УДК 517.988

О РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИРЕГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И ЕЕ СОПРЯЖЕННОЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

М. А. Бименов

Пусть $\Omega \subset R^{n+1}$ — конечная область, ограниченная при $t > 0$ поверхностью Ляпунова σ, а при $t < 0$ характеристическим конусом $S = \{1 + t = |x|,\ |x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2, |x| < 1\}$ уравнения Лаврентьева–Бицадзе [1, 2]

$$Lu \equiv -u_{tt} - \operatorname{sgn} t \bigtriangleup_x u = f(x,t), \tag{1}$$

где $\bigtriangleup_x u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа.

Квазирегулярная задача Дирихле (задача КД). *Найти решение уравнения* (1) *в* Ω, *удовлетворяющее условию*

$$u\,|_{\sigma\cup S} = 0. \tag{2}$$

Обозначим $S_0 = \{t = 0,\ |x| < 1\},\ \Omega_1 = \Omega \cap \{t > 0\},\ \Omega_2 = \Omega \cap \{t < 0\}$ и будем предполагать, что поверхность $\sigma \cup S_0$ является гладкой поверхностью Ляпунова.

Задача ДК. *Найти решение уравнения* (1) *в* Ω, *удовлетворяющее условию*

$$u\,|_{\sigma\cup S_0} = 0.$$

В силу переопределенности условия (2) задача КД не для всех $f \in L_2(\Omega)$ регулярно разрешима. Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega}_2)$, $0 < \alpha < 1$, $k \geq [\frac{n}{2}] + 1$, $D^{\beta} f\,|_S = 0$, $|\beta| \leq k + 1 + \alpha$. *Тогда существует единственное сильное решение* $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_1) \cap C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_2) \cap C(\overline{\Omega})$ *задачи КД, удовлетворяющее неравенству*

$$||u||_{W_2^1(\Omega)} \leq C||Lu||_0.$$

Теорема 2. *Пусть* $f(x,t) \in C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega}_2)$, $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega_1 \in C^{k+\alpha+1}$, $k \geq [\frac{n}{2}] + 1$. *Тогда существует единственное сильное решение* $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *задачи ДК, удовлетворяющее неравенству*

$$||u||_{W_2^1(\Omega)} \leq C||f||_0.$$

Доказательство теоремы 1. В силу однозначной разрешимости задачи Гурса решение задачи КД в области Ω_2 сводится к решению следующей задачи

$$Lu = -u_{tt} + \bigtriangleup_x u = f, \quad u\,|_S = 0. \tag{3}$$

Имеет место

Лемма. *Любое решение уравнения* (1) $u \in C^2(\overline{\Omega}_2)$, $u\mid_S = 0$, *удовлетворяет неравенству*

$$||Lu||^2_{L_2(\Omega_2)} \geq C \int\limits_{\Omega_2} (u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + |u|^2) d\Omega + \int\limits_{S_0} (u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2) dS. \tag{4}$$

В самом деле, легко проверить следующее тождество

$$2Lue^{\mu t}u_t = -(e^{\mu t}u_t^2)_t + \mu e^{\mu t}u_t^2 + 2\sum_{i=1}^n e^{\mu t}(u_{x_i}u_t)_{x_i} -$$
$$-\sum_{i=1}^n (u_{x_i}^2 e^{\mu t})_t + \mu \sum_{i=1}^n e^{\mu t}u_{x_i}^2.$$

Так как $u\mid_S = 0$, то вдоль S

$$u_t = \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big) n_t, u_{x_i} = \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big) n_{x_i},$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по нормали, а $n_t,\ n_{x_i}$ — направляющие единичные нормали, при этом

$$n_t^2 = \sum_{i=1}^n n_{x_i}^2\ .$$

С учетом этих равенств, интегрируя по частям, убедимся в том, что

$$(2Lu, e^{\mu t}u_t)_{L_2(\Omega_2)} = \int\limits_{\Omega_2} e^{\mu t}\mu(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2) d\Omega_2 +$$
$$+ \int\limits_{S_0} (u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2) dS_0 + \int\limits_{S} \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)^2 (n_t^2 - \sum_{i=1}^n n_{x_i}^2) e^{\mu t} dS. \tag{5}$$

Считая, что $\mu > 0$, и применяя неравенство Юнга (см. [3]), из равенства (5) получим

$$||Lu||^2_{L_2(\Omega_2)} \geq C \int\limits_{\Omega_2} (u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2) d\Omega_2 + \int\limits_{S_0} (u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2) dS_0.$$

Лемма доказана.

Теперь докажем существование решения задачи Гурса (3).

Пусть $\prod^- = \{-1 < t < 0,\ -1 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, ..., n\}$ — n–мерный параллелепипед, содержащий Ω_2 — конус внутри себя, $S_{\prod^-} = \{-1 < t < 0,\ |x| = 1\}$ — боковая поверхность $\prod^-$, $\prod^-_{\Omega_2} = \prod^- \setminus \Omega_2$.

Смешанная задача Коши. *В* $\prod^-$ *найти решение уравнения*

$$Lu = u_{tt} - \triangle_x u = -f(x,t), \tag{6}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\mid_{t=-1} = 0,\ u_t\mid_{t=-1} = 0,\ u\mid_{S_{\prod^-}} = 0. \tag{7}$$

Известно (см. [3, 4]), что для любой $f \in C^{k+2+\alpha}(\overline{\prod^-})$, $k > [\frac{n}{2}]$, $k = 1, \dots$ существует единственное решение $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\prod^-})$.

Покажем, что если $f \equiv 0$ в $\prod^-_{\Omega_2} = \prod^- \setminus \Omega_2$, то решение $u(x,t)$ смешанной задачи Коши (6), (7) тоже равно нулю в $\prod^-_{\Omega_2}$.

Действительно, как и при доказательстве соотношения (5) убеждаемся в том, что

$$(2Lu, u_t)_{L_2(\prod^-_{\Omega_2})} = \int\limits_{S_{\prod^-}} u_t^2 dS_{\prod^-} + \int\limits_{S} (u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i})^2 dS.$$

Отсюда при $f = Lu \equiv 0$ в $\prod^-_{\Omega_2}$ находим, что $u \equiv 0$ в $\prod^-_{\Omega_2}$ и, в частности, $u\,|_S = 0$. Таким образом, при выполнении условий теоремы 1, продолжая f нулем на $\prod^-_{\Omega_2}$, получим, что $f \in C^{k+2+\alpha}(\prod^-)$. В этом случае решение $u \in C^{2+\alpha}(\prod^-)$ смешанной задачи Коши (6), (7) и является решением задачи Гурса (3) и $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_2)$ удовлетворяет неравенству (4).

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 показано, что решение задачи Гурса представимо в виде

$$u = L_G^{-1} f = L_{ck}^{-1} \widetilde{f} = \int\limits_{\prod^-} K(x,t,\xi,\eta)\widetilde{f}(\xi,\eta), \tag{8}$$

где $u = L_{ck}^{-1}\widetilde{f}$ — решение смешанной задачи Коши (6), (7) в параллелепипеде $\prod^-$, а

$$\widetilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in \Omega_2, \\ 0, & (x,t) \in \prod^-_{\Omega_2}. \end{cases}$$

Тем самым решение задачи КД в Ω_2 задается формулой (8).

Из (8) при $t = 0$ получим

$$u(x, 0-) = \tau_f(x) \equiv L_G^{-1} f\,|_{t=0}\,(x). \tag{9}$$

Решение задачи КД в области Ω_1 сводится к решению задачи Дирихле

$$Lu = -u_{tt} - \triangle_x u = f, \quad u\,|_\sigma = 0, \quad u\,|_{S_0} = \tau_f(x), \tag{10}$$

где $\tau_f(x)$ определяется из области гиперболичности по формуле (9).

В силу условий теоремы 1, свойств решения задачи Гурса и формулы (8) имеем, что

$$u(x, 0-) = \tau_f(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{S}_0).$$

Из гладкости поверхности $\sigma \cup S_0$ и свойств решений задачи Дирихле (10) следует, что $u(x,t) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ и выполнено следующее неравенство

$$||u||_{W_2^1(\Omega_1)} \le C(||f||_{L_2(\Omega_1)} + ||\tau_f||_{W_2^1(S_0)}). \tag{11}$$

Поскольку $\tau_f(x) = u(x, 0-)$, то с учетом неравенства (4) из (11) следует, что

$$||u||_{W_2^1(\Omega_1)} \le C(||f||_{L_2(\Omega_1)} + ||f||_{L_2(\Omega_2)}) \le C||f||_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Теперь докажем теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Решение задачи ДК в области Ω_1 сводится к решению задачи Дирихле

$$Lu = -u_{tt} - \triangle_x u = f, \quad u\,|_{\sigma \cup S_0} = 0. \tag{12}$$

Так как $\sigma \cup S_0 \in C^{k+1+\alpha}$, то при выполнении условий теоремы 2 из свойств решений задачи Дирихле (21) следует, что $u(x,t) \in C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega}_1)$ и удовлетворяет неравенству

$$||u||_{W_2^1(\Omega_1)} \leq C||f||_{L_2(\Omega_1)}.$$

При этом решение задачи (12) задается формулой

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega_1} G(x,t,\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta, \tag{13}$$

где $G(x,t,\xi,\eta)$ — функция Грина задачи Дирихле. Из (13) следует, что

$$\nu_f(x) = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0+} = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Omega_1} G(x,t,\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta \Big|_{t=0+} \in C^{k+1+\alpha}(S_0), \tag{14}$$

$$||\nu_f(x)||_{W_2^1(S_0)} \leq C||f||_{L_2(\Omega)}.$$

Решение задачи ДК в области Ω_2 сводится к решению следующей задачи Коши

$$Lu = -u_{tt} + \triangle_x u = f, \quad u\,|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \nu_f(x),$$

где $\nu_f(x)$ определяется из области эллиптичности по формуле (14).

Поскольку $f \in C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega}_2)$, $\nu_f(x) \in C^{k+1+\alpha}(S_0)$, то решение задачи Коши $u(x,t) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_2)$ и задается формулой [4]

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega_2} \varepsilon_{n+1}(x,t,\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\Omega + \int\limits_{S_0} \varepsilon_{n+1}(x,t,\xi,0) \nu_f(\xi) d\xi,$$

и справедлива оценка

$$||u||_{W_2^1(\Omega_2)} \leq C(||f||_{L_2(\Omega_2)} + ||\nu_f(x)||_{L_2(S_0)}) \leq C||f||_{L_2(\Omega)},$$

где $\varepsilon_{n+1}(x,t)$ — фундаментальное решение задачи Коши [3, 5].

Теорема 2 доказана.

Пусть $L_{KD}(L_{DK})$ — замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального выражения (1) на подмножестве функции $u \in C^2(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2) \cap C(\overline{\Omega}), u\,|_{\sigma \cup S} = 0$
$(u \in C^2(\overline{\Omega}), u\,|_{\sigma \cup S_0} = 0)$. Согласно теоремам 1 и 2 операторы L_{KD}, L_{DK} ограниченно обратимы на всем $L_2(\Omega)$ и обратные операторы L_{KD}^{-1}, L_{DK}^{-1} вполне непрерывны, их нормы удовлетворяют неравенствам

$$||L_{KD}^{-1}||_{L_2(\Omega) \to W_2^1(\Omega)} \leq C, \quad ||L_{DK}^{-1}||_{L_2(\Omega) \to W_2^1(\Omega)} \leq C.$$

Теперь докажем фредгольмову сопряженность в $L_2(\Omega)$ операторов L_{KD}^{-1}, L_{DK}^{-1}. Имеет место

Теорема 3. *Операторы L_{KD}, L_{DK} составляют фредгольмову сопряженную пару в $L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $u \in D(L_{KD}) \cap C^2(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2) \cap C(\overline{\Omega})$ и $v \in D(L_{DK}) \cap C^2(\overline{\Omega})$. Тогда, как и при доказательстве леммы, непосредственным вычислением получим

$$(L_{KD}\ u, v)_{L_2(\Omega)} = (Lu, v)_{L_2(\Omega_1)} + (Lu, v)_{L_2(\Omega_2)} =$$

$$= \int\limits_{S_0} \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0+} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0-} \Big) v dS_0 + (u, Lv)_{L_2(\Omega)} \qquad (15)$$

Так как $v(x)\,|_{S_0} = 0$, то из (15) следует

$$(L_{KD}\ u, v)_{L_2(\Omega)} = (u, L_{DK}\ v)_{L_2(\Omega)}. \qquad (16)$$

Если $u \in D(L_{KD})$ и $v \in D(L_{DK})$, то равенство (16) доказывается предельным переходом, т.е. с помощью приближения элементов $u \in D(L_{KD})$ и $v \in D(L_{DK})$ соответствующими гладкими элементами $u_m \in D(L_{KD}) \cap C^2(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2) \cap C(\overline{\Omega})$ и $v_n \in D(L_{DK}) \cap C^2(\overline{\Omega})$.

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В.* К проблемам уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950 Т. 70, N 3.

2. *Бицадзе А. В.* Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, N 5.

3. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1983.

4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1981.

Бименов Мырзагали Аязович
Казахстан, Шымкент, Южно–Казахстанский государственный университет
`bimenov@mail.ru`