УДК 517.95

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

И. Е. Егоров

Пусть H_1 — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное в другое гильбертово пространство H.

Будем обозначать через $||\cdot||$, $|\cdot|$, $||\cdot||_*$ нормы соответственно в H_1, H, H_1' и через $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в H. Положим

$$S = [0,T], \quad X = L^P(S, H_1), \quad T > 0, \quad p \geq 2.$$

В настоящей работе изучается нелокальная краевая задача для дифференциально–операторного уравнения вида

$$Au''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t), \quad t \in S, \tag{1}$$

где A — самосопряженный оператор в H, $B : X \to X'$ — радиально непрерывный монотонный и коэрцитивный оператор [1, 2], $C : H_1 \to H_1'$ — линейный ограниченный самосопряженный положительный оператор.

Отметим, что уравнение (1) как уравнение смешанного типа принадлежит классу неклассических уравнений математической физики [3]. К уравнению вида (1) приводятся некоторые уравнения с частными производными смешанного и смешанно–составного типов [3–5]. Рассматривается разрешимость нелокальной краевой задачи для уравнения (1), которая является естественным обобщением краевой задачи В. Н. Врагова [3] для уравнения с частными производными смешанного типа. С другой стороны, частные случаи изучаемой задачи для уравнения (1) были исследованы в работах [6, 7]. В данной работе разрешимость нелокальной краевой задачи сводится к применению теории монотонных операторов [1, 2].

Пусть E^+, E^0, E^- — спектральные проекторы оператора A, соответствующие положительной, нулевой и отрицательной частям спектра.

Введем оператор $|A|$ равенством

$$|A|u = AUu, \quad U = E^+ - E^-, \quad u \in D(A).$$

Пусть H_0 есть пополнение $D(A)$ по полунорме

$$||u||^2_{H_0} = (|A|u, u), \quad u \in D(A).$$

Будем считать, что $D(A) \cap H_1$ плотно в H_1, H_0 и имеет место

$$||u||_{H_0} \leq \gamma ||u|| \quad \forall u \in D(A) \cap H_1, \quad \gamma > 0.$$

В дальнейшем для простоты рассмотрим случай

$$\ker A \cap H_1 = \{0\}.$$

Определим пространство H_{-1} как пополнение H_0 по норме $||f||_{H_{-1}} = ||Af||_*$. Пусть в дальнейшем имеет место равенство [6] $[H_1, H_{-1}]_{1/2} = H_0$. Тогда банахово пространство $W = \{u : u \in X, Au' \in X'\}$ непрерывно вложено в $C(S, H_0)$. Положим $H_0^+ = E^+H_0, H_0^- = E^-H_0$.

Краевая задача. *Ищется решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0) = 0,$$

$$E^+u'(0) = h_{11}E^-u'(0) + h_{12}E^+u'(T),$$

$$E^-u'(T) = h_{21}E^-u'(0) + h_{22}E^+u'(T), \tag{2}$$

где операторы h_{ij} *обладают свойствами*:

$$h_{11} \in L(H_0^-, H_0^+), \quad h_{12} \in L(H_0^+, H_0^+), h_{21} \in L(H_0^-, H_0^-), \quad h_{22} \in L(H_0^+, H_0^-)$$

и $f \in X'$.

Если $u \in C(S, H_1)$ с $u' \in X$ удовлетворяет уравнению (1), то

$$Au'' = f - Bu' - Cu \in X',$$

и, значит, $u' \in W$. Следовательно, краевые условия (2) имеют смысл.

Определим оператор $\Lambda u = Au'$ с областью определения

$$D(\Lambda) = \{u : \ u \in W, \ E^+u(0) = h_{11}E^-u(0) + h_{12}E^+u(T),$$

$$E^-u(T) = h_{21}E^-u(0) + h_{22}E^+u(T)\}.$$

Введем оператор

$$G = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} : H_0^- \times H_0^+ \to H_0^+ \times H_0^-$$

и обозначим норму этого отображения через ρ_G.

Лемма 1. *Пусть* $\rho_G \le 1$. *Тогда оператор* Λ *является радиально непрерывным и максимальным монотонным оператором из* X *в* X'.

Доказательство. Из равенства $\Lambda(u + hv) = \Lambda u + h\Lambda v$, $u, v \in D(\Lambda)$, $h \in R^1$, следует радиальная непрерывность Λ. Замкнутость Λ вытекает из того, что любая функция из пространства W имеет след из H_0. Далее, для всех $u, v \in W$ имеет место формула

$$\langle Au', v\rangle + \langle u, Av'\rangle = (Au(T), v(T)) - (Au(0), v(0)), \tag{3}$$

где $\langle u, v\rangle = \int\limits_0^T (u, v)dt$.

Пусть $u \in D(\Lambda)$. Тогда, подставляя в (3) $v = u$, получим

$$2\langle \Lambda u, u\rangle = ||E^-u(0)||^2_{H_0} + ||E^+u(T)||^2_{H_0} - ||h_{11}E^-u(0) + h_{12}E^+u(T)||^2_{H_0} -$$

$$-||h_{21}E^-u(0) + h_{22}E^+u(T)||^2_{H_0} \ge (1 - \rho_G^2)(||E^-u(0)||^2_{H_0} + ||E^+u(T)||^2_{H_0}) \ge 0.$$

Следовательно, имеем $\Lambda \ge 0$. Далее, из (3) выводится, что сопряженный оператор $\Lambda^* v = -Av'$ и

$$D(\Lambda^*) = \{v : \ v \in W, \ E^-v(0) = h_{11}^*E^+v(0) + h_{21}^*E^-v(T),$$

$$E^+v(T) = h_{12}^* E^+ v(0) + h_{22}^* E^- v(T)\}.$$

Для $v \in D(\Lambda^*)$ из (3) следует, что

$$2(\Lambda^* v, v) \geq (1 - \rho_{G^*}^2)(||E^+ v(0)||_{H_0}^2 + ||E^- v(T)||_{H_0}^2) \geq 0.$$

Тогда согласно лемме о «максимальности» [1] получаем, что Λ является максимальным монотонным оператором. Лемма доказана.

Положим

$$(Rv)(t) = \int_0^t v(s)ds, v \in X.$$

Лемма 2. *Оператор Вольтерра $B + CR$ радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен из X в X'.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что R является липшиц–непрерывным отображением из X в X. Так как оператор B по предположению радиально непрерывен, монотонен и коэрцитивен, то достаточно установить, что оператор CR радиально непрерывен и $\langle CRv,\, v\rangle \geq 0$ $\forall v \in X$. Из условия $p \geq 2$ и ограниченности C имеем $||Cv||_{X^*} \leq K||v||_X$, $v \in X$, $k > 0$. Отсюда и из липшиц-непрерывности R следует непрерывность оператора CR из X в X'.

Для $v \in X$ имеет место неравенство

$$\langle CRv, v\rangle = \int_0^T (CRv, (Rv)')dt = \frac{1}{2}(C(Rv)(T), (Rv(T)) \geq 0,$$

т.е. лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\rho_G \leq 1$ и $f \in X'$. Тогда краевая задача* (1), (2) *имеет решение $u(t)$ такое, что $u \in C(S, H_1)$, $u' \in W$. Если вдобавок B строго монотонен, то это решение определяется однозначно.*

Доказательство. Если $u(t)$ — решение задачи (1), (2), то $v(t) = u'$ будет решением нелокальной краевой задачи

$$Av' + (B + CR)v = f(t), t \in S, \tag{4}$$

$$E^+v(0) = h_{11}E^-v(0) + h_{12}E^+v(T),$$
$$E^-v(T) = h_{21}E^-v(0) + h_{22}E^+v(T). \tag{5}$$

Обратно, если $v(t)$ — решение задачи (4), (5) из пространства W, то $u = Rv$ — решение краевой задачи (1), (2).

Далее, в силу лемм 1, 2 выполнены все условия теоремы Браудера [1, 2]. Из этой теоремы вытекают разрешимость краевой задачи (4), (5) и ее однозначная разрешимость в случае строгой монотонности $B + CR$. Отсюда следует справедливость утверждений теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лионс Ж.–Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

3. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1983.
4. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно–составного типа. Ташкент: ФАН, 1974.
5. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов. Ташкент: ФАН, 1979.
6. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально–операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
7. *Егоров И. Е.* Нелокальные краевые задачи для дифференциально–операторного уравнения смешанного типа // Ученые записки Якутского гос. ун-та. Серия математика и физика. Якутск, 1994. С. 18-24.

Егоров Иван Егорович
Россия, Якутск, Якутский государственный университет
niipmi@sitc.ru