УДК 517.95

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. С. Белоносов, Т. И. Зеленяк

В настоящей работе будут затронуты вопросы, связанные с построением теории эллиптических краевых задач с граничными данными на многообразиях различных измерений. Основы этой теории были заложены еще С. Л. Соболевым [1], однако высказанные им идеи до сих пор не получили достаточного развития. Более того, упомянутые задачи иногда вообще считают некорректно поставленными, несмотря на наличие значительного числа примеров, когда удается найти вполне корректные постановки, доступные для изучения классическими методами дифференциальных уравнений и функционального анализа. Один из ярких примеров такого исследования — книга Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна [2], где рассмотрена «многоточечная» задача об описании колебаний упругого континуума с сосредоточенными массами. В недавней работе [3] дано описание самосопряженных расширений одного класса симметричных полуограниченных операторов, порожденных обыкновенными дифференциальными выражениями с многоточечными краевыми условиями. Продолжая и развивая эти исследования, мы приведем серию дальнейших результатов, касающихся операторов в пространстве вектор–функций. Особо отметим, что для рассматриваемых операторов оказалось возможным построение аналогов известной теории М. Морса [4], связывающей число положительных собственных значений с количеством так называемых сопряженных точек на заданном интервале.

1. Нормальные системы граничных форм

Перечислим некоторые обозначения, систематически используемые в данной работе. Через $\mathbb{C}$ обозначается множество комплексных чисел, а через $\mathbb{C}_n$ — n-мерное комплексное пространство. Вектор $u \in \mathbb{C}_n$ считается столбцом с компонентами $u^1, \ldots, u^n$. Символом $\mathbb{C}_{m\times n}$ обозначим множество матриц $A = (a^{ij})$, $a^{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Произведения вида AB и Au, где $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}_{n\times k}$, $u \in \mathbb{C}_n$, понимаются в обычном смысле. Если $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$, то $A^* \in \mathbb{C}_{n\times m}$ означает сопряженную с A матрицу.

Пространство $\mathbb{C}_n$ естественным образом отождествляется с $\mathbb{C}_{n\times 1}$, при этом скалярное произведение векторов u и v из $\mathbb{C}_n$ запишется как v^*u. Модули векторов и матриц определим равенствами $|u|^2 = u^*u$, $|A|^2 = \operatorname{tr} A^*A$.

Пусть G — открытое множество на вещественной числовой прямой, l — неотрицательное целое число. Нам понадобятся стандартные пространства $L_2(G; \mathbb{C}_n)$ и $W_2^l(G; \mathbb{C}_n)$ функций, заданных в G со значениями в $\mathbb{C}_n$. Нормы в этих пространствах обозначим соответственно через $\|\cdot\|_0^G$ и $\|\cdot\|_l^G$, опуская верхние индексы

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (номер проекта № 00–01–00912).

всякий раз, когда это не приводит к недоразумениям. Пространство $L_2(G; \mathbb{C}_n)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(u, v) = \int\limits_G v^*(x)u(x)\,dx.$$

Рассмотрим на вещественной оси $-\infty < x < \infty$ конечную систему точек a_ν $(0 \leqslant \nu \leqslant d)$, расположенных в естественном порядке: $a_\nu < a_{\nu+1}$. Через Ω обозначим объединение всех интервалов $(a_\nu, a_{\nu+1})$. Пространством $C^l(\Omega; F)$, где F равно либо $\mathbb{C}_n$, либо $\mathbb{C}_{m\times n}$, назовем множество функций, определенных на Ω, принимающих значения в F и равномерно непрерывных на каждом интервале $(a_\nu, a_{\nu+1})$ вместе с производными порядка l. Для элементов $u(x)$ пространства $C^l(\Omega; \mathbb{C}_n)$ и их производных $D_x^k u(x)$ порядков $k \leqslant l$ существуют односторонние пределы во всех точках a_ν.

Далее нас будут интересовать дифференциальные операторы, определенные на функциях из $C^l(\Omega; \mathbb{C}_n)$, которые удовлетворяют граничным условиям не только на концах промежутка (a_0, a_d), но и в точках a_ν, $0 < \nu < d$. Каждой из этих точек сопоставим систему линейных форм вида

$$\mathcal{P}_j u = \sum_{k=0}^{m_j} \Big[P_{jk}^+ D_x^k u(a_\nu + 0) + P_{jk}^- D_x^k u(a_\nu - 0) \Big], \quad j = 1, \ldots, r_\nu. \qquad (1)$$

Здесь $P_{jk}^{\pm} \in \mathbb{C}_{1\times n}$, $m_j \leqslant l$, $(P_{jm_j}^+, P_{jm_j}^-) \neq 0$. Число m_j называется порядком формы $\mathcal{P}_j$.

Систему (1) назовем *нормальной*, если строки $(P_{jm_j}^+, P_{jm_j}^-)$, соответствующие формам одинакового порядка, линейно независимы. Две системы вида (1) называются *эквивалентными*, если каждая форма одной из них есть линейная комбинация форм другой, и наоборот. Если в нормальной системе $\{\mathcal{P}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$ любую подсистему $\{\mathcal{P}_{j_k},\ 1 \leqslant k \leqslant s\}$ заменить какой-нибудь эквивалентной нормальной системой $\{\mathcal{Q}_{j_k},\ 1 \leqslant k \leqslant s\}$, то снова получится нормальная система, эквивалентная исходной.

Нормальная система $\{\mathcal{P}_j\}$, эквивалентная набору простейших форм $D_x^k u^i(a_\nu + 0)$ и $D_x^k u^i(a_\nu - 0)$ при $0 \leqslant k \leqslant l$, $1 \leqslant i \leqslant n$ (u^i — компоненты вектора u), называется *системой Дирихле порядка* l. Понятно, что любая система Дирихле порядка l содержит $2n(l+1)$ форм и является базисом в пространстве всех форм вида (1) порядка не выше l.

На концах интервала (a_0, a_d) функции класса $C^l(\Omega; \mathbb{C}_n)$ и их производные имеют пределы либо только справа, либо только слева. Поэтому для точек a_0 и a_d можно говорить лишь об «односторонних» граничных формах

$$\mathcal{P}_j^+ u = \sum_{k=0}^{m_j} P_{jk}^+ D_x^k u(a_0 + 0), \quad j = 1, \ldots, r_0, \qquad (2)$$

$$\mathcal{P}_j^- u = \sum_{k=0}^{m_j} P_{jk}^- D_x^k u(a_d - 0), \quad j = 1, \ldots, r_d. \qquad (3)$$

Подобно тому, как это было сделано выше, здесь также можно определить нормальные системы, эквивалентные системы и системы Дирихле. Разница только в том, что система Дирихле порядка l будет состоять не из $2n(l+1)$, а из $n(l+1)$ форм типа (2) или (3). Именно такие понятия обычно подразумеваются в теории дифференциальных операторов с граничными условиями в конечных

точках рассматриваемых промежутков (см., например, [5–6]). Наши определения являются непосредственными обобщениями этих понятий, предназначенными для изучения операторов с «двусторонними» граничными формами типа (1). Далее приведены несколько утверждений о системах граничных форм, которые либо уже известны в традиционных случаях (2) или (3), либо легко доказываются. Поэтому доказательства мы опустим, сосредоточив внимание на особенностях формулировок, связанных с «двусторонними» граничными формами.

Лемма 1. *Пусть $\{\mathcal{P}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant 2n(l+1)\}$ — совокупность форм типа (1), образующих систему Дирихле порядка l в точке a_ν. Тогда найдутся такие наборы чисел λ_j^{ik} и μ_j^{ik}, что при всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant l$, $u \in C^l(\Omega; \mathbb{C}_n)$ выполняются равенства*

$$D_x^k u^i(a_\nu + 0) = \sum_{m_j \leqslant k} \lambda_j^{ik} \mathcal{P}_j u, \quad D_x^k u^i(a_\nu - 0) = \sum_{m_j \leqslant k} \mu_j^{ik} \mathcal{P}_j u. \tag{4}$$

Аналогичное утверждение в точке a_0 справедливо для всякой системы Дирихле типа (2), а в точке a_d — для системы Дирихле типа (3). Отличие в том, что в случае (2) можно говорить только о первом, а в случае (3) — только о втором из равенств (4).

Лемма 2. *Пусть $\{\mathcal{P}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$ — нормальная система типа (1) в точке a_ν; $\{\alpha_j,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$ — любые комплексные числа; $\max m_j \leqslant l$. Тогда существует такая функция $u \in C^l(\Omega; \mathbb{C}_n)$, что $\mathcal{P}_j u(a_\nu) = \alpha_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$.*

Точно такие же утверждения выполняются для точек a_0 и a_d по отношению к системам типов (2) и (3) соответственно.

2. Формально сопряженные системы граничных форм

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{k=0}^{l} A_k(x) \cdot D_x^k u(x),$$

определенное на функциях из $C^l(\Omega; \mathbb{C}_n)$. Коэффициенты $A_k(x)$ считаются принадлежащими $C^k(\Omega; \mathbb{C}_{n\times n})$. Выражение

$$\mathcal{A}^* v(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k D_x^k [A_k^*(x) v(x)]$$

называется *формально сопряженным с $\mathcal{A}$*. Для любых u и v из пространства $C^l(\Omega; \mathbb{C}_n)$ справедлива формула Лагранжа

$$\int\limits_\Omega [v^*(\mathcal{A}u) - (\mathcal{A}^* v)^* u]\, dx = \sum_{\nu=1}^{d} \mathcal{L}_{a_\nu - 0}(u, v) - \sum_{\nu=0}^{d-1} \mathcal{L}_{a_\nu + 0}(u, v). \tag{5}$$

Символ $\mathcal{L}_x(u, v)$ обозначает билинейную форму

$$\mathcal{L}_x(u, v) = \sum_{i+j+k \leqslant l-1} (-1)^{k+j} C_{k+j}^j \cdot D_x^j v^*(x) \cdot D_x^k A_{k+i+j+1}(x) \cdot D_x^i u(x),$$

которая называется граничной формой Лагранжа, соответствующей выражению $\mathcal{A}$ в точке x.

Пусть $\{\mathcal{P}_j\}$ — произвольный набор выражений типа (1), образующих систему Дирихле порядка $l-1$. Составим разность $\mathcal{L}_{a_\nu-0}(u,v)-\mathcal{L}_{a_\nu+0}(u,v)$ при каком-нибудь фиксированном ν и каждую из входящих в эту разность производных $D_x^k u(a_\nu \pm 0)$ с помощью леммы 1 выразим через $\mathcal{P}_j u$. В итоге получим

$$\mathcal{L}_{a_\nu-0}(u,v)-\mathcal{L}_{a_\nu+0}(u,v)=\sum_{i+j=2nl+1}(\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}_i v}), \tag{6}$$

где $\{\mathcal{Q}_i,\ 1\leqslant i\leqslant 2nl\}$ — система линейных форм типа (1), порядки которых обозначим через n_i.

Лемма 3. *Если* $\det A_l(a_\nu\pm 0)\neq 0$, *то* $\{\mathcal{Q}_i\}$ *также является системой Дирихле порядка* $l-1$, *при этом* $m_j+n_i=l-1$ *для* $i+j=2nl+1$.

Аналогичные утверждения о разложении выражений $\mathcal{L}_{a_0+0}(u,v)$ или $\mathcal{L}_{a_d-0}(u,v)$ по системам Дирихле типов (2) или (3) установлены в [5, 6].

Вернемся к системе $\{\mathcal{P}_j,\ 1\leqslant j\leqslant r_\nu\}$ вида (1), считая $m_j\leqslant l-1$. Рассмотрим другую систему $\{\mathcal{Q}_i,\ 1\leqslant i\leqslant s_\nu\}$ такого же типа, порядки n_i форм которой также не превосходят $l-1$. Система $\{\mathcal{Q}_i\}$ называется *формально сопряженной с* $\{\mathcal{P}_j\}$ *в точке* a_ν $(0<\nu<d)$ *относительно дифференциального выражения* $\mathcal{A}$, если для каждого $v\in C^{l-1}(\Omega;\mathbb{C}_n)$ условия

$$\mathcal{Q}_i v(a_\nu)=0,\quad i=1,\,\ldots,\,s_\nu,$$

равносильны тому, что

$$\mathcal{L}_{a_\nu-0}(u,v)-\mathcal{L}_{a_\nu+0}(u,v)=0$$

при всех $u\in C^{l-1}(\Omega;\mathbb{C}_n)$, для которых

$$\mathcal{P}_j u(a_\nu)=0,\quad j=1,\,\ldots,\,r_\nu.$$

Нетрудно понять, что любые системы линейных форм, сопряженные с $\{\mathcal{P}_j\}$ в точке a_ν относительно $\mathcal{A}$, будут эквивалентны.

Для точек a_0 и a_d также определяются системы граничных форм, сопряженные соответственно с (2) и (3) относительно $\mathcal{A}$. Различие в том, что вместо разности $\mathcal{L}_{a_\nu-0}(u,v)-\mathcal{L}_{a_\nu+0}(u,v)$ здесь должны обращаться в нуль выражения $\mathcal{L}_{a_0+0}(u,v)$ и $\mathcal{L}_{a_d-0}(u,v)$ по отдельности (см. [5, 6]).

Если $\det A_l(a_\nu\pm 0)\neq 0$ $(0<\nu<d)$, то для любой нормальной системы $\{\mathcal{P}_j$, $1\leqslant j\leqslant r,\ m_j\leqslant l-1\}$ существует сопряженная с ней нормальная система $\{\mathcal{Q}_i$, $1\leqslant i\leqslant 2nl-r,\ n_i\leqslant l-1\}$. Действительно, дополним $\{\mathcal{P}_j,\ 1\leqslant j\leqslant r\}$ до системы Дирихле $\{\mathcal{P}_j,\ 1\leqslant j\leqslant 2nl\}$, затем определим соответствующую ей в силу (6) систему Дирихле $\{\mathcal{Q}_i,\ 1\leqslant i\leqslant 2nl\}$ и выделим из нее нормальную подсистему $\{\mathcal{Q}_i,\ 1\leqslant i\leqslant 2nl-r\}$. На основании леммы 2 эта система и будет искомой. Любая другая нормальная система, сопряженная с $\{\mathcal{P}_j,\ 1\leqslant j\leqslant r\}$ в точке a_ν, также содержит $2nl-r$ форм, так как она эквивалентна $\{\mathcal{Q}_i,\ 1\leqslant i\leqslant 2nl-r\}$. Заметим, что нормальные системы, сопряженные с системами типов (2) и (3) в точках a_0 и a_d, содержат только $nl-r$ форм.

Следующее утверждение является в некотором смысле обращением приведенного рассуждения о существовании сопряженных систем.

Лемма 4. *Пусть* $0<\nu<d$, $\det A_l(a_\nu\pm 0)\neq 0$, *а нормальная система* $\{\mathcal{Q}_i$, $1\leqslant i\leqslant 2nl-r\}$ *сопряжена относительно* $\mathcal{A}$ *с нормальной системой* $\{\mathcal{P}_j,\ 1\leqslant j\leqslant r\}$

в точке a_ν. Тогда их можно включить в такие системы Дирихле $\{\mathcal{P}_j,\, 1 \leqslant j \leqslant 2nl\}$ и $\{\mathcal{Q}_i,\, 1 \leqslant i \leqslant 2nl\}$, для которых справедлива формула (6).

Для точек a_0 и a_d аналогичная лемма доказана в [7]. Из леммы 4 в частности вытекает, что если нормальная система $\{\mathcal{Q}_i,\, 1 \leqslant i \leqslant 2nl - r\}$ сопряжена с нормальной системой $\{\mathcal{P}_j,\, 1 \leqslant j \leqslant r\}$ относительно $\mathcal{A}$, то $\{\mathcal{P}_j,\, 1 \leqslant j \leqslant r\}$ является формально сопряженной с $\{\mathcal{Q}_i,\, 1 \leqslant i \leqslant 2nl - r\}$ относительно $\mathcal{A}^*$.

Установим, наконец, последнее вспомогательное утверждение. Предположим, что левая часть формулы (6) представлена в виде

$$\mathcal{L}_{a_\nu - 0}(u, v) - \mathcal{L}_{a_\nu + 0}(u, v) = \mathcal{L}'(u, v) + \mathcal{L}''(u, v),$$

где $\mathcal{L}'(u, v)$ не содержит производных от v выше порядка k, а $\mathcal{L}''(u, v)$ не содержит производных от u выше k-го порядка.

Лемма 5. *Пусть $0 < \nu < d$, $\det A_l(a_\nu \pm 0) \neq 0$, а нормальные системы $\{\mathcal{P}_j,\, 1 \leqslant j \leqslant r\}$ и $\{\mathcal{Q}_i,\, 1 \leqslant i \leqslant 2nl - r\}$ сопряжены относительно $\mathcal{A}$ в точке a_ν. Тогда для любых $u(x)$, $v(x)$, принадлежащих $C^{l-1}(\Omega; \mathbb{C}_n)$ и удовлетворяющих условиям*

$$\mathcal{P}_j u(a_\nu) = 0 \ \text{ при } \ m_j > k, \quad \mathcal{Q}_i v(a_\nu) = 0 \ \text{ при } \ n_i < l - k - 1,$$

справедливо равенство

$$\mathcal{L}'(u, v) = \sum (\mathcal{P}'_j u)(\overline{\mathcal{Q}'_j v}),$$

где $\{\mathcal{P}'_j\}$, $\{\mathcal{Q}'_j\}$ — некоторые системы граничных форм, порядки которых не выше k.

Доказательство. По лемме 4 исходные системы граничных форм можно так дополнить до систем Дирихле $\{\mathcal{P}_j,\, 1 \leqslant j \leqslant 2nl\}$ и $\{\mathcal{Q}_i,\, 1 \leqslant i \leqslant 2nl\}$, чтобы

$$\mathcal{L}'(u, v) + \mathcal{L}''(u, v) = \sum_{i+j=2nl+1} (\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}_i v}),$$

где $m_j + n_i = l - 1$ для $i + j = 2nl + 1$. С другой стороны, разлагая по базису $\{\mathcal{P}_j u,\, 1 \leqslant j \leqslant 2nl\}$ каждую производную от u, входящую в $\mathcal{L}'(u, v)$ или $\mathcal{L}''(u, v)$, получаем

$$\mathcal{L}'(u, v) = \sum_{m_j > k} (\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}'_j v}) + \sum_{m_j \leqslant k} (\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}'_j v}), \quad \mathcal{L}''(u, v) = \sum_{m_j \leqslant k} (\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}''_j v}).$$

Здесь $\mathcal{Q}'_j$ и $\mathcal{Q}''_j$ — некоторые граничные формы порядков n'_j и n''_j, причем $m_j + n'_j \leqslant l - 1$, $m_j + n''_j \leqslant l - 1$, $n'_j \leqslant k$. Таким образом,

$$\sum_{m_j > k} (\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}'_j v}) + \sum_{m_j \leqslant k} (\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}'_j v} + \overline{\mathcal{Q}''_j v}) = \sum_{i+j=2nl+1} (\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}_i v}).$$

Отсюда ввиду независимости форм $\mathcal{P}_j$ вытекает, что $\mathcal{Q}'_j = \mathcal{Q}_{2nl-j+1}$ для $m_j > k$. Следовательно,

$$\mathcal{L}'(u, v) = \sum_{m_j > k} (\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}_{2nl-j+1} v}) + \sum_{m_j \leqslant k} (\mathcal{P}_j u)(\overline{\mathcal{Q}'_j v}).$$

Если в точке a_ν функции u и v удовлетворяют условиям леммы, то первая сумма в правой части последнего равенства обратится в нуль. Заметив, что порядки оставшихся форм $\mathcal{Q}'_j$ не превосходят k, непосредственно получим утверждение леммы.

Понятно, что эта лемма с очевидными изменениями верна для точек a_0 и a_d.

3. Эллиптические операторы с многоточечными краевыми условиями

Ограничимся далее дифференциальными выражениями четного порядка

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{k=0}^{2m} A_k(x) \cdot D_x^k u(x), \quad x \in \Omega = \bigcup_{\nu=0}^{d-1} (a_\nu,\, a_{\nu+1}).$$

Как и выше функция $u(x)$ принимает значения в $\mathbb{C}_n$, а коэффициенты $A_k(x)$ принадлежат пространствам $C^k(\Omega;\, \mathbb{C}_{n\times n})$. Однако теперь дополнительно предположим, что данное выражение является равномерно эллиптическим. Это значит, что при каждом $x \in \overline{\Omega}$ вещественные части всех собственных чисел матриц $(-1)^m A_{2m}(x \pm 0)$ имеют одинаковые знаки. Для определенности будем считать их отрицательными.

В каждой из точек a_ν зададим граничные условия вида

$$\mathcal{P}_j^\nu u(a_\nu) = 0, \quad j = 1,\, \ldots,\, r_\nu. \tag{7}$$

При $0 < \nu < d$ эти условия имеют тип (1), а при $\nu = 0$ или $\nu = d$ — тип (2) или (3) соответственно. Во всех случаях система (7) считается нормальной, а порядки m_j^ν форм $\mathcal{P}_j^\nu$ — не превосходящими $2m - 1$.

Предметом изучения в этом параграфе является действующий в пространстве $L_2(\Omega;\, \mathbb{C}_n)$ неограниченный оператор

$$\mathbb{A} : u(x) \mapsto \mathcal{A}u(x),$$

определенный на множестве $D(\mathbb{A})$ всех функций, которые принадлежат $W_2^{2m}(\Omega;\, \mathbb{C}_n)$ и удовлетворяют краевым условиям (7).

Понятно, что $D(\mathbb{A})$ плотно в пространстве $L_2(\Omega;\, \mathbb{C}_n)$, поэтому имеет смысл сопряженный с $\mathbb{A}$ оператор $\mathbb{A}^*$. Изложенное в предыдущих параграфах позволяет стандартными рассуждениями найти вид сопряженного оператора. В самом деле, функция $v(x)$ принадлежит области определения оператора $\mathbb{A}^*$ тогда и только тогда, когда равенство

$$(\mathcal{A}u,\, v) = (u,\, w) \tag{8}$$

выполняется при всех $u \in D(\mathbb{A})$ и некотором $w \in L_2(\Omega;\, \mathbb{C}_n)$. Подставляя в (8) произвольную бесконечно дифференцируемую функцию $u(x)$ с носителем в Ω, заключаем, что v является обобщенным решением уравнения $\mathcal{A}^* v = w$, где $\mathcal{A}^*$ — формально сопряженное с $\mathcal{A}$ дифференциальное выражение. В силу результатов общей теории эллиптических уравнений и систем функция $v(x)$ принадлежит пространству $W_2^{2m}(\Omega;\, \mathbb{C}_n)$ (см., например, [8]). Если теперь в правой части (8) заменить w равной функцией $\mathcal{A}^* v$ и воспользоваться формулой Лагранжа (5), то получится, что

$$\sum_{\nu=1}^{d} \mathcal{L}_{a_\nu - 0}(u, v) - \sum_{\nu=0}^{d-1} \mathcal{L}_{a_\nu + 0}(u, v) = 0$$

при всех $u(x) \in D(\mathbb{A})$. Это означает, что в каждой точке a_ν функция $v(x)$ удовлетворяет формально сопряженным с (7) краевым условиям

$$\mathcal{Q}_i^\nu v(a_\nu) = 0, \quad i = \begin{cases} 1,\, \ldots,\, 4mn - r_\nu, & 0 < \nu < d, \\ 1,\, \ldots,\, 2mn - r_\nu, & \nu = 0 \text{ или } d. \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, сопряженный оператор действует по правилу

$$\mathbb{A}^* : v \mapsto \mathcal{A}^* v,$$

а его область определения $D(\mathbb{A}^*)$ состоит из всех элементов пространства $W_2^{2m}(\Omega;\,\mathbb{C}_n)$, для которых выполнены условия (9). Отсюда, в частности, следует равенство $\mathbb{A}^{**}=\mathbb{A}$. Поэтому исходный оператор $\mathbb{A}$ замкнут вместе со своим сопряженным.

Рассмотрим подробнее самосопряженный оператор $\mathbb{A}=\mathbb{A}^*$. В этом случае дифференциальное выражение $\mathcal{A}$ совпадает с формально сопряженным $\mathcal{A}^*$, значит (см. [5]), его можно преобразовать к виду

$$\mathcal{A}u=\sum_{k=0}^{m}D_x^k(B_{2k}D_x^k u)+i\sum_{k=1}^{m}\left\{D_x^k(B_{2k-1}D_x^{k-1}u)+D_x^{k-1}(B_{2k-1}D_x^k u)\right\}, \qquad (10)$$

где все матрицы B_k эрмитовы, а $B_{2m}=A_{2m}$. В силу условия эллиптичности матрица $(-1)^m B_{2m}(x\pm 0)$ отрицательна при всех $x\in\overline{\Omega}$.

Граничные условия (7), отвечающие самосопряженному оператору $\mathbb{A}$, будут эквивалентны (9). Можно считать, что условия (7) и (9) вообще одинаковы. При этом $r_\nu=2mn$ для $0<\nu<d$, $r_0=r_d=mn$:

$$\mathcal{P}_j^\nu u(a_\nu)=0, \quad i=\begin{cases}1,\,\ldots,\,2mn, & 0<\nu<d,\\ 1,\,\ldots,\,mn, & \nu=0 \text{ или } d.\end{cases} \qquad (11)$$

Каждому самосопряженному оператору $\mathbb{A}$ соответствует билинейная эрмитова форма $(\mathbb{A}u,v)$, определенная при всех u и v из $D(\mathbb{A})$. Эта форма в известном смысле характеризует исходный оператор (см. [9]), и мы уделим ее изучению пристальное внимание. Прежде всего заметим, что в силу (10) и формулы интегрирования по частям для любых u и v из $W_2^{2m}(\Omega;\,\mathbb{C}_n)$ справедливо равенство

$$(\mathcal{A}u,v)=[u,v]+\Lambda(u,v). \qquad (12)$$

Здесь

$$[u,v]=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(B_kD_x^k u,D_x^k v)+$$

$$+i\sum_{k=1}^{m}\left\{(-1)^k(B_{2k-1}D_x^{k-1}u,D_x^k v)+(-1)^{k-1}(B_{2k-1}D_x^k u,D_x^{k-1}v)\right\},$$

а через $\Lambda(u,v)$ обозначена совокупность граничных слагаемых, содержащая односторонние пределы функций u, v и их производных в точках a_ν, $0\leqslant\nu\leqslant d$. Понятно, что $\Lambda(u,v)$ не содержит производных от v порядков m и выше. Аналогично, меняя местами u и v, заключаем

$$(u,\mathcal{A}v)=\overline{(\mathcal{A}v,u)}=\overline{[v,u]}+\overline{\Lambda(v,u)},$$

где $\Lambda(v,u)$ не содержит производных от u выше $(m-1)$-го порядка. Сопоставляя эту формулу с (12) и пользуясь тем, что $[u,v]=\overline{[v,u]}$, находим

$$(\mathcal{A}u,v)-(u,\mathcal{A}v)=\Lambda(u,v)-\overline{\Lambda(v,u)}.$$

Последнее равенство есть ни что иное как уже упоминавшаяся выше формула Лагранжа (5). Если подставить сюда любые функции u и v из области определения оператора $\mathbb{A}$, то левая часть обратится в нуль, а $\Lambda(u,v)$ окажется равным $\overline{\Lambda(v,u)}$. Кроме того, по лемме 5 значение $\Lambda(u,v)$ можно будет выразить через производные $D_x^k u$, $D_x^k v$ порядков $k<m$.

Таким образом, сужение $\Lambda(u,v)$ на подпространство $D(\mathbb{A})$ является эрмитовой формой, зависящей только от производных порядков не выше $m-1$. Обозначив

это сужение через $\Gamma(u, v)$, получим общий вид эрмитовой формы $(\mathbb{A}u, v)$, отвечающей данному оператору:

$$(\mathbb{A}u, v) = [u, v] + \Gamma(u, v). \tag{13}$$

Полученная формула позволяет сделать несколько важных выводов о свойствах оператора $\mathbb{A}$. Во-первых, из этой формулы, теорем вложения и отрицательности матрицы $(-1)^m B_{2m}(x)$ вытекает существование таких положительных констант c_1, c_2 и c_3, что

$$-c_1\|u\|_m^2 \leqslant (\mathbb{A}u, u) \leqslant -c_2\|u\|_m^2 + c_3\|u\|_0^2 \tag{14}$$

при любом $u \in D(\mathbb{A})$. Это неравенство гарантирует полуограниченность (сверху) оператора $\mathbb{A}$, а также компактность его резольвенты. Следовательно, спектр $\mathbb{A}$ состоит из счетного множества изолированных собственных значений конечной кратности, причем положительных собственных значений может быть лишь конечное число.

Во-вторых, оценка (14) означает, что эрмитова форма (13) непрерывна по норме пространства $W_2^m(\Omega; \mathbb{C}_n)$. Значит, ее можно продолжить по непрерывности на замыкание $\mathfrak{H}$ множества $D(\mathbb{A})$ в пространстве W_2^m. Это продолжение называется замыканием формы $(\mathbb{A}u, v)$ и будет обозначаться далее через $\tau(u, v)$. Понятно, что для формы $\tau(u, v)$ сохраняются как разложение (13), так и оценка (14).

Множество $\mathfrak{H}$ состоит из функций $u \in W_2^m(\Omega; \mathbb{C}_n)$, удовлетворяющих всем условиям (11), порядки которых меньше m. Число таких условий равняется коразмерности $\mathfrak{H}$ в $W_2^m(\Omega; \mathbb{C}_n)$. Заметим, что в любом случае $\mathfrak{H}$ содержит подпространство $\mathfrak{H}_0 = \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega; \mathbb{C}_n)$ и, в частности, может с ним совпадать. Подпространство $\mathfrak{H}_0$ соответствует операторам с краевыми условиями простейшего вида:

$$\begin{aligned} D_x^k u(a_\nu + 0) = 0, &\quad 0 \leqslant \nu < d, \quad k \leqslant m - 1; \\ D_x^k u(a_\nu - 0) = 0, &\quad 0 < \nu \leqslant d, \quad k \leqslant m - 1. \end{aligned} \tag{15}$$

На основании перечисленных свойств можно решить задачу о подсчете количества положительных собственных значений оператора $\mathbb{A}$. Эта задача давно изучается в теории устойчивости решений эволюционных уравнений. Для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка вопрос о существовании или отсутствии положительных собственных чисел впервые был рассмотрен, повидимому, еще Якоби при помощи введенного в вариационном исчислении понятия сопряженных точек. Напомним, что точка $c \in (a, b)$ называется сопряженной с a относительно дифференциального выражения (10), если уравнение $\mathcal{A}u = 0$ имеет ненулевое решение класса $\overset{\circ}{W}{}_2^m(a, c)$. Размерность пространства всех таких решений называется кратностью сопряженной точки. М. Морс [4] установил простую связь между количеством положительных собственных значений самосопряженного дифференциального оператора $\mathbb{A}$ с краевыми условиями общего вида на концах интервала (a, b) и суммарной кратностью сопряженных с a точек того же интервала. Оставшиеся не исследованными критические случаи теории Морса были рассмотрены М. Г. Крейном [2], Т. И. Зеленяком [10] и В. Я. Беловым. В [11, 12] эти результаты распространены на широкий класс абстрактных неограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Мы воспользуемся этими обобщениями для изучения операторов (10), (11) с многоточечными краевыми условиями.

Вернемся к замкнутой эрмитовой форме τ, порожденной дифференциальным оператором (10), (11). Подпространство $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ называется τ-положительным,

если $\tau(u,u) > 0$ для всех ненулевых $u \in \mathfrak{M}$. Максимальную размерность τ-положительных подпространств будем называть положительным индексом формы τ и обозначать через $\sigma_+(\tau)$. Легко показать, что $\sigma_+(\tau)$ равняется сумме кратностей всех положительных собственных чисел оператора $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — τ-ортогональное дополнение в $\mathfrak{H}$ к подпространству $\mathfrak{H}_0$, то есть множество элементов $u \in \mathfrak{H}$, для которых $\tau(u,v) = 0$ при всех $v \in \mathfrak{H}_0$; $p = \dim \mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$, $q = \dim \mathfrak{N}$, $r = \dim \mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_0$. В [12] установлено следующее утверждение.

Теорема. *Если θ — сужение τ на подпространство $\mathfrak{H}_0$, а t — сужение τ на $\mathfrak{N}$, то*

$$\sigma_+(\tau) = \sigma_+(\theta) + \sigma_+(t) + p + q - r.$$

Нам остается лишь уточнить, как вычисляются все параметры этой формулы.

Определенная на $\mathfrak{H}_0$ эрмитова форма θ соответствует оператору (10) с граничными условиями (15). Ее положительный индекс равен $\sum_{\nu=0}^{d-1} \sigma_\nu$, где σ_ν — сумма кратностей сопряженных с a_ν точек интервала $(a_\nu, a_{\nu+1})$. В данном случае вычисление сопряженных точек ничем не отличается от аналогичной задачи для операторов с «обычными» краевыми условиями.

Значение p равняется, очевидно, разности между $2mnd$ и числом исходных граничных условий (11), порядки которых не превосходят $m-1$.

Множество $\mathfrak{N}$ состоит из элементов $u \in \mathfrak{H}$, для которых $\tau(u,v) = 0$ при всех $v \in \mathfrak{H}_0$. Но для таких v имеем $\Gamma(u,v) = 0$ и $\tau(u,v) = [u,v]$. Значит, $\mathfrak{N}$ образовано всеми решениями уравнения $\mathcal{A}u = 0$, удовлетворяющими граничным условиям (11) порядков не выше $m-1$. Если найти в $\mathfrak{N}$ какой-нибудь базис, то вычисление $\sigma_+(t)$ сведется к классической задаче линейной алгебры о подсчете положительного индекса квадратичной формы в конечномерном пространстве.

Наконец, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{H}_0$ — совокупность всех решений уравнения $\mathcal{A}u = 0$ с граничными условиями (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Ленингр. ун-т, 1950.
2. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. *Зеленяк Т. И., Валицкий Ю. Н., Голец Б. И.* Многоточечные граничные условия для дифференциальных операторов. Киев, 2001. (Препринт института экономики и права «Крок»).
4. *Morse M.* Variational analysis: critical extremals and Sturmian extensions. N. Y., L., Sydney, Toronto: John Wiley & Sons, Inc., 1973.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
6. *Лионс Ж.–Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
7. *Белоносов В. С.* Об индексах неустойчивости неограниченных операторов. I // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск, 1984. N 2. С. 25–51.
8. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
10. *Зеленяк Т. И.* О локализации собственных чисел одной спектральной задачи // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, N 4. С. 53–61.
11. *Белоносов В. С.* Об индексах неустойчивости неограниченных операторов // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, N 1. С. 11–14.

12. *Белоносов В. С.* Индексы неустойчивости дифференциальных операторов // Мат. сб. 1986. Т. 129, N 4. С. 494–513.

Белоносов Владимир Сергеевич, *Зеленяк Тадей Иванович*
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
bvs@math.nsc.ru, zel@math.nsc.ru