УДК 517.988

О СПЕКТРЕ КВАЗИРЕГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И ЕЕ СОПРЯЖЕННОЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

М. А. Бименов, Т. Ш. Кальменов

Пусть $\Omega \subset R^{n+1}$ — конечная область, ограниченная при $t > 0$ поверхностью Ляпунова σ, а при $t < 0$ характеристическим конусом $S = \{1 + t = |x|,\ |x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2, |x| < 1\}$ уравнения Лаврентьева–Бицадзе [1, 2]

$$Lu \equiv -u_{tt} - \operatorname{sgn} t \,\triangle_x u = f(x,t), \tag{1}$$

где $\triangle_x u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа.

Квазирегулярная задача Дирихле (задача КД). *Найти решение уравнения* (1) *в* Ω, *удовлетворяющее условию*

$$u\,|_{\sigma \cup S} = 0. \tag{2}$$

Обозначим $S_0 = \{t = 0,\ |x| < 1\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{t < 0\}$ и будем предполагать, что поверхность $\sigma \cup S_0$ является гладкой поверхностью Ляпунова.

Задача ДК. *Найти решение уравнения* (1) *в* Ω, *удовлетворяющее условию*

$$u\,|_{\sigma \cup S_0} = 0.$$

В силу переопределенности условия (2) задача КД не для всех $f \in L_2(\Omega)$ регулярно разрешима.

Решение задачи КД ищется следующим образом: в области Ω_2 решаем задачу Гурса и, вычислив след решения на S_0, в области Ω_1 решаем задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

Решение задачи ДК строится наоборот, т.е. в области Ω_1 решается задача Дирихле для уравнения Лапласа и по следу производной по t этого решения на S_0 решение задачи ДК в области Ω_2 сводится к решению задачи Коши для гиперболического уравнения.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega}_2)$, $0 < \alpha < 1$, $k \geq [\frac{n}{2}] + 1$, $D^{\beta} f\,|_S = 0$, $|\beta| \leq k + 1 + \alpha$. *Тогда существует единственное сильное решение* $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_1) \cap C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_2) \cap C(\overline{\Omega})$ *задачи КД, удовлетворяющее неравенству*

$$||u||_{W_2^1(\Omega)} \leq C||Lu||_0.$$

Теорема 2. *Пусть* $f(x,t) \in C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega}_2)$, $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega_1 \in C^{k+\alpha+1}$, $k \geq [\frac{n}{2}] + 1$. *Тогда существует единственное сильное решение* $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *задачи ДК, удовлетворяющее неравенству*

$$||u||_{W_2^1(\Omega)} \leq C||f||_0.$$

Пусть $L_{KD}(L_{DK})$ — замыкание в $L_2(\Omega)$ дифференциального выражения (1) на подмножестве функций $u \in C^2(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2) \cap C(\overline{\Omega})$, $u\mid_{\sigma\cup S}= 0$ ($u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u\mid_{\sigma\cup S_0}= 0$). Согласно теоремам 1 и 2 операторы L_{KD}, L_{DK} ограниченно обратимы на всем $L_2(\Omega)$ и обратные операторы L^{-1}_{KD}, L^{-1}_{DK} вполне непрерывны, их нормы удовлетворяют неравенствам

$$||L^{-1}_{KD}||_{L_2(\Omega)\to W^1_2(\Omega)} \le C, \quad ||L^{-1}_{DK}||_{L_2(\Omega)\to W^1_2(\Omega)} \le C.$$

Рассмотрим спектральные вопросы операторов L_{KD} и L_{DK}. Имеет место

Теорема 3. *Собственные векторы операторов L_{KD} и L_{DK} (задачи КД и ДК), соответствующие положительным собственным значениям, совпадают в области Ω_1 и образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega_1)$. При этом собственные векторы оператора L_{KD} тождественно равны нулю в Ω_2.*

Доказательство. Так как оператор Гурса является вольтерровым, то он имеет только нулевой собственный вектор. Следовательно, собственные векторы оператора L_{KD} в Ω_2 тождественно равны нулю. В области Ω_1 собственные векторы операторов L_{KD} и L_{DK} совпадают с собственными векторами задачи Дирихле для уравнений Лапласа, поэтому образуют полную ортонормированную систему векторов. Очевидно, что собственные значения задачи Дирихле положительные.

Теорема 4 доказана.

Для дальнейшего исследования свойств собственных векторов оператора L_{DK} (задача ДК) будем предполагать, что область Ω_1 совпадает с параллелепипедом $\prod_b^+ = \{0 < t < b, -1 \le x_i < 1, i = 1, ..., n\}$. Собственные векторы оператора L_{DK} в области $\prod_b^+$ задаются формулой

$$u_m(x,t) = \sin\frac{m_0\pi}{b}t\,\cos(\frac{\pi}{2} + m_1\pi)x_1 \dots \cos(\frac{\pi}{2} + m_n\pi)x_n,$$

$$m_0 = 1, 2, \dots, \quad m_k = 0, \pm1, \pm2, \dots,$$

а собственные значения имеют вид

$$\lambda_m = \left(\frac{m_0}{b}\right)^2\pi^2 + \sum_{i=1}^{n}(0.5 + m_i)^2\pi^2.$$

Тогда спектральная задача ДК в области Ω_2 сводится к следующей спектральной задаче

$$Lu_m = -u_{mtt} + \triangle_x u_m = \lambda_m u_m, \tag{3}$$

$$u_m\mid_{t=0}= 0, \quad u_{mt}\mid_{t=0}= \frac{m_0\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi}{2} + m_1\pi\right)x \dots \cos\left(\frac{\pi}{2} + mn_1\pi\right)x \tag{4}$$

Из-за сложности решения задачи (3), (4), как и выше, вместо спектральной задачи (3), (4) в $\prod^-$ рассмотрим следующую задачу со спектральным параметром

$$Lu_m = -u_{mtt} + \triangle_x u_m = \lambda_m u_m, \tag{3'}$$

$$u_m\mid_{t=0}= 0, \; u_{mt}\mid_{t=0}= \frac{m_0\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi}{2}+m_1\pi\right)x \dots \cos\left(\frac{\pi}{2}+mn_1\pi\right)x, \; u\mid_{S_{\Pi^-}} = 0. \tag{4'}$$

Методом разделения переменных убеждаемся, что решение задачи (3′)–(4′) в

$\prod^-$ представимо в виде

$$u_m(x,t) = u_{m_0}(t)u_m(x) =$$

$$= \frac{\pi m_0}{b} \frac{\sin\sqrt{(\frac{m_0}{b})^2\pi^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}(0.5+m_i)^2\pi^2 t}}{\sqrt{(\frac{m_0}{b})^2\pi^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}(0.5+m_i)^2\pi^2}} \prod_{i=1}^{n}\cos(0.5+m_i)\pi x, \tag{5}$$

$m_i = 0, \pm 1, \ldots$

Как и в работе [3] при $b > 1$ и при любом фиксированном m_i доказывается полнота функций $\sin\sqrt{(\frac{m_0}{b})^2\pi^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}(0.5+m_i)^2\pi^2 t}$. Поэтому система собственных функций, определенных равенствами (5), полна в $L_2(\prod^-)$ и тем более в $L_2(\Omega_2)$.

Пользуясь ортонормированностью системы собственных функций $u_m(x,t)$ в $L_2(\Omega_1)$, как и в работе [4], можно установить неполноту $\{u_m(x,t)\}$ в $L_2(\Omega)$. Тем самым доказана

Теорема 5. *Пусть* $\Omega_1 = \prod_b^+ = \{0 < t < b,\ -1 < x_i < 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, $b > 1$. *Тогда система собственных функций* $\{u_m\}$ *оператора* L_{DK} *полна в* $L_2(\Omega_1)$ *и в* $L_2(\Omega_2)$ *и не полна в* $L_2(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В.* К проблемам уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950 Т. 70, N 3.
2. *Бицадзе А. В.* Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, N 5.
3. *Бименов М. А., Джаманкараева М. А., Кальменов Т. Ш.* Спектральные вопросы квазирегулярной задачи Дирихле и ее сопряженной для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Мат. журнал. Алматы. 2001. Т. 1, N 2. С. 32–41.
4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

Бименов Мырзагали Аязович, Кальменов Тынысбек Шарипович
Казахстан, Шымкент, Южно-Казахстанский государственный университет
bimenov@mail.ru