\psi_2-u_{zzz}(t,x,0))\theta(t,x)}{k^2(t,x)-\theta(t,x)u_{zz}(t,x,0)}, \tag{7}$$

$$\lambda(t,x)=\frac{(\psi_2-u_{zzz}(t,x,0))k(t,x)-(\psi_1-u_{zz}(t,x,0))u_{zz}(t,x,0)}{k^2(t,x)-\theta(t,x)u_{zz}(t,x,0)}. \tag{8}$$

Здесь $\psi_1(t,x)=\theta_t(t,x)-L_x(\theta(t,x))-f(t,x,0)$, $\psi_2(t,x)=k_t(t,x)-L_x(k(t,x))-f_z(t,x,0)$.

Пусть

$$v(t,x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(t,x,z)e^{-izy}dz,\quad u(t,x,z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v(t,x,y)e^{izy}dy \tag{9}$$

— прямое и обратное преобразования Фурье по переменной z.

Применим (формально) преобразование Фурье по переменной z к уравнению (1)

$$v_t(t,x,y)=L_x(v(t,x,y))-y^2v(t,x,y)+$$
$$+iy\mu(t,x)v(t,x,y)+\lambda(t,x)v(t,x,y)+\Phi(t,x,y),$$

где $\Phi(t,x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t,x,z)e^{-izy}dz$ — преобразование Фурье по переменной z функции $f(t,x,z)$. Из последнего уравнения и соотношений (7)–(9) получаем, что $v(t,x,y)$ есть решение задачи

$$v_t=L_x(v)-y^2v+iyv\cdot\frac{(\psi_1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy)k-(\psi_2+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^3vdy)\theta}{k^2+\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy}+$$
$$+\frac{(\psi_2+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^3vdy)k+(\psi_1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy}{k^2+\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy}v+\Phi, \tag{10}$$

$$v(0,x,y)=v_0(x,y). \tag{11}$$

Здесь $v_0(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(x,z)e^{-izy}dz$ — преобразование Фурье по переменной z функции $u_0(x,z)$. В уравнении (10) от выражений, содержащих интегралы, возьмем вещественную часть. Получим уравнение

$$v_t=L_x(v)-y^2v+iyv\cdot\frac{Re(\psi_1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy)k-Re(\psi_2+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^3vdy)\theta}{Re\Big(k^2+\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy\Big)}+$$
$$+\frac{Re(\psi_2+i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^3vdy)k+Re\Big(\Big(\psi_1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy\Big)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy\Big)}{Re\Big(k^2+\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2vdy\Big)}v+\Phi. \tag{10*}$$

Введем функцию срезки $S_\delta(\theta)$. Функция срезки $S_\delta(\theta)$ — четырежды дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

$$S_\delta(\theta) \geq \frac{\delta}{3} \geq 0,\ \theta \in E_1 \quad \text{и} \quad S_\delta(\theta) = \begin{cases} \theta, & \theta \geq \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{3}, & \theta \leq \frac{\delta}{3}. \end{cases}$$

Поставим срезку в знаменатель дробных выражений в (10*): выражение $Re\Big(k^2 + \theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)dy\Big)$ заменим на $S_\delta\bigg(Re\Big(k^2 + \theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)dy\Big)\bigg)$. Получим уравнение

$$\begin{gathered} v_t = L_x(v(t,x,y)) - y^2 v(t,x,y) + \\ + iyv(t,x,y)P_1(t,x,y,v) + v(t,x,y)P_2(t,x,y,v) + \Phi(t,x,y), \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$P_1(t,x,y,v) = \frac{Re(\psi_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v dy)k - Re(\psi_2 + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^3 v dy)\theta}{S_\delta\bigg(Re\Big(k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v dy\Big)\bigg)},$$

$$P_2(t,x,y,v) = \frac{Re(\psi_2 + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^3 v dy)k + Re\bigg(\Big(\psi_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v dy\Big)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v dy\bigg)}{S_\delta\bigg(Re\Big(k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v dy\Big)\bigg)}.$$

Далее мы докажем классическую однозначную разрешимость задачи (12), (11). На основании свойств функции срезки докажем однозначную разрешимость «в малом» задачи (10*), (11), а затем покажем, что решение задачи (1)–(3) в явном виде выражается через решение задачи (10*), (11) (см. (39)–(41)).

Для доказательства существования решения задачи (12), (11) применим метод слабой аппроксимации [2, 3]. Расщепим задачу (12), (11):

$$v_t^\tau = 4L_x(v^\tau), \qquad n\tau \leq t \leq \left(n + \frac{1}{4}\right)\tau, \tag{13}$$

$$v_t^\tau = -4y^2 v^\tau, \qquad \left(n + \frac{1}{4}\right)\tau \leq t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, \tag{14}$$

$$v_t^\tau = 4iyP_1^\tau(t,x,y,v^\tau)v^\tau, \qquad \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau \leq t \leq \left(n + \frac{3}{4}\right)\tau, \tag{15}$$

$$v_t^\tau = 4P_2^\tau(t,x,y,v^\tau)v^\tau + 4\Phi, \qquad \left(n + \frac{3}{4}\right)\tau \leq t \leq (n+1)\tau, \tag{16}$$

$$v^\tau(t,x,y)|_{t\leq 0} = v_0(x,y),\ x \in E_n,\ y \in E_1. \tag{17}$$

Здесь $n = 0, 1, \ldots, N-1$, $\tau N = T$, $v^\tau = v^\tau(t) = v^\tau(t,x,y)$,

$$P_1^\tau(t,x,y,v^\tau) = \frac{Re(\psi_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(t - \frac{\tau}{4})dy)k - Re(\psi_2 + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^3 v^\tau(t - \frac{\tau}{4})dy)\theta}{S_\delta\left(Re\Big(k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(t - \frac{\tau}{4})dy\Big)\right)},$$

$$P_2^\tau(t,x,y,v^\tau) = \bigg[Re\bigg(\Big(\psi_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(t - \frac{\tau}{4})dy\Big)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(t - \frac{\tau}{4})dy\bigg) +$$

$$+Re(\psi_2 + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^3 v^\tau(t-\frac{\tau}{4})dy)k\Big] \Big/ \Big[S_\delta Re\Big(k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(t-\frac{\tau}{4})dy\Big)\Big].$$

Введем обозначения

$$W^\tau(t) = \sum_{n=0}^{3} W_n^\tau(t), \tag{18}$$

$$W_n^\tau(t) = \sup_{0\le\xi\le t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^n \sup_{x\in E_n} |v^\tau(\xi,x,y)|dy, \tag{19}$$

$$W_n^\tau(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |y|^n \sup_{x\in E_n} |v_0^\tau(x,y)|dy,\ n = 0,1,\dots,3. \tag{20}$$

Относительно функций θ, k, Φ, v_0, $f_z|_{z=0}$ предположим следующее: они удовлетворяют соотношениям

$$|D_x^\beta \theta| + |D_x^\beta k| + |D_x^\beta f_z|_{z=0}| + |D_x^\beta \psi_1| + |D_x^\beta \psi_2| \le c_n, \quad |\beta| = n, \quad n = 0,\dots,4, \tag{21}$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial y} D_x^\beta v_0\Big| + \Big|\frac{\partial}{\partial y} D_x^\beta \Phi\Big| \le N_n,\ \||\beta| = n, \quad n = 0,1,2, \tag{22}$$

$$\big(1 + |y|^{\mu+\varepsilon}\big)\,|D_x^\beta v_0| + \big(1 + |y|^{\mu+\varepsilon}\big)\,|D_x^\beta \Phi| \le M_n, \quad |\beta| = n, \quad n = 0,\dots,4, \tag{23}$$

$$\big(1 + |y|^{\mu+\varepsilon}\big)\,|\frac{\partial}{\partial y} v_0| + \big(1 + |y|^{\mu+\varepsilon}\big)\,|\frac{\partial}{\partial y}\Phi| \le R_n, \quad |\beta| = n, \quad n = 0,1,2, \tag{24}$$

$$(t,x,y) \in G_{[0,T]}, \quad \varepsilon = const > 0, \quad \mu \ge 6$$

и являются достаточно гладкими (имеют все непрерывные производные, входящие в (21)–(24)).

Ниже мы докажем априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $\{v^\tau\}$ задачи (13)–(17) в классе непрерывных функций. Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). На первом дробном шаге в силу принципа максимума

$$|v^\tau(t,x,y)| \le \sup_{x\in E_n} |v_0(x,y)|, \quad 0 \le t \le \frac{\tau}{4}.$$

Отсюда и из (18)–(20) получаем неравенство

$$W^\tau(t) \le W^\tau(0), \quad 0 \le t \le \frac{\tau}{4}.$$

В силу явного представления решения на втором дробном шаге решение удовлетворяет неравенству

$$|v^\tau(t,x,y)| \le |v^\tau(\frac{\tau}{4},x,y)| \le \sup_{x\in E_n} |v_0(x,y)|, \quad \frac{\tau}{4} \le t \le \frac{\tau}{2}.$$

Из последних неравенств следует неравенство

$$W^\tau(t) \le W^\tau(\frac{\tau}{4}) \le W^\tau(0), \quad 0 \le t \le \frac{\tau}{2}.$$

На третьем дробном шаге решение представимо в виде

$$v^\tau(t,x,y) = v^\tau\Big(\frac{\tau}{2},x,y\Big) e^{4iy\left(t-\frac{\tau}{2}\right)P_1}.$$

Из двух последних неравенств следуют неравенство

$$|v^\tau(t,x,y)| \le v^\tau\Big(\frac{\tau}{2},x,y\Big)e^{4iy\big(t-\frac{\tau}{2}\big)P_1} \le \sup_{x\in E_n}|v_0(x,y)|, \quad \frac{\tau}{2}\le t\le \frac{3\tau}{4},$$

и неравенство

$$W^\tau(t) \le W^\tau(\frac{\tau}{2}) \le W^\tau(0), \quad 0\le t\le \frac{3\tau}{4}. \tag{25}$$

На четвертом дробном шаге решается уравнение (16) с начальными данными $v^\tau(\frac{3\tau}{4},x,y)$. Проинтегрируем (16) по отрезку $[\frac{3\tau}{4},t]$. Получим равенство

$$v^\tau(t) = v^\tau\left(\frac{3\tau}{4}\right) + 4\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}\left(v^\tau\frac{Re(\psi_2 + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^3 v^\tau(\xi-\frac{\tau}{4})dy)k}{S_\delta(Re(k^2+\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(\xi-\frac{\tau}{4})dy))}\right)d\xi +$$

$$+4\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}\left(v^\tau\frac{Re\left(\left(\psi_1+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2v^\tau(\xi-\frac{\tau}{4})dy\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2v^\tau(\xi-\frac{\tau}{4})dy\right)}{S_\delta\Big(Re(k^2+\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2v^\tau(\xi-\frac{\tau}{4})dy)\Big)} + \Phi\right)d\xi.$$

Так как $S_\delta\left(Re\Big(k^2+\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2v^\tau(\xi-\frac{\tau}{4})dy\Big)\right) \ge \frac{\delta}{3}$, то из последнего соотношения следует неравенство

$$|v^\tau| \le \left|v^\tau\Big(\frac{3\tau}{4}\Big)\right| + 4\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}\Big\{|v^\tau|\Big(\frac{3}{\delta}\Big(|\psi_2| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|^3\Big|v^\tau\Big(\xi-\frac{3\tau}{4}\Big)\Big|dy\Big)|k|\Big)\Big\}d\xi +$$

$$+4\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}\Big\{|v^\tau|\Big(\frac{3}{\delta}\Big(|\psi_1| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2\Big|v^\tau\Big(\xi-\frac{3\tau}{4}\Big)\Big|dy\Big)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2\Big|v^\tau\Big(\xi-\frac{3\tau}{4}\Big)\Big|dy\Big) + |\Phi|\Big\}d\xi. \tag{26}$$

Заменим функции в интегральных членах (26) на их точные верхние границы по $x\in E_n$, затем заменим функцию $|v^\tau|$, стоящую в левой части (26) на $\sup\limits_{x\in E_n}|v^\tau|$, умножим полученное неравенство на $|y|^n$ и проинтегрируем результат по y в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Получим неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|^n\sup_{x\in E_n}|v^\tau|dy \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|^n\sup_{x\in E_n}\Big|v^\tau\Big(\frac{3\tau}{4}\Big)\Big|dy +$$

$$+\frac{12}{\delta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}\Big\{|y|^n\sup_{x\in E_n}|v^\tau|\Big\{\Big(\sup_{x\in E_n}|\psi_2| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|^3\sup_{x\in E_n}\Big|v^\tau\Big(\xi-\frac{3\tau}{4}\Big)\Big|dy\Big)|k|\Big\}\Big\}d\xi dy +$$

$$+\frac{12}{\delta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}\Big\{|y|^n\sup_{x\in E_n}|v^\tau|\Big\{\Big(\sup_{x\in E_n}|\psi_1| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2\sup_{x\in E_n}\Big|v^\tau\Big(\xi-\frac{3\tau}{4}\Big)\Big|dy\Big)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2\sup_{x\in E_n}\Big|v^\tau\Big(\xi-\frac{3\tau}{4}\Big)\Big|dy\Big\}\Big\}d\xi dy + 4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}|y|^n\sup_{x\in E_n}|\Phi|d\xi dy. \tag{27}$$

Из (27) (см. (19), (21), (23)), учитывая монотонность по t функции $W_n^\tau(t)$, получим

$$W_n^\tau \le W_n^\tau\left(\frac{3\tau}{4}\right) + \frac{12}{\delta}\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}\Big\{W_n^\tau\{(\sup_{x\in E_n}|\psi_2| + W_3^\tau(\xi))|k| +$$

$$+(\sup_{x\in E_n}|\psi_1| + W_2^\tau(\xi))W_2^\tau(\xi)\}\Big\}d\xi dy + 4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t}|y|^n \sup_{x\in E_n}|\Phi| d\xi dy. \tag{28}$$

Просуммировав (28) по n, $n = 0,\ldots,3$, получим (см. (18)) неравенство

$$W^\tau \le W^\tau\left(\frac{3\tau}{4}\right) + \int\limits_{\frac{3\tau}{4}}^{t} P_3(W^\tau(\xi))d\xi, \tag{29}$$

где $P_3(\zeta) = A(\zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1)$ и A — некоторая постоянная, не зависящая от τ.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = P_3(\omega(t)), \quad \omega(0) = W^\tau(0), \quad t \in [0, t^*]. \tag{30}$$

По теореме Коши [4] существует постоянная t^*, зависящая от постоянной A и начальных данных $W^\tau(0)$, такая, что решение $\omega(t)$ существует на отрезке $[0, t^*]$, $\omega \in C^1[0, t^*]$. Очевидно, что $\omega(t)$ — строго возрастающая функция.

Из (29), (30) следует, что $W^\tau(t) \le \omega(t)$ для всех $t \in [\frac{3\tau}{4}, \tau]$. Отсюда и из (25) следует, что

$$W^\tau(t) \le \omega(\tau), \quad 0 \le t \le \tau.$$

Рассмотрим первый целый шаг ($n = 1$). Повторяя наши рассуждения, проведенные на нулевом целом шаге ($n = 0$), получим оценку

$$W^\tau(t) \le \omega(2\tau), \quad 0 \le t \le 2\tau.$$

Продолжая наши рассуждения на последующих целых шагах, получим равномерную по τ оценку

$$W^\tau(t) \le \omega(t^*), \quad 0 \le t \le t^*. \tag{31}$$

Из (17), (18), (31) равномерно по τ

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|^k|v^\tau(t,x,y)|dy \le c, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}, \quad k = 0,1,2,3. \tag{32}$$

На основании (32) докажем равномерные по τ априорные оценки семейства $\{v^\tau\}$.

Умножим (13)–(17) на $|y|^k$, где $k = 0,\ldots\mu$, $\mu + \varepsilon$. Получим задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(|y|^k v_t^\tau) = 4L_x\left(|y|^k v^\tau\right), && n\tau \le t \le \left(n + \frac{1}{4}\right)\tau,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(|y|^k v_t^\tau) = -4y^2|y|^k v^\tau, && \left(n + \frac{1}{4}\right)\tau \le t \le \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(|y|^k v_t^\tau) = 4iyP_1|y|^k v^\tau, && \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau \le t \le \left(n + \frac{3}{4}\right)\tau,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(|y|^k v_t^\tau) = 4P_2|y|^k v^\tau + 4|y|^k\Phi, && \left(n + \frac{3}{4}\right)\tau \le t \le (n+1)\tau,
\end{aligned}$$

$$|y|^k v^\tau(0,x,y) = |y|^k v_0(x,y) \le M_0, \quad x \in E_n, \quad y \in E_1.$$

Рассмотрим нулевой целый шаг ($n = 0$). Нетрудно показать, что решения $|y|^k v^\tau$ на первом, втором и третьем дробных шагах удовлетворяют неравенству

$$|y|^k |v^\tau(t,x,y)| \le |y|^k \sup_{x\in E_n} |v_0(x,y)| \le M_0, \quad 0 \le t \le \frac{3}{4}\tau. \tag{33}$$

На четвертом дробном шаге решаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(|y|^k v_t^\tau) = 4P_2|y|^k v^\tau + 4|y|^k \Phi$$

с начальными данными $|y|^k v^\tau(\frac{3\tau}{4}, x, y) \le M_0$. Так как P_2 ограниченная функция ($P_2 \le C$, $C = const$) и в силу (23) $|y|^k|\Phi| \le M_0$, то

$$|y|^k |v^\tau(t,x,y)| \le e^{Ct}(M_0 t + M_0) \le M_0 e^{\tau(C+1)}, \quad \frac{3\tau}{4} \le t \le \tau.$$

Из последнего неравенства и из (33) следует, что

$$|y|^k |v^\tau(t,x,y)| \le M_0 e^{\tau(C+1)}, \quad 0 \le t \le \tau.$$

Проведя аналогичные выкладки на первом целом шаге ($n = 1$), получим

$$|y|^k |v^\tau(t,x,y)| \le M_0 e^{2\tau(C+1)}, \quad 0 \le t \le 2\tau.$$

Через конечное число шагов получим неравенство

$$|y|^k |v^\tau(t,x,y)| \le M_0 e^{t^*(C+1)}, \quad 0 \le t \le t^*.$$

Аналогично (при помощи дифференцирования задачи (13)–(17) по x, y) можно доказать оценки

$$\left(1 + |y|^{6+\varepsilon}\right) |D_x^\alpha v^\tau(t,x,y)| \le C, \quad |\alpha| = 0, 1, \dots, 4, \tag{34}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} D_x^\beta v^\tau(t,x,y)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y} D_x^\beta v^\tau(t,x,y)\right| \le C, \quad |\beta| = 0, 1, 2. \tag{35}$$

Оценки (34), (35) в силу теоремы Арцела о компактности в $\mathcal{C}$ гарантируют сходимость некоторой подпоследовательности $\{v^{\tau_k}\}$ решений задачи (13)–(17) вместе с производными по x до второго порядка к решению $v \in \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}\left(G_{[0,t^*]}\right) = \left\{f \mid \frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{C}\left(G_{[0,t^*]}\right),\ D_x^\alpha f \in \mathcal{C}\left(G_{[0,t^*]}\right),\ |\alpha| \le 2\right\}$ задачи (12), (11). При этом

$$\left(1 + |y|^{5+\varepsilon}\right) |D_x^\alpha v(t,x,y)| \le C, \ |\alpha| \le 2, \ (t,x,y) \in G_{[0,t^*]}. \tag{36}$$

Докажем, что $Re\Big(k^2 + \theta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau dy\Big) \ge \frac{\delta}{2}$ для того, чтобы убрать срезку в уравнении (12).

Проинтегрируем уравнение $v_t^\tau = L_x(v^\tau) - y^2 v^\tau + iyv^\tau P_1 + v^\tau P_2 + \Phi$ по t в пределах от 0 до t и возьмем действительные части от его левой и правой частей. Получим, что

$$Re\, v^\tau = Re\, v^\tau(0) + Re \int\limits_0^t \Big\{L_x(v^\tau) - y^2 v^\tau + iyv^\tau P_1 + v^\tau P_2 + \Phi\Big\} d\zeta.$$

Умножим правую и левую части полученного уравнения на y^2 и проинтегрируем результат по y в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Получим равенство

$$Re\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau dy = Re\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(0)dy +$$

$$+Re\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{t}\Big\{L_x(y^2v^\tau) - y^4v^\tau + iy^3v^\tau P_1 + y^2v^\tau P_2 + y^2\Phi\Big\}\,d\zeta dy.$$

В правой части, поменяв порядок интегрирования, получим

$$Re\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau dy = Re\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau(0)dy + \int\limits_{0}^{t}\Psi(\zeta,x,y)d\zeta.$$

Здесь $\Psi(\zeta,x,y) = Re\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big\{L_x(y^2v^\tau) - y^4v^\tau + iy^3v^\tau P_1 + y^2v^\tau P_2 + y^2\Phi\Big\}\,dy$. Умножим последнее равенство на функцию $\theta(t,x)$ и добавим к правой и левой частям полученного равенства функцию $k^2(t,x)$. Получим

$$Re\Big(k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2v^\tau dy\Big) = Re\Big(k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2v^\tau(0)dy\Big) + \theta\int\limits_{0}^{t}\Psi(\zeta,x,y)d\zeta. \qquad (37)$$

Так как в начальный момент времени $Re\Big(k^2+\theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2v_0dy\Big) = k^2-\theta\dfrac{\partial^2u_0(x,0)}{\partial z^2} \geq \delta$ (см. (5)), и выполняются неравенства $|\Psi(t,x,y)| \leq A(\delta)$ и $|\theta(t,x)| \leq C$, (см. (34), (21)), то из (37) следует, что

$$Re\Big(k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2v^\tau dy\Big) \geq \delta - CA(\delta)t \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \quad t \in \Big[0, \frac{\delta}{2CA(\delta)}\Big]. \qquad (38)$$

И в силу определения срезающей функции $S_\delta\Big(Re\Big(k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2v^\tau dy\Big)\Big) = Re\Big(k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2v^\tau dy\Big)$ при $t \in [0, t_*]$, где $t_* = \min\Big(t^*, \frac{\delta}{2CA(\delta)}\Big)$.

Покажем, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\mu(t,x)$ и $\lambda(t,x)$, где

$$u(t,x,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t,x,y)e^{izy}dy, \qquad (39)$$

$$\mu(t,x) = \frac{Re\Big(\psi_2 + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^3vdy\Big)k + Re\Big(\Big(\psi_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2vdy\Big)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2vdy\Big)}{k^2 + \theta Re\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2vdy\Big)}, \qquad (40)$$

$$\lambda(t,x) = \frac{Re\Big(\psi_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2vdy\Big)k - Re\Big(\psi_2 + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^3vdy\Big)\theta}{k^2 + \theta Re\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2vdy\Big)}, \qquad (41)$$

является решением задачи (1)–(3) в $G_{[0,t_*]}$ (здесь функция $v(t,x,y)$ — решение задачи (12), (11)).

Используя (36), из (40), (41) получим, что решение $u(t,x,z)$, $\mu(t,x)$, $\lambda(t,x)$ принадлежит классу $Z(t_*) = \big\{\varphi(t,x,z),\ \psi(t,x),\ \chi(t,x) \mid \frac{\partial^k}{\partial z^k}\varphi \in \mathcal{C}^{0,2}_{t,x}(G_{[0,t_*]}),\ k = 0,1,\ldots,5;\ \psi,\chi \in \mathcal{C}^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]})\big\}$ и удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{|\alpha|\le 2}\sum_{k=0}^{5}\left|D_x^\alpha \frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right| \le C,\ (t,x,z)\in G_{[0,t_*]}, \tag{42}$$

$$\sum_{|\alpha|\le 2}|D_x^\alpha \mu(t,x)| + \sum_{|\alpha|\le 2}|D_x^\alpha \lambda(t,x)| \le C,\ (t,x)\in \Pi_{[0,t_*]}. \tag{43}$$

Применим обратное преобразование Фурье по переменной y к задаче (12), (11). Получим, что функция $u(t,x,z)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = L_x(u) + u_{zz} + \mu u_z + \lambda u + f$$

и начальным данным $u(0,x,z) = u_0(x,z)$.

Покажем, что $u(t,x,z)$ — действительнозначная функция. Пусть $u(t,x,z) = u_1(t,x,z) + iu_2(t,x,z)$, где $u_1(t,x,z)$, $u_2(t,x,z)$ — соответственно действительная и мнимая части. Функция $u_2(t,x,z)$ есть решение однородной задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}u_2 = L_x(u_2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_2 + \mu\cdot\frac{\partial}{\partial z}u_2 + \lambda u_2, \quad u_2(0,x,z) = 0.$$

В силу принципа максимума ее решение равно нулю в $G_{[0,t_*]}$ и, следовательно, $u(t,x,z) = u_1(t,x,z)$ — действительнозначная функция и (40), (41) в силу (39) можно записать в виде

$$\mu(t,x) = \frac{\Big(\psi_2 + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^3 v\,dy\Big)k + \Big(\psi_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v\,dy\Big)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v\,dy}{k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v\,dy},$$

$$\lambda(t,x) = \frac{\Big(\psi_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v\,dy\Big)k - \Big(\psi_2 + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^3 v\,dy\Big)\theta}{k^2 + \theta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v\,dy}.$$

или в виде (7), (8).

Докажем выполнение условий (3). Заметим, что в силу (38)

$$k^2 - \theta u_{zz}|_{z=0} \ge \frac{\delta}{2} \quad \text{в } \Pi_{[0,t_*]}. \tag{44}$$

Подставим (7), (8) в (1). Получим равенство

$$\begin{aligned} u_t(t,x,z) = L_x(u(t,x,z)) + u_{zz}(t,x,z) + \\ + u_z(t,x,z)\frac{(\psi_1 - u_{zz}(t,x,0))k - (\psi_2 - u_{zzz}(t,x,0))\theta}{k^2 - \theta u_{zz}(t,x,0)} + \\ + \frac{(\psi_2 - u_{zzz}(t,x,0))k - (\psi_1 - u_{zz}(t,x,0))u_{zz}(t,x,0)}{k^2 - \theta u_{zz}(t,x,0)}u(t,x,z) + f(t,x,z). \end{aligned} \tag{45}$$

Положим $z = 0$ в (45), получим соотношение

$$u_t(t,x,0) = L_x(u(t,x,0)) + u_{zz}(t,x,0) +$$
$$+ u_z(t,x,0)\frac{(\psi_1 - u_{zz}(t,x,0))k - (\psi_2 - u_{zzz}(t,x,0))\theta}{k^2 - \theta u_{zz}(t,x,0)}$$
$$+ \frac{(\psi_2 - u_{zzz}(t,x,0))k - (\psi_1 - u_{zz}(t,x,0))u_{zz}(t,x,0)}{k^2 - \theta u_{zz}(t,x,0)} u(t,x,0) + f(t,x,0).$$

Продифференцируем (45) и в полученном уравнении положим $z = 0$. Получим уравнение

$$u_{zt}(t,x,0) = L_x(u_z(t,x,0)) + u_{zzz}(t,x,0) +$$
$$+ u_{zz}(t,x,0)\frac{(\psi_1 - u_{zz}(t,x,0))k - (\psi_2 - u_{zzz}(t,x,0))\theta}{k^2 - \theta u_{zz}(t,x,0)}$$
$$+ \frac{(\psi_2 - u_{zzz}(t,x,0))k - (\psi_1 - u_{zz}(t,x,0))u_{zz}(t,x,0)}{k^2 - \theta u_{zz}(t,x,0)} u_z(t,x,0) + f_z(t,x,0). \quad (46)$$

Введем обозначения $\chi = u(t,x,0)$, $\eta = u_z(t,x,0)$, $\gamma = u_{zz}(t,x,0)$. Из (46) получим равенство

$$\eta_t = L_x(\eta) + u_{zzz}(t,x,0) +$$
$$+ \frac{(\gamma^2 - \psi_1\gamma)(\eta - k) + (\psi_2 - u_{zzz}(t,x,0))(k\eta - \theta\gamma)}{k^2 - \theta\gamma} + f_z|_{z=0}. \quad (47)$$

В силу (4)

$$\eta(0,x) = k(0,x). \quad (48)$$

Нетрудно показать, что $\eta = k(t,x)$ есть единственное решение задачи (47), (48), т.е. $u_z(t,x,0) = k(t,x)$.

Из (45), учитывая, что $u_z(t,x,0) = k(t,x)$, получим, что функция $\chi = u(t,x,0)$ удовлетворяет уравнению

$$\chi_t = L_x(\chi) + \gamma + \frac{(\psi_1 - \gamma)(k^2 - \chi\gamma) + (\psi_2 - u_{zzz}(t,x,0))k(\chi - \theta)}{k^2 - \theta\gamma} + f|_{z=0}, \quad (49)$$

и начальным данным

$$\chi(0,x) = \theta(0,x). \quad (50)$$

Единственным решением задачи (49), (50) является функция $\chi = \theta(t,x)$, т.е. $u(t,x,0) = \theta(t,x)$, и мы доказали выполнение условий переопределения (3). Доказана

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (4), (5), (21)–(24). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$, $\mu(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *в классе* $Z(t_*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (42), (43).

Докажем единственность решения задачи (1)–(3). Пусть w_1, μ_1, λ_1 и w_2, μ_2, λ_2 — два решения задачи (1)–(3). Функции $w = w_1 - w_2$, $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ являются решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t,x,z) = L_x(w(t,x,z)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w(t,x,z) + \mu_1(t,x)\frac{\partial}{\partial z} w(t,x,z)$$
$$+ \mu(t,x)\frac{\partial}{\partial z} w_2 + \lambda_1(t,x) w(t,x,z) + \lambda(t,x) w_2(t,x,z), \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_*]},$$
$$w(0,x,z) = 0. \quad (51)$$

В силу (7), (8) и неравенств (42), (43) можно получить

$$\left|\mu(\zeta,x)\frac{\partial^k}{\partial z^k}w_2(\zeta,x,z)\right| + \left|\lambda(\zeta,x)\frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}}w_2(\zeta,x,z)\right| \le cV(\zeta),$$
$$k=1,\ldots,4, \quad \zeta\in[0,t_*], \tag{52}$$

$$V(\zeta)=\sum_{m=0}^{3}V_m(\zeta),\ V_m(\zeta)=\sup_{G_{[0,\zeta]}}\left|\frac{\partial^m w(t,x,z)}{\partial z^m}\right|, \quad m=0,\ldots,3.$$

Из неравенства (52) и принципа максимума для уравнения (51) получаем неравенство

$$w(\theta,x,z)\le c_1V(\zeta)\zeta,\ \theta\in[0,\zeta], \quad \text{где} \ \ c_1=ce^{kT}, \quad k=\sup_{\Pi_{[0,t_*]}}|\lambda_1(t,x)|. \tag{53}$$

Дифференцируя (51) по z и рассуждая, как при выводе оценки (53), можно получить оценки

$$\left|\frac{\partial^m w(\vartheta,x,z)}{\partial z^m}\right| \le c_1V(\zeta)\zeta,\ 0\le\vartheta\le\zeta\le t_*, \quad m=0,\ldots,3. \tag{54}$$

Из (54) получаем, что $V_m(\zeta)\le c_1V(\zeta)\zeta$, $0\le\zeta\le t_*$. Суммируя последнее неравенство по m получим $V(\zeta)\le 4c_1V(\zeta)\zeta$, $0\le\zeta\le t_*$ или $(1-4c_1\zeta)V(\zeta)\le 0$, $0\le\zeta\le t_*$, откуда следует, что $w=w_1-w_2=0$ в $G_{[0,\,1/(4c_1)]}$. Таким же способом докажем, что $w=0$ в $G_{[1/(4c_1),\,1/(2c_1)]}$ и так далее. Через конечное число шагов получаем, что $w=0$ в $G_{[0,t_*]}$.

Из (51) (так как $w=0$) получаем соотношение

$$\mu\frac{\partial w_2}{\partial z}+\lambda w_2=0. \tag{55}$$

Рассмотрим два случая:

а) Пусть $\theta\ne 0$ в $\Pi_{[0,t_*]}$.

При $z=0$ из (55) следует (см. (3)), что

$$\mu k+\lambda\theta=0, \quad (t,x)\in\Pi_{[0,t_*]}. \tag{56}$$

Дифференцируя (55) по z и полагая $z=0$, получим, что

$$\mu\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}\Big|_{z=0}+\lambda k=0, \quad (t,x)\in\Pi_{[0,t_*]}. \tag{57}$$

Из (56), (57) получаем $\mu\left(k^2-\theta\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}|_{z=0}\right)=0$, откуда в силу (44) следует, что $\mu=0$ в $\Pi_{[0,t_*]}$. Подставляя $\mu=0$ в (56), получим, что $\lambda\theta=0$. Но так как $\theta\ne 0$, то $\lambda=0$ в $\Pi_{[0,t_*]}$.

b) Пусть $\theta\equiv 0$ и $k\ne 0$ в $\mathbf{\Pi_{[0,t_*]}}$.

В этом случае в силу соотношения (56) $\mu=0$ в $\Pi_{[0,t_*]}$. Отсюда и из (57) следует, что $\lambda k=0$ и, следовательно, $\lambda=0$ в $\Pi_{[0,t_*]}$. Доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и условие* **а)** *или условие* **b)**. *Тогда решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,x)$, $\mu(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *в классе* $Z(t_*)$, *существование которого гарантируется теоремой* 1, *единственно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anikonov Yu. E., Belov Yu. Ya.* Determining two unknown coefficients of parabolic type equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9, N 5. P. 469–488.
2. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.
3. *Белов Ю. Я., Кантор С. А.* Метод слабой аппроксимации. Красноярск: Краснояр. ун-т, 1999.
4. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965.

Баранов Сергей Николаевич, Белов Юрий Яковлевич
Россия, Красноярск, Красноярский государственный университет
belov@lan.krasu.ru