УДК 517.95

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА И ПРИЛОЖЕНИЯ К ТРАНСЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

С. Н. Глазатов

В настоящей работе рассматривается вопрос о разрешимости одной новой неклассической краевой задачи для класса линейных уравнений смешанного типа. Полученный результат применяется для построения пространственно-периодических решений линеаризованного уравнения Линя–Рейсснера–Цзяня трансзвуковой газовой динамики.

1. Неклассическая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа

Рассмотрим в цилиндре $Q = D \times (0,T)$, где $D \subset R^n$ — ограниченная область с гладкой границей γ, $0 < T < +\infty$, уравнение

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} + a(x,t)u_t + Au = f(x,t). \tag{1.1}$$

Здесь $Au \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + b(x)u$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2 \quad (a_0 > 0)$ для всех $x \in D$, $\xi \in R^n$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1,\dots,n$.

Функция $k(x,t)$ может менять знак в Q произвольным образом.

Обозначим $S = \gamma \times (0,T)$, $S_0 = \{(x,0),\ x \in D\}$, $S_T = \{(x,T),\ x \in D\}$.

Достаточно общая теория краевых задач для уравнений вида (1.1) в области Q развита, например, в [1, гл. 3], [2, гл. 2] (см. также библиографию в этих работах). Постановка корректных краевых задач для (1.1) в Q зависит от поведения функции $k(x,t)$ на множествах S_0 и S_T и от коэффициентов $a(x,t)$ и $b(x)$.

Однако в дальнейшем в работах [3–7] в области Q для уравнения (1.1) были предложены совершенно иные краевые задачи, которые названы в этих работах нелокальными, а именно, задавалась некоторая связь между значениями искомой функции $u(x,t)$ и (если нужно) ее производной u_t на S_0 и на S_T. Однако те методы, которые использовались в цитируемых работах для доказательства корректности этих задач зачастую не позволяли рассмотреть вопрос о существовании t — периодических решений рассматриваемых уравнений.

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что коэффициенты уравнения (1.1) суть достаточно гладкие в $\overline{Q}$ функции. Предположим также, что $k(x,0) = k(x,T)$ для всех $x \in D$. Обозначим $\Gamma_0 = \{x \in D : k(x,0) = k(x,T) = 0\}$.

Поставим краевую задачу Π_1 : найти в Q решение уравнения (1.1) удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_0} = u|_{S_T}, \tag{1.2}$$

$$u_t|_{\overline{S_0 \setminus \Gamma_0}} = u_t|_{\overline{S_T \setminus \Gamma_0}}, \tag{1.3}$$

$$u|_S = 0, \tag{1.4}$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}|_S = 0, \tag{1.4$'$}$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_j$, $\{\nu_j\}_{j=1}^n$ – компоненты вектора нормали к границе γ.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)_0$ скалярное произведение в $L^2(Q)$ а через $||\cdot||_s$ норму в пространстве Соболева $W_2^s(Q)$.

Утверждение. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на коэффициенты уравнения* (1.1). *Пусть всюду в* Q *выполнено неравенство* $2a(x,t)-k_t(x,t) \geq \delta > 0$ *и для всех* $x \in D$ *справедливо* $b(x) \geq 0$ *в случае условия* (1.4) *и* $b(x) \geq \delta > 0$ *в случае условия* (1.4$'$). *Тогда решение задачи* Π_1 *единственно в пространстве* $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть равенство $(Lu, u_t)_0 = 0$, произвести интегрирование по частям и воспользоваться условиями утверждения на коэффициенты (1.1). Получим, что $u \equiv 0$ п. в. в Q.

Теорема 1.1. *Пусть* f *и* $f_t \in L^2(Q)$ *и* $f(x,0) = f(x,T)$ *для почти всех* $x \in D$. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на коэффициенты уравнения* (1.1) *и* $a(x,0) = a(x,T)$ *для всех* $x \in D$. *Предположим также, что всюду в* Q *выполнено неравенство* $2a(x,t) - |k_t(x,t)| \geq \delta > 0$ *и для всех* $x \in D$ *справедливо* $b(x) \geq 0$ *в случае условия* (1.4) *и* $b(x) \geq \delta > 0$ *в случае условия* (1.4$'$). *Тогда существует* $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ *решение задачи* Π_1 *и, более того,* $u_t(x,0) = u_t(x,T)$ *для почти всех* $x \in D$.

Доказательство. Пусть $\varphi_s(x)$, $s = 0,1,\ldots$ — ортонормированные в $L^2(Q)$ собственные функции задачи Дирихле (Неймана) $A\varphi_s = \lambda_s^2 \varphi_s$, $\varphi_s|_\gamma = 0$ ($\frac{\partial \varphi_s}{\partial \nu_A}|_\gamma = 0$), $s = 0,1,\ldots$. Будем искать решение задачи Π_1 как предел в $W_2^2(Q)$ при $m \to \infty$ последовательности функций

$$u_m(x,t) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{s=0}^{m} u_{ls} \sin\frac{2\pi lt}{T}\varphi_s(x) + \sum_{l=0}^{m}\sum_{s=0}^{m} \tilde{u}_{ls} \cos\frac{2\pi lt}{T}\varphi_s(x),$$

где u_{ls} и $\tilde{u}_{ls}$ — постоянные, подлежащие определению из некоторой линейной алгебраической системы уравнений. Естественно, что эти постоянные зависят от m, но чтобы не загромождать текст, эту зависимость мы опустим.

Обозначим через E_m конечномерную линейную оболочку функций

$$\{\sin\frac{2\pi lt}{T}\varphi_s(x),\ \cos\frac{2\pi rt}{T}\varphi_s(x)\}_{l=1,\ldots,m,\ s=0,\ldots,m,\ r=0,\ldots,m},$$

а через $P_m : L^2(Q) \to E_m$ ортопроектор в $L^2(Q)$ на E_m. Введем также обозначение $f_m = P_m f$.

Ясно, что если $\varphi \in E_m$, то $\varphi_t \in E_m$ и $A\varphi \in E_m$ и, таким образом, оператор A коммутирует с P_m на функциях из E_m. Кроме того, очевидно, что оператор D_t коммутирует с P_m на достаточно гладких $t-$ периодических функциях. В силу условий теоремы на $f(x,t)$ имеем $D_t^j f_m \underset{m\to\infty}{\to} D_t^j f$ в $L^2(Q)$ при $j = 0,1$. Более того, как нетрудно видеть, если $z \in L^2(Q)$ и $\varphi \in E_m$, то $(P_m z, \varphi)_0 = (z, P_m\varphi)_0 = (z,\varphi)_0$.

При фиксированном m константы u_{ls} и $\tilde{u}_{ls}$ находятся следующим образом: рассмотрим равенство

$$L_1 u_m \equiv P_m(k(x,t)u_{mtt}) + P_m(a(x,t)u_{mt}) + Au_m = f_m. \tag{1.5}$$

Поскольку u_m входят в (1.5) линейно и сами зависят от неизвестных u_{ls} и $\tilde{u}_{ls}$ линейным образом, то путем приравнивания соответствующих коэффициентов левой и правой частей (1.5) при базисных функциях пространства E_m получается линейная система алгебраических уравнений для определения этих неизвестных. Как нетрудно видеть, число неизвестных в этой системе равно числу уравнений, и ее безусловная разрешимость эквивалентна единственности ее решения. Докажем единственность решения системы (1.5) и получим необходимые априорные оценки приближенных решений u_m.

Предположим, что решение системы (1.5) существует и рассмотрим равенство

$$(L_1 u_m, u_{mt})_0 = (f_m, u_{mt})_0.$$

Интегрируя по частям, используя свойства проектора P_m, условия теоремы и «ε–неравенство» Юнга, получим равномерную по m оценку

$$||u_{mt}||_0 \le C_1 ||f_m||_0. \tag{1.6}$$

Далее рассмотрим равенство

$$(D_t L_1 u_m, u_{mtt})_0 = (f_{mt}, u_{mtt})_0.$$

Используя условия теоремы на коэффициенты (1.1), свойства P_m, «ε–неравенство» Юнга и оценку (1.6) в результате интегрирования по частям получаем неравенство

$$||u_{mtt}||_0 \le C_2(||f_m||_0 + ||f_{mt}||_0), \tag{1.7}$$

где C_2 не зависит от m.

Теперь перепишем (1.5) следующим образом

$$Au_m = -P_m(ku_{mtt}) - P_m(au_{mt}) + f_m.$$

Используя полученные оценки (1.6), (1.7), ограниченность оператора P_m и известные неравенства для эллиптических операторов (см., например, [8, с. 468]), получаем следующую равномерную по m оценку

$$||u_m||_{W^2_{2,x}(Q)} \le C_3(||f_m||_0 + ||f_{mt}||_0). \tag{1.8}$$

Наконец, при интегрировании по частям в равенстве

$$(D_t L_1 u_m, u_{mt})_0 = (f_{mt}, u_{mt})_0$$

с использованием оценок (1.6), (1.7), получаем неравенство

$$||\nabla_x u_{mt}||_0 \le C_4(||f_m||_0 + ||f_{mt}||_0), \tag{1.9}$$

где C_4 не зависит от m.

Теперь сложим полученные неравенства (1.6)–(1.9) и в итоге получим равномерную по m оценку

$$||u_m||_2 \le C_5(||f_m||_0 + ||f_{mt}||_0). \tag{1.10}$$

В силу эквивалентности норм в конечномерных пространствах оценка (1.10) гарантирует единственность решения системы (1.5), а значит и ее безусловную разрешимость. Кроме того, в силу условий на функцию $f(x,t)$ из оценки (1.10) следует, что для всех m

$$||u_m||_2 \le C_6. \tag{1.11}$$

Это означает, что существуют подпоследовательность $\{m_r\}_{r=1}^{\infty}$ и функция $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ такие, что $u_{m_r} \underset{r\to\infty}{\to} u$ слабо в $W_2^2(Q)$.

Теперь рассмотрим равенство

$$(L_1 u_{m_r}, \omega_p)_0 = (f_{m_r}, \omega_p)_0, \tag{1.12}$$

где $\omega_p(x,t)$ — базисная функция, а $m_r > p$.

Заметим, что в этом случае $(P_{m_r}(ku_{m_r tt} + au_{m_r t}), \omega_p)_0 = (ku_{m_r tt} + au_{m_r t}, \omega_p)_0$, и в равенстве (1.12) можно перейти к пределу при $r \to \infty$. Поскольку ω_p произвольна, это означает, что полученная функция $u(x,t) \in W_2^2(Q)$ является решением задачи Π_1 (краевые условия (1.2)–(1.4) либо (1.2)–(1.4$'$)удовлетворяются в силу очевидных соображений). Теорема доказана.

Замечание. В описанной ситуации множества S_0 и S_T как носители краевых условий равноправны, поэтому при выполнении всех остальных условий теорема единственности гладкого решения остается справедливой если $2a + k_t \le -\delta < 0$ всюду в Q, а теорема существования справедлива, если $2a + |k_t| \le -\delta < 0$ всюду в Q. Для доказательства достаточно сделать замену $t = T - t'$.

2. Приложения к математическим задачам трансзвуковой газовой динамики

В работе [9] для описания нестационарных малых возмущений в трансзвуковом потоке газа предложено уравнение

$$Au \equiv u_{xt} + u_x u_{xx} - \Delta_y u = f(x,y,t), \tag{2.1}$$

где $\Delta_y u \equiv u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2}$.

Это уравнение при любых значениях u_x является квазилинейным гиперболическим уравнением.

В настоящее время имеется весьма незначительное количество результатов, касающихся постановки и разрешимости начально-краевых задач для (2.1) (среди них отметим работы [10–12]). Возникающие трудности объясняются тем, что помимо того, что уравнение является нелинейным, оно еще не разрешено относительно производной по времени, а гиперплоскость $t = 0$, где естественно задавать начальные условия, является характеристической поверхностью для (2.1).

Как с математической, так и с прикладной точки зрения целесообразно изучить постановки краевых задач как в ограниченных, так и в неограниченных областях для линеаризованного уравнения

$$Lu \equiv u_{xt} + (k(x,y,t)u_x)_x - \Delta_y u = f(x,y,t). \tag{2.2}$$

Эти рассмотрения могут подсказать правильные постановки задач для нелинейного уравнения (2.1) и, кроме того, обосновать сам принцип линеаризации. Отметим, что, например, в монографии [13] имеются примеры корректных краевых задач для уравнения (2.2) в ограниченных областях, постановка которых существенно зависит от знака функции $k(x,y,t)$ на границе области. Характеристическая задача Коши в области $R_x \times R_y^2 \times (0,T)$ рассмотрена в работе [14].

Рассмотрим область $G = (0,T) \times (0,L) \times \Omega_y$, где $0 < T < +\infty$, $0 < L < +\infty$, $\Omega_y \subset R_y^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega_y$.

Поставим начально-краевую задачу: найти в G решение уравнения (2.2) такое, что

$$u|_{t=0} = u_0(x,y), \tag{2.3}$$

$$D_x^j u|_{x=0} = D_x^j u|_{x=L}, \quad j = 0, 1, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega_y \times (0,T) \times (0,L)} = 0. \tag{2.5}$$

Сразу же заметим, что задача (2.2)–(2.5) переопределена, поскольку условие периодичности производной $D_x u$ нужно задавать лишь на той части границы, где $k(0, y, t)$ и $k(L, y, t)$ не обращаются в ноль, но наложенные в дальнейшем на функцию $k(x, y, t)$, правую часть f и начальную функцию u_0 условия согласования таковы, что эта задача корректна в пространстве гладких функций.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия: функция $k(x, y, t)$ достаточно гладкая в $\overline{G}$ и $D_x^s k|_{x=0} = D_x^s k|_{x=L}$, $s = 0, 1, 2, 3, 4$, пусть $D_x^\nu f \in L^2(G)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$ и $D_x^\nu f|_{x=0} = D^\nu f|_{x=L}$, $\nu = 0, 1, 2$; $u_0, u_{0x}, u_{0xx} \in W_2^2((0, L) \times \Omega_y)$ и $D^l u_0|_{x=0} = D^l u_0|_{x=L}$, $l = 0, 1, 2, 3$. Кроме того, пусть $\int\limits_0^L f(x, y, t)dx = 0$ для всех $(y, t) \in \Omega_y \times (0, T)$ и $\int\limits_0^L u_0(x, y)dx = 0$ для всех $y \in \Omega_y$.*

Тогда существует единственное решение задачи (2.2)–(2.5) $u(x, y, t) \in W_{2x,y}^{3,2}(G)$ такое, что $u_{xt} \in L^2(G)$ и такое, что $\int\limits_0^L u(x, y, t)dx = 0$ для всех $(y, t) \in \Omega_y \times (0, T)$.

Доказательство. Приведем здесь лишь схему доказательства этой теоремы, выделяя наиболее существенные моменты.

Сведем задачу (2.2)–(2.5) к задаче типа Π_1 путем дискретизации уравнения (2.2) по переменной t. Для достаточно большого натурального числа N обозначим $\tau = TN^{-1}$,

$$f^n(x, y) = \tau^{-1} \int\limits_{(n-1)\tau}^{n\tau} f(x, y, \xi)d\xi, \quad k^n(x, y) = k(x, y, n\tau),$$

где $n = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим систему уравнений

$$l(u^n, u^{n-1}) \equiv \tau^{-1}(u_x^n - u_x^{n-1}) + (k^n u_x^n)_x - \Delta_y u^n = f^n(x, y), \quad n = 1, \dots, N, \tag{2.6}$$

с условием

$$u^0 = u_0(x, y). \tag{2.7}$$

Нужно доказать разрешимость системы уравнений (2.6), (2.7) с граничными условиями (2.4), (2.5). Причем ее решения должны быть таковы, что $\int\limits_0^L u^n(x, y) = 0$ для всех $y \in \Omega_y$.

Таким образом фактически задача свелась к следующей: требуется найти решение уравнения

$$(k^n v_x)_x - \Delta_y v + \tau^{-1} v_x = g(x, y) \tag{2.8}$$

удовлетворяющее условиям (2.4), (2.5) и такое, что $\int\limits_0^L v(x, y)dx = 0$ для всех $y \in \Omega_y$. При этом функция $g(x, y)$ обладает достаточной гладкостью и такова, что $\int\limits_0^L g(x, y)dx = 0$ для всех $y \in \Omega_y$.

Введем пространство $\tilde{E}_m$, ортопроектор $\tilde{P}_m$ и функции g_m по аналогии с доказательством теоремы 1.1. Решение (2.8) ищется в том же виде, что и решение

задачи Π_1 и при фиксированном m получается конечномерная линейная алгебраическая система уравнений относительно v_{ls} и $\tilde{v}_{ls}$

$$L_m v_m \equiv \tilde{P}_m((k^n v_{mx})_x) - \Delta_y v_m + \tau^{-1} v_{mx} = g_m(x,y). \tag{2.9}$$

Однако, доказательство нуждается в некоторой модификации, поскольку решение (2.9) нужно найти не во всем пространстве соответствующей размерности, а на некотором его подпространстве, так, чтобы были выполнены условия $\int\limits_0^L v_m(x,y) = 0$ для всех $y \in \Omega_y$.

Можно без труда показать, что $\int\limits_0^L g_m(x,y)dx = 0$ для всех $y \in \Omega_y$ и всех $m \in N$.

Теперь введем параметр $\mu \in [0,1]$ и рассмотрим семейство уравнений

$$L_m^{\mu} v_m \equiv \mu \tilde{P}_m((k^n v_{mx})_x) - \Delta_y v_m + \tau^{-1} v_{mx} = g_m(x,y). \tag{2.10}$$

Положим здесь $\mu = 0$. Тогда коэффициенты v_{ls} и $\tilde{v}_{ls}$ находятся явным и единственным образом. Учитывая то, что $\int\limits_0^L g_m(x,y) = 0$ для всех $y \in \Omega_y$ и представляя g_m в виде ее разложения по базисным функциям, можно убедиться в том, что $\int\limits_0^L v_m(x,y)dx = 0$ при $\mu = 0$ для всех $y \in \Omega_y$.

Теперь рассмотрим равенство

$$(L_m^{\mu} v_m, v_{mx})_0 = (g_m, v_{mx})_0.$$

Интегрируя по частям при достаточно малом τ получим равномерную по параметру μ оценку

$$||v_{mx}||_0 \leq C_1 ||g_m||_0. \tag{2.11}$$

Теперь заметим, что в пространстве гладких функций таких, что $\int\limits_0^L z(x,y) = 0$ для всех $y \in \Omega_y$ выражение $(\int\limits_0^L \int\limits_{\Omega_y} z_x^2 dydx)^{1/2}$ есть норма и имеет место оценка $||z||_0 \leq C_2 ||z_x||_0$ с константой не зависящей от z.

Далее, учитывая эквивалентность норм в конечномерных пространствах и теорему о степени отображения, заключаем, что если при $\mu = 0$ система (2.10) однозначно разрешима в соответствующем подпространстве, то и при $\mu = 1$ это свойство сохраняется. Таким образом разрешимость системы (2.9) доказана.

Дальнейшие априорные оценки получаются по схеме доказательства теоремы 1.1. Достаточно лишь нужное количество раз продифференцировать (2.9) по переменной x и проинтегрировать по частям в равенствах

$$(D_x^j L_m v_m, D_x^{j+1} v_m,)_0 = (D_x^j g_m, D_x^{j+1} v_m), \ j = 0,1,2,3.$$

Используя малость параметра τ мы получаем необходимые априорные оценки и решение задачи (2.8), (2.4), (2.5) достаточной гладкости, причем такое, что $\int\limits_0^L v(x,y)dx = 0$ для $y \in \Omega_y$.

Вернемся к системе (2.6), (2.7). Функция $g(x,y)$ фактически есть $f^n(x,y) + \tau^{-1} u_x^{n-1}(x,y)$. Учитывая, что u^n находятся в ходе итерационного процесса (2.6), (2.7), видим, что условия теоремы 2.1 на $f(x,y,t)$ и $u_0(x,y)$ гарантируют при

осуществлении этого процесса существование решения такого,что $D_x^j u^n(x,y) \in W_2^2((0,L)\times\Omega_y), j=0,1,2$ при любом n такого, что $\int\limits_0^L u^n(x,y)=0$ для всех $y\in\Omega_y$.

Перепишем теперь (2.6) в виде

$$l_0 u^n \equiv (k^n u_x^n)_x - \Delta_y u^n + \tau^{-1}u_x^n = f^n + \tau^{-1}u_x^{n-1}$$

и определим для каждого достаточно большого натурального числа N функцию $u_N(x,y,t)$ следующим образом $u_N(x,y,t) = u^n(x,y)$ при $t\in[n\tau,(n+1)\tau)$, где $n=0,\dots,N-1$. Аналогично определим $f_N(x,y,t)$ и $k_N(x,y,t)$. Очевидно, что $\int\limits_0^L u_N(x,y,t)dx = 0$ для всех $(y,t)\in\Omega_y\times(0,T)$ и $\int\limits_0^L f_N(x,y,t)dx = 0$ для всех $(y,t)\in\Omega_y\times(0,T)$.

Теперь необходимо получить равномерные по N оценки семейства функций $\{u_N\}$.

Оценки необходимых производных по переменной x получаются точно так же, как и в [14]. Покажем одну из них.

Рассмотрим следующую сумму интегралов $\sum\limits_{n=1}^N (l_0u^n, \exp(-\lambda^2(n-1)\tau)u_x^n)_0 = \sum\limits_{n=1}^N (f^n+\tau^{-1}u_x^{n-1}, \exp(-\lambda^2(n-1)\tau)u_x^n)_0$, где $\lambda^2>0$ выберем позже.

Интегрирование по частям и неравенство Коши дают

$$\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^N\int\limits_0^L\int\limits_{\Omega_y}\exp(-\lambda^2(n-1)\tau)(u_x^n)^2dydx+$$

$$+\sum_{n=1}^N\int\limits_0^L\int\limits_{\Omega_y}(\frac{k_x-1}{2})\exp(-\lambda^2(n-1)\tau)(u_x^n)^2dydx\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N\int\limits_0^L\int\limits_{\Omega_y}\exp(-\lambda^2(n-1)\tau)(f^n)^2dydx+\frac{\tau^{-1}}{2}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^N\int\limits_0^L\int\limits_{\Omega_y}\exp(-\lambda^2(n-1)\tau)(u_x^{n-1})^2dydx. \qquad (2.12)$$

Перенесем последний интеграл в правой части (2.12) в левую часть со знаком минус и рассмотрим отдельно разность

$$\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^N\int\limits_0^L\int\limits_{\Omega_y}\exp(-\lambda^2(n-1)\tau)(u_x^n)^2dydx-$$

$$-\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^N\int\limits_0^L\int\limits_{\Omega_y}\exp(-\lambda^2(n-1)\tau)(u_x^{n-1})^2dydx.$$

Прибавим и вычтем здесь выражение

$$\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^N\int\limits_0^L\int\limits_{\Omega_y}\exp(-\lambda^2n\tau)(u_x^n)^2dydx$$

и преобразуем полученное к виду

$$I_1 + I_2 = \sum_{n=1}^{N} \int_0^L \int_{\Omega_y} \exp(-\lambda^2(n-1)\tau)(1-\exp(-\lambda^2\tau))\frac{\tau^{-1}}{2}(u_x^n)^2 dydx+$$

$$+\frac{\tau^{-1}}{2}\sum_{n=1}^{N} \int_0^L \int_{\Omega_y} (\exp(-\lambda^2 n\tau)(u_x^n)^2 - \exp(-\lambda^2(n-1)\tau)(u_x^{n-1})^2)dydx.$$

Первую сумму при достаточно малого τ можно оценить снизу

$$I_1 \geq \frac{\lambda^2}{4}\sum_{n=1}^{N} \int_0^L \int_{\Omega_y} \exp(-\lambda^2(n-1)\tau)(u_x^n)^2 dydx,$$

а от второй суммы останутся лишь два слагаемых

$$I_2 = \frac{\tau^{-1}}{2}\int_0^L \int_{\Omega_y} \exp(-\lambda^2 T)(u_{Nx})^2 dydx - \frac{\tau^{-1}}{2}\int_0^L \int_{\Omega_y} u_{0x}^2 dydx.$$

Первое слагаемое можно отбросить, а второе перенести в правую часть со знаком плюс. Теперь подберем $\lambda^2 > 0$ достаточно большим и сравним полученные оценки с неравенством (2.12). Окончательно получим

$$\sum_{n=1}^{N} ||u_x^n||_0^2 \leq C_3 \sum_{n=1}^{N}(||f^n||_0^2 + \tau^{-1}||u_x^n||_0^2).$$

Умножая обе части последнего неравенства на τ и вспоминая построение функций u_N и f_N окончательно получаем

$$||u_{Nx}||_0 \leq C_4, \tag{2.13}$$

где C_4 зависит лишь от f и u_0 и не зависит от N

Получение оценок u_{Nxx} и u_{Nxxx} совершенно аналогично.

Теперь перепишем (2.6) в виде

$$\tilde{l}_0 u^n \equiv \frac{u_x^n - u_x^{n-1}}{\tau} - \Delta_y u^n = -(k^n u_x^n)_x + f^n \equiv h^n.$$

Разлагая каждое из выражений в этом равенстве по системе собственных функций задачи Неймана для уравнения Лапласа в Ω_y и приравнивая соответствующие коэффициенты $u_s^n(x)$ и $h_s^n(x)$ можно записать равенство

$$\frac{u_{sx}^n - u_{sx}^{n-1}}{\tau} + \tilde{\lambda}_s^2 u_s^n = h_s^n. \tag{2.14}$$

Поскольку $\int\limits_0^L u^n(x,y)dx = 0$ для всех $y \in \Omega_y$, то из полноты системы соответствующих собственных функций, теоремы вложения и из теоремы о среднем можно вывести, что для любого $s = 0, 1, \ldots$ существует $x_s \in [0, L]$ такое, что $u_s^n(x_s) = 0$. Умножим левую и правую часть (2.14) на $\tilde{\lambda}_s^2 u_{sx}^n$ и проинтегрируем по x от x_s до L. Поскольку $u^n(x,y)$ достаточно гладкие функции, то все преобразования

законны, и используя тот же приём, что и при получении (2.13), окончательно получаем важные оценки равномерные по N

$$||\Delta_y u_N(L,y,t)||_0 \leq C_5 \tag{2.15}$$

и в силу (2.4)

$$||\Delta_y u_N(0,y,t)||_0 \leq C_6. \tag{2.16}$$

Теперь рассмотрим равенство

$$\sum_{n=1}^{N}(l_0 u^n, -\Delta_y u_x^n \exp(-\alpha x))_0 = \sum_{n=1}^{N}(f^n + \tau^{-1}u_x^{n-1},$$

$$-\Delta_y u_x^n \exp(-\alpha x))_0, \text{ где } \alpha > 0.$$

Интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга, используя оценки производных $D_x^j u_n$, $j = 1,2,3$ и оценки (2.15) и (2.16), окончательно выводим оценку

$$||\Delta_y u_N||_0 \leq C_7, \tag{2.17}$$

Наконец, рассматривая $\tau^{-1}(u_{Nx}(\cdot,t) - u_{Nx}(\cdot,t-\tau))$, из уравнения (2.6) выводим равномерную оценку этого разностного отношения.

Теперь очевидно, что в равенстве (2.6) можно осуществить стандартный предельный переход при $l \to \infty$ на некоторой подпоследовательности $\{N_l\}_{l=1}^{\infty}$.

Полученное решение обладает всеми сформулированными свойствами гладкости и в силу построения удовлетворяет условиям (2.3)–(2.5). Кроме того, ясно, что $\int\limits_0^L u(x,y,t)dx = 0$ для всех $(y,t) \in \Omega_y \times (0,T)$.

Единственность решения вытекает из равенства $(Lu, \exp(-\lambda^2 t)u_x)_0 = 0$ и условия $\int\limits_0^L u(x,y,t)dx = 0$ для всех $(y,t) \in \Omega_y \times (0,T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1983.
2. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л.: Ленингр. ун-т, 1990.
3. *Терехов А. Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. С. 148–158.
4. *Глазатов С. Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, N 6. С. 162–164.
5. *Глазатов С. Н.* Гладкие решения нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа I // Актуальные проблемы современной математики. Новосибирск: НИИ МИОО НГУ, 1997. Т. 3. С. 46–52.
6. *Каратопраклиев Г. Д.* Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, N 1. С. 78–84.
7. *Каратопраклиев Г. Д.* Об одной нелокальной краевой задаче для эллиптико–параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, N 5. С. 902–904.
8. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
9. *Lin C., Reissner E., Tsien H.* On two–dimensional nonsteady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. Phys. 1958. V. 27, N 3. P. 126–140.

10. *Ларькин Н. А.* Гладкие решения уравнений трансзвуковой газодинамики. Новосибирск: Наука, 1991.
11. *Ларькин Н. А.* К теории неравновесных трансзвуковых течений в неограниченных областях // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, N 6. С. 1337–1340.
12. *Мамонтов Е. В.* Оценки решений уравнения малых возмущений в околозвуковом потоке газа // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1983. Вып. 59. С. 116–129.
13. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1990.
14. *Глазатов С. Н.* Задача с данными на характеристике для линеаризованного уравнения трансзвуковой газовой динамики // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, N 5. С. 1019–1029.

Глазатов Сергей Николаевич
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
glaz@math.nsc.ru