УДК 517.956.3

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. А. Керефов

Пусть Ω — конечная область плоскости независимых переменных x и t, $\Omega = \{(x,t): 0 < x < l,\, 0 < t < T\}$. В области Ω для неоднородного уравнения Фурье

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) \tag{1}$$

рассмотрим следующую **нелокальную задачу**:

Найти регулярное в Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) u(x,t_i) + u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T,$$

$$u(0,t) = \varphi_0(t), \quad u(l,t) = \varphi_l(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где заданные функции $\alpha_i(x)$, $u_0(x) \in C[0,l]$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t) \in C[0,T]$, причем

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(0) \cdot \varphi_0(t_i) + u_0(0) = \varphi_0(0), \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(l) \cdot \varphi_l(t_i) + u_0(l) = \varphi_l(0). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Задача (1)–(3) примыкает к нелокальным задачам, предложенным в 1979 г. А. М. Нахушевым. Условия (3.1), как вытекает из (2) и (3), будут представлять собой необходимые условия разрешимости задачи (1)–(3).

Пусть $G(x,t;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(t-\eta)^{-1/2} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[\frac{(x-\xi+2ln)^2}{4(\eta-t)} - \frac{(x+\xi+2ln)^2}{4(\eta-t)} \right] \right\}$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1), которая является функцией, бесконечно дифференцируемой по своим аргументам, и обращается в нуль со всеми своими производными при $t = \eta$, $x \ne \xi$ [1, 2].

С учетом свойств функции $G(x,t;\xi,\eta)$ решение первой краевой задачи в случае однородных граничных условий $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ для уравнения (1) допускает интегральное представление вида

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,t;\xi,0) u(\xi,0)\, d\xi + \int_0^l \int_0^t f(\xi,\eta) G(x,t;\xi,\eta)\, d\xi d\eta. \tag{4}$$

Полагая в (4) последовательно $t = t_1, t_2, \ldots, t_n = T$, получим

$$u(x,t_1) = \int\limits_0^l G(x,t_1;\xi,0)u(\xi,0)\,d\xi + \int\limits_0^l \int\limits_0^{t_1} f(\xi,\eta)G(x,t_1;\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

$$u(x,t_2) = \int\limits_0^l G(x,t_2;\xi,0)u(\xi,0)\,d\xi + \int\limits_0^l \int\limits_0^{t_2} f(\xi,\eta)G(x,t_2;\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u(x,T) = \int\limits_0^l G(x,T;\xi,0)u(\xi,0)\,d\xi + \int\limits_0^l \int\limits_0^{T} f(\xi,\eta)G(x,T;\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Умножим каждое равенство соответственно на $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$,...,$\alpha_n(x)$ и сложим почленно полученные при этом выражения. В результате с учетом нелокального условия (2) получаем, что функция $u(x,0)$ должна удовлетворять уравнению

$$u(x,0) - \int\limits_0^l K(x,\xi)u(\xi,0)\,d\xi = u_0(x) + F(x), \tag{5}$$

с $K(x,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x)G(x,t_i;\xi,0)$, $F(x) = \int\limits_0^l \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_0^{t_i} \alpha_i(x)f(\xi,\eta)G(x,t_i;\xi,\eta)d\eta\right]d\xi$.

Уравнение (5) — интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно следа $u(x,0)$ решения, ядро которого $K(x,\xi)$ является функцией класса $C([0,l]\times[0,l])$, а правая часть $u_0(x) + F(x) \equiv f(x) \in C[0,l]$.

Пусть $K_1(x,\xi)$, $K_2(x,\xi)$,...,$K_n(x,\xi)$ — итерированные ядра $K(x,\xi)$, причем

$$K_1(x,\xi) = K(x,\xi), \quad K_i(x,\xi) = \int\limits_0^l K(x,s)K_{i-1}(s,\xi)ds, \quad i = 2,3,\ldots,$$

$$K_{n+p}(x,\xi) = \int\limits_0^l K_n(x,s)K_p(s,\xi)ds,$$

тогда ряд

$$-k(x,\xi) = K_1(x,\xi) + K_2(x,\xi) + \ldots + K_n(x,\xi) + \ldots \tag{6}$$

в силу свойств ядра $K(x,\xi)$ при $M \cdot l < 1$, где $M = \max\limits_{[0,l]\times[0,l]} |K(x,\xi)|$, сходится абсолютно и равномерно и, следовательно, [3] $k(x,\xi) \in C([0,l]\times[0,l])$.

Из (6) имеем

$$-k(x,\xi) - K(x,\xi) = \int\limits_0^l K_1(x,s)K_1(s,\xi)ds +$$

$$+ \int\limits_0^l K_1(x,s)K_2(s,\xi)ds + \ldots + \int\limits_0^l K_1(x,s)K_{n-1}(s,\xi)ds + \ldots =$$

$$= \int\limits_0^l K_1(x,s)[K_1(s,\xi) + K_2(s,\xi) + \ldots + K_{n-1}(s,\xi) + \ldots]ds = -\int\limits_0^l K_1(x,s)k(s,\xi)\,ds,$$

таким образом, справедливо равенство

$$k(x,\xi)+K(x,\xi)=\int\limits_0^l k(s,\xi)K(x,s)\,ds. \tag{7}$$

Определение. Два ядра $k(x,\xi)$ и $K(x,\xi)$ называются *взаимными* [4], если они оба непрерывны в $[0,l]\times[0,l]$ и удовлетворяют условию (7).

Из (5) следует, что

$$u(\xi,0)=u_0(\xi)+F(\xi)+\int\limits_0^l K(\xi,\xi_1)u(\xi_1,0)\,d\xi_1.$$

Обе части последнего выражения умножим на $k(x,\xi)$, тогда

$$k(x,\xi)u(\xi,0)=k(x,\xi)u_0(\xi)+k(x,\xi)F(\xi)+k(x,\xi)\int\limits_0^l K(\xi,\xi_1)u(\xi_1,0)\,d\xi_1.$$

Полученное равенство проинтегрируем по переменной ξ в пределах от 0 до l, в результате

$$\int\limits_0^l k(x,\xi)u(\xi,0)\,d\xi=\int\limits_0^l k(x,\xi)u_0(\xi)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_0^l k(x,\xi)F(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^l k(x,\xi)\,d\xi\int\limits_0^l K(\xi,\xi_1)u(\xi_1,0)\,d\xi_1,$$

и, переставив порядок интегрирования, окончательно получаем

$$\int\limits_0^l k(x,\xi)u(\xi,0)d\xi=\int\limits_0^l k(x,\xi)[u_0(\xi)+F(\xi)]d\xi+\int\limits_0^l u(\xi_1,0)d\xi_1\int\limits_0^l k(x,\xi)K(\xi,\xi_1)d\xi.$$

Так как в силу (7) справедливо

$$\int\limits_0^l k(x,\xi)K(\xi,\xi_1)\,d\xi=k(x,\xi_1)+K(x,\xi_1),$$

то, следовательно, имеет место равенство

$$\int\limits_0^l u(\xi_1,0)d\xi_1\int\limits_0^l k(x,\xi)K(\xi,\xi_1)d\xi=\int\limits_0^l u(\xi_1,0)k(x,\xi_1)d\xi_1+\int\limits_0^l u(\xi_1,0)K(x,\xi_1)d\xi_1$$

и в результате

$$\int\limits_0^l u_0(\xi)k(x,\xi)\,d\xi+\int\limits_0^l k(x,\xi)F(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^l u(\xi,0)K(x,\xi)\,d\xi=0.$$

С учетом последнего выражения из уравнения (5) вытекает справедливость равенства

$$u(x,0) = u_0(x) + F(x) - \int_0^l k(x,\xi)[u_0(\xi) + F(\xi)]\,d\xi. \tag{8}$$

Из (8) заключаем, что если уравнение (5) имеет непрерывное решение, то оно является единственным и дается равенством (8).

В области Ω для параболического уравнения

$$u_{xx} + c(x,t)u - u_t = 0 \tag{9}$$

рассмотрим **задачу с локальным смещением** [2, 4, 5]:

Найти регулярное в Ω *решение* $u(x,t)$ *уравнения* (9), *непрерывное в* $\overline{\Omega}$ *и удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l \tag{10}$$

и краевым условиям

$$u_x(0,t) = 0, \quad u(0,t) = \alpha(t)u(l,t), \tag{11}$$

где $c(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $u_0(x) \in C[0,l]$, $\alpha(t) \in C[0,T]$, *причем* $\alpha(t) \ne 0$, $u_0(0) = \alpha(0)u_0(l)$.

Задача (9)–(11) при $c(x,t) = const$, $\alpha(t) \equiv 1$ была изучена А. М. Нахушевым [2].

Известно [2, 6], что функция Грина смешанной краевой задачи $u_x(0,t) = \varphi_0(t)$, $u(l,t) = \varphi_l(t)$ для уравнения теплопроводности имеет вид

$$G(x,t;\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(t-\eta)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(\eta-t)} + \exp\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(\eta-t)} - \right.$$

$$\left. - \exp\frac{(x-\xi-2l+2n)^2}{4(\eta-t)} - \exp\frac{(x+\xi-2l+2n)^2}{4(\eta-t)} \right], \ \eta < t.$$

Используя свойства функции $G(x,t;\xi,\eta)$, убеждаемся, что решение $u(x,t)$ задачи $u_x(0,t) = 0$, $u(l,t) = \varphi_l(t)$ для уравнения (9) удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x,t) = \overline{u}_0(x,t) + \int_0^l \int_0^t c(\xi,\eta)G(x,t;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{12}$$

где

$$\overline{u}_0(x,t) = \int_0^l G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi + \int_0^t G_\xi(x,t;l,\eta)u(l,\eta)\,d\eta.$$

Пусть $R(x,t;\xi,\eta)$ — резольвента ядра $c(\xi,\eta)G(x,t;\xi,\eta)$ интегрального уравнения (12), тогда решение $u(x,t)$ уравнения (12) имеет вид [7]

$$u(x,t) = \overline{u}_0(x,t) + \int_0^t d\eta \int_0^l R(x,t;\xi,\eta)\overline{u}_0(\xi,\eta)\,d\xi,$$

откуда с учетом значения $\overline{u}_0(x,t)$ имеем, что

$$u(x,t)=\int\limits_0^t G_\xi(x,t;l,\eta)u(l,\eta)\,d\eta+\int\limits_0^l G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_0^t d\eta\int\limits_0^l R(x,t;\xi,\eta)\,d\xi\int\limits_0^\eta G_\xi(\xi,\eta;l,\eta_1)u(l,\eta_1)\,d\eta_1+$$
$$+\int\limits_0^t d\eta\int\limits_0^l R(x,t;\xi,\eta)\,d\xi\int\limits_0^l G(\xi,\eta;\xi_1,0)u_0(\xi_1)\,d\xi_1, \tag{13}$$

так как

$$\int\limits_0^t d\eta\int\limits_0^l R(x,t;\xi,\eta)\,d\xi\int\limits_0^\eta G_\xi(\xi,\eta;l,\eta_1)u(l,\eta_1)\,d\eta_1=$$
$$=\int\limits_0^t u(l,\eta)d\eta\int\limits_\eta^t d\eta_1\int\limits_0^l R(x,t;\xi,\eta_1)G_\xi(\xi,\eta_1;l,\eta)\,d\xi.$$

Пусть

$$N(x,t;\eta)=G_\xi(x,t;l,\eta)+\int\limits_\eta^t d\eta_1\int\limits_0^l R(x,t;\xi,\eta_1)G_\xi(\xi,\eta_1;l,\eta)\,d\xi,$$
$$F(x,t)=\int\limits_0^l G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)d\xi+\int\limits_0^t d\eta\int\limits_0^l R(x,t;\xi,\eta)d\xi\int\limits_0^l G(\xi,\eta;\xi_1,0)d\xi_1,$$

тогда с учетом (13) в итоге получаем для $u(x,t)$ справедливость представления

$$u(x,t)=\int\limits_0^t N(x,t;\eta)u(l,\eta)\,d\eta+F(x,t). \tag{14}$$

Из представления (14), переходя к пределу при $x\to+0$ и учитывая условие локального смещения, для определения функции $u(l,t)$ приходим к уравнению

$$\alpha(t)u(l,t)=\int\limits_0^t N(0,t;\eta)u(l,\eta)\,d\eta+F(0,t). \tag{15}$$

Уравнение (15) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет, и притом единственное, решение $u(l,t)$, и поэтому единственное решение задачи (9)–(11) задается формулой (13).

Для однородного уравнения (1) ($f(x,t)=0$) в области Ω исследуем **нелокальную задачу Стеклова** [4]:

Найти регулярное в Ω решение $u(x,t)$ однородного уравнения из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega\cup x=0\cup x=l)$ и удовлетворяющее нелокальным краевым условиям

$$\begin{aligned}&u_x(0,t)-u(0,t)=u_x(l,t),\\&u_x(l,t)+u(l,t)=u_x(0,t)\end{aligned} \tag{16}$$

и начальному условию (10).

Согласно методу Фурье частные решения уравнения $u_{xx} - u_t = 0$ будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t),$$

в результате получаем уравнение

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad \lambda = const > 0 \tag{17}$$

и задачу о собственных значениях для уравнения $X'' + \lambda X = 0$

$$X'(0) - X(0) = X'(l), \quad X'(l) + X(l) = X'(0). \tag{18}$$

Общее решение уравнения $X'' + \lambda X = 0$ имеет, как хорошо известно, вид

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x. \tag{19}$$

Удовлетворив (19) нелокальным краевым условиям из (18), для определения постоянных A и B получим однородную систему

$$\left.\begin{array}{l} A(1 - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l) + B(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}) = 0, \\ A(\cos\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l) + B(\sqrt{\lambda} + \sin\sqrt{\lambda}l - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Основной определитель этой системы равен

$$\Delta = \sin\sqrt{\lambda}l.$$

Система (20) имеет нетривиальное решение при $\Delta = \sin\sqrt{\lambda}l = 0$, тогда $\sqrt{\lambda}l = \pi k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Следовательно, значения $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ — система собственных значений задачи (18).

При k — четных из системы (20) нетрудно получить, что $A = 0$, B — произвольная постоянная, тогда при k — четном каждому собственному значению $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ будет соответствовать собственная функция

$$X_k(x) = B\sin\frac{\pi k}{l}x.$$

Используя условие нормировки, находим, что $B = \sqrt{2/l}$, в результате при k — четном система собственных функций задачи (18), соответствующих собственным значениям $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, будет иметь вид

$$X_k(x) = \sqrt{2/l}\sin\frac{\pi k}{l}x,$$

и, как нетрудно проверить, эта система собственных функций будет ортогональной системой на $(0, l)$ с весом $r(x) \equiv 1$.

При k — нечетных из системы (20) находим, что $B = const \neq 0$, $A = \frac{2\pi k}{l}B$ и в результате собственным значениям $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$ соответствует система собственных функций

$$X_k(x) = B\left(\frac{2\pi k}{l}\cos\frac{\pi k}{l}x + \sin\frac{\pi k}{l}x\right),$$

а в силу условия нормировки получаем, что

$$B = \sqrt{\frac{2l}{4\pi^2k^2 + l^2}},$$

и, следовательно, окончательно при k — нечетных система собственных функций задачи (18) имеет вид

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2l}{4\pi^2 k^2 + l^2}} \left[\frac{2\pi k}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x + \sin \frac{\pi k}{l} x \right],$$

которая на множестве $x \in (0, l)$ будет являться ортогональной системой.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (17) имеет вид:

$$T_k(t) = a_k \exp \left[-\left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 t \right],$$

где a_k — постоянные величины.

Таким образом, найдены частные решения уравнения $u_{xx} = u_t$, которые при k — четных имеют вид

$$u_k(x) = a_k \sqrt{2/l} \, \exp \left[-\left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{\pi k}{l} x$$

и удовлетворяют граничным условиям (16) при любых a_k, и при k — нечетных частные решения уравнения имеют вид

$$u_k(x) = a_k \sqrt{\frac{2l}{4\pi^2 k^2 + l^2}} \exp \left[-\left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 t \right] \left(\frac{2\pi k}{l} \cos \frac{\pi k}{l} x + \sin \frac{\pi k}{l} x \right),$$

и они также удовлетворяют граничным нелокальным условиям (16).

В случае однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), рассмотрим **задачу Стеклова второго класса** (задачу с локальным смещением по терминологии А. М. Нахушева [2]):

Найти регулярное в Ω *решение* $u(x,t)$ *из класса* $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup x = 0 \cup x = l)$, *удовлетворяющее нелокальным условиям*

$$\begin{aligned} &u_x(l,t) = u_x(0,t) + u(0,t), \\ &u(l,t) = u(0,t), \quad 0 \le t \le T \end{aligned} \tag{21}$$

и начальному условию (10).

Нетрудно получить, что задача (10), (21) для уравнения (1) при $f(x,t) = 0$ имеет два семейства положительных собственных значений. Первое семейство определяется как решение уравнения

$$\sin \frac{l}{2} \sqrt{\lambda} = 0, \quad \lambda_k = \left(\frac{2\pi}{l} k \right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{22}$$

а второе семейство — как нули трансцендентного уравнения

$$2\sqrt{\lambda} + \operatorname{ctg} \frac{l}{2} \sqrt{\lambda} = 0. \tag{23}$$

В результате поставленная задача будет иметь и два семейства ортогональных нормированных собственных функций, соответствующих собственным значениям, определяемым как из (22), так и из (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Наука, 1981.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
3. *Ловитт У. В.* Линейные интегральные уравнения. М.: ГИТТЛ, 1957.
4. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.
5. *Лажетич Н. А.* О существовании классического решения смешанной задачи для однородного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, N 5. С. 682–694.
6. *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950.
7. *Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986.

Керефов Анатолий Анатольевич
Россия, Нальчик, Кабардино–Балкарский госуниверситет им. Х. М. Бербекова
`kerefovaa@rambler.ru`