УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАТАЛИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В ДИФФУЗИОННОМ ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

В. П. Гаевой

1. Введение, постановка задачи

В последнее время в работах по математическому моделированию каталитических процессов в псевдоожиженном (кипящем) слое, широко используются модели, учитывающие влияние реакционной среды на нестационарное состояния активной поверхности катализатора. Впервые такая модель была предложена в работе [1]. Подробный обзор работ по этой теме дан в [2]. Для двухстадийной каталитической реакции первого порядка по промежуточному веществу математическая модель процесса в слое в безразмерных переменных приводится к следующему виду [3]

$$u_x(x) = -\varphi(u)\int_0^1 (1-z)\rho(x,z)\,dz, \qquad u(0) = u_0 \ge 0, \tag{1}$$

$$a\,\rho_{xx}(x,z) = (r(u,z)\,\rho(x,z))_z, \quad 0 < x < h, \quad 0 < z < 1, \tag{2}$$

$$a = const > 0, \quad r(u,z) = \varphi(u)\,(1-z) - z, \quad \varphi(u) \ge 0,$$

$$\rho_x(0,z) = 0, \qquad \rho_x(h,z) = 0, \tag{3}$$

$$r(u(x),0)\,\rho(x,0) = 0, \qquad r(u(x),1)\,\rho(x,1) = 0, \tag{4}$$

$$\rho(x,z) \ge 0, \qquad \int_0^1 \rho(x,z)\,dz = 1, \tag{5}$$

где x — безразмерная текущая координата высоты слоя, $u(x)$ и z — безразмерные концентрации веществ в газовой фазе и на поверхности катализатора соответственно, $\rho(x,z)$ — плотность распределения частиц катализатора по переменной z при заданном значении координаты x.

Математическая модель вида (1)–(5) при $\varphi(u) \equiv u$ рассмотрена в работе [3].

Заметим, что функция $r(u(x),z)$, входящая в уравнение (2), изменяет свой знак внутри области: $r(u(x),0) = \varphi(u(x)) \ge 0$, $r(u(x),1) = -1 < 0$, $x \in [0,h]$, и уравнение (2) является дифференциальным уравнением переменного типа [4–7]. Задачи вида (1)–(5) недостаточно исследованы с точки зрения существования и единственности их решения. В данном случае, линейная зависимость функции $r(u,z)$ от z позволяет свести задачу (1)–(5) к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_x(x) = -\varphi(u)\,(1 - v(x)), \quad x \in [0,h], \quad u(0) = u_0, \tag{6}$$

$$a\,v_{xx} - (1+\varphi(u))\,v + \varphi(u) = 0,\ x \in (0,h), \tag{7}$$
$$v_x(0) = 0, \quad v_x(h) = 0,$$

где $v(x) = \int\limits_0^1 z\,\rho(x,z)\,dz$ — среднее значение концентрации вещества на поверхности катализатора при заданном значении x.

Краевую задачу (6), (7) можно рассматривать как самостоятельную модель каталитического процесса в кипящем слое. При этом физический смысл имеют только решения, удовлетворяющие неравенствам $0 \le u(x) \le u_0$, $0 \le v(x) \le 1$.

В данной работе доказывается существование и единственность решения задачи (6), (7) в предположении, что функция $\varphi(\eta) \in C[0,u_0]$, $\varphi(\eta) \equiv 0$ при $\eta \le 0$ и $\varphi(\eta) > 0$ при $\eta > 0$. Устанавливаются некоторые особенности поведения решения в зависимости от значения коэффициента a. Доказываются оценки близости решения задачи (6), (7) к решениям вырожденных задач, полученных из (6), (7) как при $a \to 0$, так и при $a \to \infty$.

2. Существование и единственность решения

Теорема 1. *Пусть $\varphi(\eta)$ непрерывная на отрезке $[0,u_0]$ функция, $\varphi(\eta) \equiv 0$ при $\eta \le 0$ и $\varphi(\eta) > 0$ при $\eta > 0$, тогда краевая задача (6), (7) однозначно разрешима и для ее решения справедливы оценки*

$$0 \le u(x) \le u_0, \qquad 0 \le v(x) < 1.$$

Предварительно рассмотрим задачу Коши следующего вида

$$u_x = -\varphi(u) f(x), \quad x \in [0,h], \quad u(0) = u_0, \tag{8}$$

где $f(x) \in C[0,h]$, $f(x) \ge 0$, $x \in [0,h]$, а $\varphi(\eta)$ удовлетворяет предположениям теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 и ряда других утверждений данной работы существенно используются следующие свойства решения задачи (8).

1) *Задача (8) однозначно разрешима для всех $x \in [0,h]$ и ее решением является невозрастающая функция, удовлетворяющая неравенствам $0 \le u(x) \le u_0$.*

В данном случае неприменима теорема Коши о существовании и единственности решения [8], так как от функции $\varphi(u)$ не требования непрерывности по Липшицу.

Обозначим

$$J(u,u_0) = \int\limits_u^{u_0} \frac{d\eta}{\varphi(\eta)}, \qquad F(x) = \int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi.$$

Тогда при $J(0,u_0) > F(h)$, применяя к задаче (8) метод разделения переменных, получим уравнение относительно $u(x)$

$$J(u,u_0) = F(x). \tag{9}$$

При выполнении указанного неравенства уравнение (9) однозначно разрешимо при всех $x \in [0,h]$ и его решение $u(x) > 0$. Если неравенство $J(0,u_0) > F(h)$ не выполнено, то существует значение $x_0 \in (0,h]$ такое, что $J(0,u_0) = F(x_0)$ и $J(0,u_0) > F(x)$ при $x < x_0$. В этом случае для всех $x \in [0,x_0)$ $u(x)$ однозначно определяется из уравнения (9) и $u(x) > 0$ при $x < x_0$. При $x \to x_0$ $u(x) \to 0$,

$u_x(x) \to 0$ и $u(x) \equiv 0$ является единственным продолжением решения в область значений $x > x_0$.

2) *Пусть* $u_1(x)$ *и* $u_2(x)$ *являются решениями задачи* (8) *при* $f(x) = f_1(x)$ *и* $f(x) = f_2(x)$ *соответственно, где* $f_i(x) \in C[0,h]$, $f_i(x) \geq 0$, $x \in [0,h]$, *тогда*

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq M_0 \int\limits_0^x |f_1(\xi) - f_2(\xi)|\, d\xi, \qquad x \in [0,h] \tag{10}$$

Действительно, если $J(0,u_0) > \max\{F_1(h), F_2(h)\}$, где $F_i(x) = \int\limits_0^x f_i(\xi)d\xi$, то, используя равенство (9), для всех $x \in [0,h]$ получим

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq M_0 |J(u_1,u_2)| \leq M_0 \int\limits_0^x |f_1(\xi) - f_2(\xi)|\, d\xi. \tag{11}$$

Пусть существует точка $x_0 \in [0,h]$ такая, что $J(0,u_0) > \max\{F_1(x), F_2(x)\}$ при $x < x_0$ и $J(0,u_0) = \max\{F_1(x_0), F_2(x_0)\}$. Тогда неравенства (11) справедливы для $x \in [0 < x_0)$ и если $x_0 < h$, то для $x \geq x_0$ одно из решений $u_i(x)$ тождественно равно нулю, а другое не возрастает. Следовательно, неравенство (11) справедливо и при $x \geq x_0$.

3) *Пусть существует значение* $x_1 \in [0,h]$ *такое, что* $F_2(x) \geq F_1(x)$ *при* $x \leq x_1$, *тогда* $u_1(x) \geq u_2(x)$ *для всех* $x \leq x_1$.

Действительно, если $J(0,u_0) > F_2(x_1)$, то для $x \leq x_1$

$$J(u_2(x), u_1(x)) = F_2(x) - F_1(x) \geq 0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что $u_1(x) \geq u_2(x)$ при $x \leq x_1$. Пусть существует точка $x_0 \leq x_1$ такая, что $J(0,u_0) = F_2(x_0)$ и $J(0,u_0) > F_2(x)$ при $x < x_0$. Тогда соотношения (12) и неравенство $u_1(x) \geq u_2(x)$ справедливы для всех $x < x_0$, а при $x \geq x_0$ $u_2(x) \equiv 0$ и $u_1(x) \geq 0$. Следовательно, неравенство $u_1(x) \geq u_2(x)$ справедливо для всех $x < x_1$.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства существования решения задачи (6), (7) используем теорему Шаудера о неподвижной точке [9]. На замкнутом выпуклом множестве S функций $v(x) \in C[0,h]$ таких, что $0 \leq v(x) \leq 1$ при $v(x) \in S$, определим оператор A следующим образом. По функции $v(x) \in S$ находится функция $u(x)$ как решение задачи Коши (6), при этом $u(x) \in C_1[0,h]$, $0 \leq u(x) \leq u_0$. Затем по найденной функции $u(x)$ определяется $w(x) = A\, v(x)$ как решение краевой задачи

$$a\, w_{xx} - (1 + \varphi(u))\, w + \varphi(u) = 0, \; x \in (0,h), \tag{13}$$

$$w_x(0) = 0, \quad w_x(h) = 0.$$

Оценивая с помощью принципа максимума решение задачи (13), а затем, находя из уравнения (13) оценки для производных, получим для всех $w(x) = A\, v(x)$ независимо от $v(x) \in S$,

$$0 \leq w(x) \leq M_0\, (1 + M_0)^{-1} < 1, \tag{14}$$

$$\max_x |w_x(x)| \leq a^{-1} M_0\, h/2, \qquad \max_x |w_{xx}(x)| \leq a^{-1} M_0,$$

где $M_0 = \max|\varphi(\eta)|$, $\eta \in [0, u_0]$.

Следовательно, оператор A компактно отображает замкнутое выпуклое множество S в свою часть.

Пусть $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — произвольные функций из S, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения задач Коши (6) при $v(x) = v_1(x)$ и $v(x) = v_2(x)$ соответственно, $w_1(x)$ и $w_2(x)$ — решения краевых задач (13) при $u(x) = u_1(x)$ и $u(x) = u_2(x)$. Из (10) следует оценка

$$\max_x |u_1(x) - u_2(x)| \le M_0\, h\, \max_x |v_1(x) - v_2(x)|. \tag{15}$$

Функция $\Delta w(x) = w_1(x) - w_2(x)$ является решением краевой задачи

$$a\,\Delta w_{xx} - (1 + \varphi_1)\,\Delta w + (\varphi_1 - \varphi_2)(1 - w_2) = 0,\ x \in (0, h),$$

$$\Delta w_x(0) = 0, \quad \Delta w_x(h) = 0,$$

где $\varphi_i = \varphi(u_i(x)),\ i = 1, 2$.

Используя принцип максимума, с учетом оценки (14) получим

$$\max_x |w_1(x) - w_2(x)| \le \max_x |\varphi(u_1(x)) - \varphi(u_2(x))|. \tag{16}$$

Из оценок (15), (16) и равномерной непрерывности функции $\varphi(\eta)$ на отрезке $[0, u_0]$ следует непрерывность оператора A на множестве S.

Таким образом, выполнены все требования теоремы Шаудера. Следовательно, существует функция $v^*(x) \in S$ такая, что $v^* = A\,v^*$. Но тогда по определению оператора A функция $v^*(x)$ и найденная по ней как решение задачи Коши (6) при $v(x) = v^*(x)$ функция $u^*(x)$ являются решением задачи (6), (7).

Пусть $u_1(x), v_1(x)$ и $u_2(x), v_2(x)$ — два различных решения задачи (6), (7), $\Delta u(x) = u_1(x) - u_2(x),\ \Delta v(x) = v_1(x) - v_2(x)$. Используя уравнение и граничные условия (7), получим краевую задачу для функции $\Delta v(x)$

$$a\,\Delta v_{xx} - (1 + \varphi_1)\,\Delta v + (\varphi_1 - \varphi_2)(1 - v_2) = 0,\ x \in (0, h), \tag{17}$$

$$\Delta v_x(0) = 0, \quad \Delta v_x(h) = 0,$$

где $\varphi_i(x) = \varphi(u_i(x)),\ i = 1, 2$.

Так как $\varphi_i(0) = \varphi(u_0),\ i = 1, 2,\ \Delta v_x(0) = 0$, то из уравнения (17) следует, что $\Delta v(x)$ не может принимать в точке $x = 0$ ни положительного максимума, ни отрицательного минимума. Пусть при $x = 0$ $\Delta v(x)$ достигает неотрицательного минимума (в противном случае поменяем решения номерами). Тогда, если $\Delta v(x)$ не равна тождественно нулю, то существует точка положительного максимума $x = x_0 \in (0, h]$ такая, что $\Delta v_x(x_0) = 0$, $\Delta v(x_0) > 0,\ \Delta v(x) \ge 0$ при $x \in [0, x_0]$. Вычитая из уравнения (7) уравнение (6), получим $a\,v_{xx} - u_x - v = 0,\ x \in [0, h]$. Следовательно, $a\,\Delta v_{xx} - \Delta u_x - \Delta v = 0,\ x \in [0, h]$. Интегрируя последнее уравнение по x от 0 до x_0, получим

$$\Delta u(x_0) = -\int\limits_0^{x_0} \Delta v(x)\,dx < 0. \tag{18}$$

С другой стороны, рассматривая $u_1(x)$ и $u_2(x)$ как решения задачи Коши (8) при $f(x) = f_1(x) = 1 - v_1(x)$ и $f(x) = f_2(x) = 1 - v_2(x)$ соответственно, и используя утверждение 3), найдем $\Delta u(x_0) \ge 0$. Это неравенство противоречит неравенству (18). Следовательно, предположение, что $\Delta v(x)$ не равна тождественно нулю неверно. Но тогда $v_1(x) \equiv v_2(x)$ и $u(x)$ определяется однозначно как решение задачи Коши (6) при однозначно определенной функции $v(x)$.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1. Всюду в дальнейшем, как минимум, будем считать выполненными предположения теоремы 1, и при соответствующей гладкости функции $\varphi(\eta)$ используем следующие обозначения

$$M_n = \max|\varphi^{(n)}(\eta)|,\ \eta \in [0, u_0],\ n = 0, 1, 2.$$

3. Асимптотические оценки

Лемма 1. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решением задачи (6), (7), тогда значения $u(h)$ и $\int\limits_0^h v(x)\,dx$ не зависят от коэффициента a.*

Доказательство. Из равенства $a\,v_{xx} - u_x - v = 0,\ x \in [0, h]$ найдем $u_0 - u(h) = \int\limits_0^h v(x)\,dx$. Выписав равенство (9) для задачи Коши (6) с учетом найденного выше равенства, получим уравнение относительно $u(h)$

$$J(u(h), u_0) = h - u_0 + u(h), \tag{19}$$

справедливое при $J(0, u_0) > h - u_0$. При выполнении указанного условия уравнение (19) однозначно разрешимо и его решение не зависит от a. Если $J(0, u_0) \le h - u_0$, то в силу утверждения 1) $u(h) = 0$ независимо от значения a.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1, $\varphi(\eta) \in C_2[0, u_0]$ и функции $u(x), v(x)$ являются решением задачи (6), (7), тогда $v(x)$ представима в следующем виде*

$$v(x) = \varphi(u)\,(1 + \varphi(u))^{-1} + \sqrt{a}\,p(x) + a\,w(x), \tag{20}$$

где функции $p(x)$ и $w(x)$, зависящие от коэффициента a, удовлетворяют оценкам

$$-M_3\,V_0(x) \le p(x) \le M_3\,V_1(x), \qquad \max_x |w(x)| \le M_4, \tag{21}$$

$$V_0(x) = \frac{\cos h\,((h - x)/\sqrt{a})}{\sin h\,(h/\sqrt{a})}, \qquad V_1(x) = \frac{\cos h\,(x/\sqrt{a})}{\sin h\,(h/\sqrt{a})},$$

$$M_3 = M_0\,M_1\,(1 + M_0)^{-1}, \qquad M_4 = M_0\,(4M_1^2 + M_0 M_2)\,(1 + M_0)^{-1}.$$

Доказательство леммы 2 практически совпадает с доказательством аналогичного утверждения при $\varphi(u) = u$, приведенного в работе [3].

Функции $p(x), w(x)$, входящие в равенство (20), являются решениями следующих краевых задач

$$a\,p_{xx}(x) - (1 + \varphi(u))p(x) = 0,$$

$$p_x(0) = -a^{-1/2} v_x^1(0), \qquad p_x(h) = -a^{-1/2} v_x^1(h),$$

$$a\,w_{xx}(x) - (1 + \varphi(u))w(x) = -v_{xx}^1(x),$$

$$w_x(0) = 0, \qquad w_x(h) = 0,$$

где $v^1(x) = \varphi(u(x))\,(1 + \varphi(u(x)))^{-1}$.

Оценки для $p(x)$ находятся с помощью барьерных функций

$$Z^0(x) = p(x) + M_3 V_0(x), \quad Z^1(x) = p(x) - M_3 V_1(x)$$

и оценки $\max|v^1_x(x)| \le M_3 = M_0 M_1 (1+M_0)^{-1}$.

Оценка для $w(x)$ следует из принципа максимума и оценки

$$\max_x |v^1_{xx}(x)| \le M_4 = M_0\,(4M_1^2 + M_0 M_2)\,(1+M_0)^{-1}.$$

При $a=0$ краевая задача (6), (7) вырождается в задачу Коши

$$u^0_x(x) = -\varphi(u^0)\,(1-v^0(x)), \quad x\in[0,h], \quad u^0(0)=u_0, \tag{22}$$
$$v^0(x) = \varphi(u^0)(1+\varphi(u^0))^{-1}.$$

Так как функция $\psi(u)=\varphi(u)(1+\varphi(u))^{-1}$ удовлетворяет требованиям теоремы 1, то для задачи (22) справедливы утверждения 1)–3). Кроме того, из (22) следует, что $u^0(h)$ удовлетворяет уравнению (19) при $J(0,u_0) > h-u_0$ и $u^0(h)=0$ при $J(0,u_0)\le h-u_0$.

Теорема 2. *В предположениях леммы* 2 *для разности решений задачи* (6), (7) *и задачи* (22) *справедливы оценки*

$$\max_x |u(x)-u^0(x)| \le a\,M_5,$$
$$|v(x)-v^0(x)| \le \sqrt{a}\,M_3\,|V_0(x)+V_1(x)| + a\,(M_4+M_1\,M_5), \tag{23}$$
$$M_5 = M_0\,(M_3+M_4\,h).$$

Доказательство. Подставляя выражение (20) в уравнение (6), получим

$$u_x = -\frac{\varphi(u)}{1+\varphi(u)}[1-(1+\varphi(u))(\sqrt{a}\,p(x)+a\,w(x))].$$

Обозначим

$$J_1(u_1,u_2) = \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{1+\varphi(\eta)}{\varphi(\eta)}\,d\eta,$$

$$F_1(x) = \int\limits_0^x [1-(1+\varphi(u(\xi)))(\sqrt{a}\,p(\xi)+a\,w(\xi))]\,d\xi.$$

Тогда, если $J_1(0,u_0) > \max\{h, F_1(h)\}$, то для всех $x\in[0,h]$

$$J_1(u,u^0) = J_1(u,u_0) - J_1(u^0,u_0) = F_1(x) - x. \tag{24}$$

Отсюда, используя оценки для $p(x)$ и $w(x)$, найдем

$$\max|u(x)-u^0(x)| \le \frac{M_0}{1+M_0}|J_1(u,u^0)| \le \max|F_1(x)-x| \le a\,M_5, \tag{25}$$

где $M_5 = M_0(M_3+hM_4)$.
Если неравенство $J_1(0,u_0) > \max\{h,F_1(h)\}$ не выполнено, то существует точка $x_0\in(0,h]$ такая, что $J_1(0,u_0)=\max\{x_0,F_1(x_0)\}$, $J_1(0,u_0)>\max\{x,F_1(x_0)\}, x< x_0$. Тогда равенство (24) и оценка (25) справедливы для всех $x<x_0$. При $x\ge x_0$ одно из решений, $u(x)$ или $u^0(x)$, тождественно равно нулю, а другое не возрастает. Следовательно, оценка (25) справедлива для всех $x\in[0,h]$.

Из (20), (22) имеем

$$v(x)-v^0(x) = \frac{\varphi(u(x))}{(1+\varphi(u(x))} - \frac{\varphi(u^0(x))}{(1+\varphi(u^0(x))} - +\sqrt{a}\,p(x) + a\,w(x).$$

Отсюда, используя (21), (25), получим оценку (23).

Обозначим

$$\Phi(u) = h^{-1}\int_0^h \varphi(u(x))dx, \qquad \Psi(u) = \Phi(u)(1+\Phi(u))^{-1}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1 *и функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *являются решением задачи* (6), (7), *тогда*

$$\max_x |v(x) - \Psi(u)| \le a^{-1}\, h^2\, M, \tag{26}$$

где $M = M_0$, *если* $\varphi(\eta) \in C[0,h]$, *и* $M = M_0 \min\{1, M_1\, h\}$, *если* $\varphi(\eta) \in C_1[0,h]$.

Доказательство. Для доказательства леммы 3 представим функцию $v(x)$ в следующем виде

$$v(x) = \Psi(u) + a^{-1}w(x), \tag{27}$$

где $w(x) = w^1(x) + w^2(x)$,

$$w^1(x) = \int_0^x\int_0^\eta [(1+\varphi(u(\xi))\Psi(u) - \varphi(u(\xi))]\, d\xi\, d\eta,$$

а $w^2(x)$ является решением краевой задачи

$$a\; w^2_{xx} - (1+\varphi(u))\, w^2 = (1+\varphi(u))\, w^1(x), \qquad w^2_x(0) = 0,\; w^2_x(h) = 0.$$

Для функций $w^1(x)$ и $w^2(x)$ справедливы оценки $\max|w^2(x)| \le \max|w^1(x)| \le M\, h^2/2$, где константа M определена выше. Из (27) и последних оценок следует (26).

При $a =\to \infty$ краевая задача (6), (7) вырождается в следующую задачу

$$u^\infty_x(x) = -\varphi(u^\infty)\,(1 - v^\infty), \quad x \in [0,b], \quad u^\infty(0) = u_0, \tag{28}$$

где

$$v^\infty = \int_0^h \varphi(u^\infty)\, dx\, (h + \int_0^h \varphi(u^\infty)\, dx)^{-1}.$$

Теорема 3. *В предположениях теоремы* 1 *задача* (28) *однозначно разрешима и для разности решений задач* (6), (7) *и* (28) *справедливы оценки*

$$\max_x |v(x) - v^\infty| \le a^{-1}\, h^2\,(1+M_0)\, M, \tag{29}$$

$$\max_x |u(x) - u^\infty(x)| \le a^{-1}\, h^3\, M_0\,(1+M_0)\, M,$$

где $M = M_0$, *если* $\varphi(\eta) \in C[0,h]$, *и* $M = M_0 \min\{1, M_1\, h\}$, *если* $\varphi(\eta) \in C_1[0,h]$.

Доказательство. Для доказательства существования и единственности решения задачи (28) рассмотрим следующую задачу

$$u^k_x(x) = -\varphi(u^k)\,(1+k)^{-1}, \quad x \in [0,h], \quad u^k(0) = u_0, \tag{30}$$

где k — неотрицательная константа.

При любом значении $k \geq 0$ задача (30) аналогична задаче (8) и обладает всеми ее свойствами. Из утверждения 2) следует непрерывная зависимость $u^k(x)$ от параметра k.

Обозначим $\Phi(u^k) = h^{-1}\int\limits_0^h \varphi(u^k(x))dx$.

Так как $\Phi(u^k)$ непрерывно зависит от параметра k, при $k = 0$ $\Phi(u^k) > k$, и при $k = M_0 + 1$ $\Phi(u^k) \leq M_0 < k$, то существует значение $k = s$ такое, что $\Phi(u^s) = s$. Следовательно, задача (28) разрешима.

Интегрируя уравнение (30) по x от 0 до h при $k = s$, найдем

$$u_0 - u^s(h) = h\Phi(u^s)(1+s)^{-1} = hs(1+s)^{-1} \tag{31}$$

Применяя к уравнению (30) методом разделения переменных с учетом равенства (31), получим уравнение относительно $u_h^s = u^s(h)$

$$J(u_h^s, u_0) = h - u_0 + u_h^s,$$

справедливое при условии, что $J(0, u_0) \geq h - u_0$.

Это уравнение однозначно разрешимо и совпадает с уравнением (19). Если $J(0, u_0) \leq h - u_0$, то в силу утверждения 1) $u_h^s = 0$

Таким образом, при $k = s$ u_h^s определяется однозначно. Но тогда из уравнения (31) однозначно определяется значение $s = \Phi(u^s)$ и задача (28) однозначно разрешима.

Подставляя выражение (27) в (6) и интегрируя затем уравнения (6) и (28) по x от 0 до h, найдем

$$u_0 - u(h) = h\Psi(u) - a^{-1}\int\limits_0^h \varphi(u(x))w(x)dx,$$

$$u_0 - u^\infty(h) = h\Psi(u^\infty) = hv^\infty.$$

Учитывая, что $u(h)$ не зависит от a, $u(h) = u^\infty(h)$, и используя оценку для $w(x)$, из последних равенств получим

$$|\Psi(u) - v^\infty| \leq a^{-1}\int\limits_0^h \varphi(u(x))|w(x)|dx \leq a^{-1}h^2MM_0.$$

Из (26) и последней оценки следует

$$\max|v(x) - v^\infty| \leq a^{-1}h^2(1+M_0)M.$$

Рассматривая (6) и (28) как задачу Коши (8) с $f(x) = 1 - v(x)$ и $f(x) = 1 - v^\infty$ соответственно, из (10) с учетом последней оценки найдем

$$\max|u(x) - u^\infty| \leq hM_0\max|v(x) - v^\infty| \leq a^{-1}h^3M_0(1+M_0)M.$$

Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

Замечание 2. Утверждения леммы 1 и теорем 2 и 3 представляют определенный интерес для химиков–технологов. Из леммы 1 следует, что концентрация вещества в газовой фазе на выходе из слоя $u(h)$ и полное содержание промежуточного вещества в слое $\int\limits_0^h v(x)\,dx$ не зависят от коэффициента диффузии частиц по высоте слоя.

Константы, входящие в оценки (23), (29), найдены в явном виде, это позволяет определить области значений параметров математической модели, при которых состояние активной поверхности катализатора близко к квазистационарному по отношению к концентрации вещества в газовой фазе либо к состоянию идеального перемешивания частиц катализатора по высоте слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов Ю. И., Махоткин О. А., Слинько М. Г.* Моделирование химических процессов в псевдоожиженном слое при нестационарном состоянии катализатора // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, N 1. С. 145–148.
2. *Покровская С. А., Гаевой В. П., Садовская Е. М. и др.* Математическое моделирование процессов в кипящем слое с учетом нестационарного состояния катализатора // Математическое моделирование каталитических реакторов: Сб. тр. Новосибирск: Наука, 1989. С. 85–106.
3. *Гаевой В. П.* Оценка условия квазистационарности состояния поверхности катализатора в кипящем слое // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, N 2. С. 64–72.
4. *Зеленяк Т. И., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* О свойствах решений нелинейных уравнений переменного типа // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1974. Т. 5, N 4. С. 35–47.
5. *Врагов В. Н., Подгаев А. Г.* О корректных задачах для некоторых уравнений переменного типа // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, N 2. С. 277–280.
6. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
7. *Лаврентьев М. М.* (*мл.*) Априорная гладкость решений ряда уравнений переменного типа // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, N 9. С. 145–153.
8. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1959.
9. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1963.

Гаевой Виктор Павлович
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
gaev@math.nsc.ru