УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

А. А. Килбас, О. А. Репин, М. Сайго

1. Введение

Хорошо известно широкое использование классических дробных интегралов и производных Римана–Лиувилля при решении дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов (см., например, [1, § 40–41; 2–4]). В последние годы появился ряд работ [5–10], посвященных исследованию краевых задач для вырождающихся уравнений гиперболического типа, краевые условия которых содержат операторы обобщенного дробного интегрирования и дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре, введенные одним из авторов в [11].

Настоящая работа продолжает эти исследования. Мы рассматриваем вырождающееся гиперболическое уравнение

$$y^2U_{xx} - U_{yy} + U_x = 0 \tag{1}$$

в конечной области D, ограниченной интервалом $(0,1)$ и характеристиками

$$AC = \{(x,y) : x - \frac{y^2}{2} = 0 \ y \leq 0\}, \quad BC = \{(x,y) : x + \frac{y^2}{2} = 1, \ y \leq 0\}$$

уравнения (1). Для уравнения (1) мы изучаем краевую задачу, в которой одно краевое условие задается при $y = 0$, а второе содержит линейную комбинацию классической и обобщенной дробных производных, взятых соответственно в точках $\Theta_0(x) = (x/2, -\sqrt{x})$ и $\Theta_1(x) = ([x+1]/2, -\sqrt{1-x})$ пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x \in (0,1)$, с характеристиками AC и BC. В предположении, что входящие в краевые условия функции удовлетворяют условию Гельдера, мы сводим поставленную задачу к особому интегральному уравнению с ядром Коши. На основании этого мы доказываем теорему существования единственного решения рассматриваемой задачи в весовом классе гельдеровских функций и строим ее решение в замкнутой форме.

В п. 2 мы даем постановку задачи и приводим некоторые свойства операторов классического и обобщенного дробного интегрирования и дифференцирования. П. 3 посвящен сведению поставленной краевой задачи к особому интегральному уравнению с ядром Коши. В п. 4 дано решение особого интегрального уравнения и на основании этого доказана теорема существования единственного решения данной задачи в весовом пространстве гельдеровских функций и построено ее явное решение.

2. Постановка задачи и операторы дробного интегро–дифференцирования

Для постановки задачи мы предварительно напомним некоторые обозначения. Для действительных α $(\alpha \neq 0)$, β, $\eta \in \mathbf{R}$ обобщенные дробные интегралы и производные $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi$ и $I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi$ с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;z)$ определяются для $x \in (0,1)$ следующим образом [1, § 18.2, п. 18.6; 11]

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\right)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{t}{x}\right)\varphi(t)dt \quad (\alpha>0), \tag{2}$$

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}\varphi)(x) \quad (\alpha<0,\ n=[-\alpha]+1), \tag{3}$$

$$\left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\right)(x) = \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^1 (t-x)^{\alpha-1}F\left(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;\frac{t-x}{1-x}\right)\varphi(t)dt \quad (\alpha>0), \tag{4}$$

$$\left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi\right)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{1-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}\varphi)(x) \quad (\alpha<0,\ n=[-\alpha]+1). \tag{5}$$

Если $\beta=-\alpha$, то операторы (2)–(5) сводятся к дробным интегралам и производным Римана–Лиувилля [1]

$$\left(I_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = (I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (0<x<1;\ \alpha>0), \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\left(D_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = (I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta}\varphi)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha}\varphi)(x)\\ (0<x<1;\ \alpha>0,\ n=[\alpha]+1),\end{gathered} \tag{7}$$

$$\left(I_{1-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = (I_{1-}^{\alpha,-\alpha,\eta}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^1 \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (0<x<1;\ \alpha>0),$$

$$\begin{gathered}\left(D_{1-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = (I_{1-}^{-\alpha,\alpha,\eta}\varphi)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{1-}^{n-\alpha}\varphi)(x)\\ (0<x<1;\ \alpha>0,\ n=[-\alpha]+1).\end{gathered}$$

Мы обозначим через $H^{\lambda}[0,1](0<\lambda<1)$ класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера порядка λ на отрезке $[0,1]$, а через $H_0^{\lambda}[0,1]$ — подкласс $H^{\lambda}[0,1]$

$$H_0^{\lambda}[0,1] = \{\varphi(x)\in H^{\lambda}[0,1],\ \varphi(0)=\varphi(1)=0\}.$$

Для неотрицательной функции $\rho(x)$, заданной на $[0,1]$, $H_0^{\lambda}(\rho;[0,1])$ означает весовой гельдеровский класс функций $\varphi(x)$, таких, что $\rho(x)\varphi(x)\in H_0^{\lambda}[0,1]$.

Для уравнения (1) мы изучаем следующую задачу

Задача. *Найти функцию $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области D и краевым условиям*

$$U(x,0)=\tau(x)\ (x\in[0,1]), \tag{8}$$

$$A(D_{0+}^{\alpha}U[\Theta_0(t)])(x) + B(I_{1-}^{-\alpha-\frac{1}{2},\beta,\alpha-\frac{1}{2}}U[\Theta_1(t)])(x) = g(x) \quad (x\in(0,1)), \tag{9}$$

где $0<\alpha<1/2$ и $\beta\le 0$.

Здесь $\tau(x)$ и $g(x)$ — известные функции, такие, что

$$\tau(x)\in H_0^{\lambda_1}(\rho;[0,1])\cap C^2(0,1),\quad \rho(x)=x^{-\alpha+1/2},\quad \frac{1}{2}<\lambda_1<1, \tag{10}$$

$$g(x)\in H^{\lambda_2}[0,1]\cap C^2(0,1),\quad -\alpha+\frac{1}{2}<\lambda_2\le 1, \tag{11}$$

A и B — действительные постоянные.

Будем искать решение задачи (1), (12), (13) в классе таких функций $U(x,y)$, что

$$\lim_{y\to 0-0} U_y(x,y)=\nu(x)\in H_0^\lambda\left(\rho;[0,1]\right),\quad \rho(x)=x^{-\alpha+1/2},\quad \tfrac{1}{2}-\alpha<\lambda<\tfrac{1}{2}. \tag{12}$$

Для решения поставленной задачи нам потребуются следующие свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования:

$$D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f = I_{0+}^{\beta-\alpha} f \quad (0<\alpha<\beta), \tag{13}$$

$$D_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\beta} f = D_{0+}^{\alpha+\beta} f \quad (\alpha>0,\ \beta>0), \tag{14}$$

$$\left(I_{0+}^{\alpha}\right)^{-1} = I_{0+}^{-\alpha} f \equiv D_{0+}^{\alpha} f \quad (\alpha>0), \tag{15}$$

$$I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} I_{1-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f = I_{1-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f \quad (\alpha,\ \gamma,\ \beta,\ \eta,\ \delta\in\mathbf{R}). \tag{16}$$

В дальнейшем нам потребуются некоторые утверждения из [1] и [12].
Для удобства чтения приведем их формулировки.

Лемма 1. *Пусть* $0<\alpha<1$, $0<\lambda<1$, $\lambda+\alpha<1$ *и* $\rho(x)=x^\mu$, *где* $0\le\mu<\lambda+1$. *Если* $\varphi(x)\in H_0^\lambda(\rho;[0,1])$, *то* $(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho;[0,1])$.

Лемма 2. *Пусть* $0<\alpha<\lambda<1$, $\lambda-\alpha<1$ *и* $\rho(x)=x^\mu$, *где* $0\le\mu<\lambda-\alpha+1$. *Если* $\varphi(x)\in H_0^\lambda(\rho;[0,1])$, *то* $(D_{0+}^\alpha\varphi)(x)\in H_0^{\lambda-\alpha}(\rho;[0,1])$.

Лемма 3. *Пусть* $0<-\alpha<\lambda\le 1$ *и* $\eta>\beta-1$. *Если* $\varphi(x)\in H^\lambda[0,1]$, *то* $x^\beta(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x)$, $(1-x)^\beta(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x)\in H^{\lambda+\alpha}[0,1]$.

Лемма 4. *Пусть* $0<-\alpha<\lambda\le 1$ *и* $\beta<\min[0,\eta+1]$. *Если* $\varphi(x)\in H^\lambda[0,1]$, *то* $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x)$, $(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x)\in H^{\min[\lambda+\alpha,-\beta]}[0,1]$.

3. Сведение к сингулярному интегральному уравнению

Известно [13], что решение задачи Коши

$$U(x,0)=\tau(x)(x\in[0,1]),\quad \lim_{y\to 0-0} U_y(x,y)=\nu(x)(x\in(0,1))$$

для уравнения (1) в области $\overline{D}$ имеет вид

$$U(x,y)=\tau(x+\frac{y^2}{2})+\frac{y}{2}\int\limits_0^1 \nu\left(x+\frac{y^2}{2}[1-2s]\right)s^{-\frac{1}{2}}ds. \tag{17}$$

Используя (17), имеем

$$U[\Theta_0(t)]=\tau(t)-\frac{\sqrt{t}}{2}\int\limits_0^1 \nu[t(1-s)]s^{-\frac{1}{2}}ds=\tau(t)-\Gamma(\frac{3}{2})(I_{0+}^{\frac{1}{2}}\nu)(t), \tag{18}$$

$$U[\Theta_1(t)]=\tau(1)-\frac{\sqrt{1-t}}{2}\int\limits_0^1 \nu[1-(1-t)s]s^{-\frac{1}{2}}ds=-\frac{1}{2}(I_{1-}^{1,-\frac{1}{2},-1}\nu)(t). \tag{19}$$

Согласно (13) и (16) имеем

$$\left(D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{1/2}\nu\right)(x)=\left(I_{0+}^{-\alpha+1/2}\nu\right)(x)\quad \left(0<\alpha<\tfrac{1}{2}\right), \tag{20}$$

$$\left(I_{1-}^{-\alpha-1/2,\beta,\alpha-1/2} I_{1-}^{1,-1/2,-1}\nu\right)(x) = \left(I_{1-}^{-\alpha+1/2,\beta-1/2,\alpha-1/2}\nu\right)(x) \qquad (21)$$
$$\left(0<\alpha<\tfrac{1}{2},\ \beta\le 0\right).$$

Формулы (24) и (25) справедливы для $\nu(x) \in H_0^{\lambda}(\rho;[0,1])$ с $0<\lambda<1/2$ и $\rho(x)=x^{-\alpha+\frac{1}{2}}$, и дробные интегралы $(I_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}}\nu)(x)$ и $(I_{1-}^{-\alpha+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}}\nu)(x)$ являются также гельдеровскими функциями. Действительно, если $\nu(x)\in H_0^{\lambda}(\rho;[0,1])$, то согласно леммам 1 и 2 при $0<\lambda<1/2$ и $0<\alpha<1/2$

$$\left(I_{0+}^{1/2}\nu\right)(x)\in H_0^{\lambda+1/2}(\rho;[0,1])\,, \quad \left(D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{1/2}\nu\right)(x)\in H_0^{\lambda-\alpha+1/2}(\rho;[0,1])\,.$$

Следовательно,

$$\left(I_{0+}^{-\alpha+1/2}\nu\right)(x)\in H_0^{\lambda-\alpha+1/2}(\rho;[0,1]) \qquad (22)$$

и (24) верно. Далее, вводя обозначение

$$\nu_1(x) = (I_{1-}^{1,-\frac{1}{2},-1}\nu)(x) = \int_x^1 \frac{\nu(t)dt}{\sqrt{(1-t)}} \in H^1[0,1]$$

и принимая во внимание условия $0<\alpha<\frac{1}{2}$ и $\beta\le 0$, согласно лемме 3 получаем

$$(I_{1-}^{-\alpha-\frac{1}{2},\beta,\alpha-\frac{1}{2}}\nu_1)(x) = (I_{1-}^{-\alpha+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}}\nu)(x)\in H^{\frac{1}{2}-\alpha}[0,1]$$

при $\beta=0$, а при $\beta<0$ из леммы 4 вытекает оценка

$$(I_{1-}^{-\alpha+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}}\nu)(x)\in H^{\min(\frac{1}{2}-\alpha,-\beta)}[0,1],$$

что гарантирует выполнение равенства (21).

Подставляя (18) и (19) в краевое условие (9) и учитывая (20) и (21), получаем

$$A\sqrt{\pi}(I_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}}\nu)(x) + B(I_{1-}^{-\alpha+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}}\nu)(x) = 2A(D_{0+}^{\alpha}\tau)(x) - 2g(x). \qquad (23)$$

Если $\nu(x)\in H_0^{\lambda}(\rho;[0,1])$, $\alpha<1/2$ и $-\alpha+1/2<\lambda<1/2$, то на основании (12), (15) и леммы 2 имеем

$$(I_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}}\nu)^{-1}(x) = (I_{0+}^{\alpha-\frac{1}{2}}\nu)(x) = (D_{0+}^{\frac{1}{2}-\alpha}\nu)(x)\in H_0^{\lambda+\alpha-\frac{1}{2}}(\rho;[0,1]). \qquad (24)$$

Если $\tau(x)\in H_0^{\lambda_1}(\rho;[0,1])$, $\alpha<1/2$ и $1/2<\lambda_1<1$, то на основании (10), (15), (14) и леммы 2 получаем

$$(I_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}})^{-1}(D_{0+}^{\alpha}\tau)(x) = (D_{0+}^{\frac{1}{2}-\alpha})(D_{0+}^{\alpha}\tau)(x) = (D_{0+}^{\frac{1}{2}}\tau)(x)\in H_0^{\lambda_1-\frac{1}{2}}(\rho;[0,1]). \qquad (25)$$

Применяя к обеим частям (23) оператор $D_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}}$ и учитывая (24) и (25), приходим к равенству

$$A\sqrt{\pi}\nu(x) + B(D_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}} I_{1-}^{-\alpha+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}}\nu)(x) = 2A(D_{0+}^{\frac{1}{2}}\tau)(x) - 2(D_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}}g)(x),$$

справедливому при $x\in(0,1)$, или, согласно (8),

$$\begin{aligned} &A\sqrt{\pi}\nu(x) + B(I_{0+}^{\alpha-\frac{1}{2},-\alpha+\frac{1}{2},1} I_{1-}^{-\alpha+\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}}\nu)(x) = \\ &= 2A(D_{0+}^{\frac{1}{2}}\tau)(x) - 2(D_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}}g)(x). \end{aligned} \qquad (26)$$

В работе [14] получена формула

$$(I_{0+}^{-p,p,r} I_{1-}^{p,s,-p}\nu)(x) = \frac{\cos(\pi p))\nu(x)}{(1-x)^{p+s}} + \frac{\sin(\pi p)}{\pi}\int_0^1 (\tfrac{t}{x})^p \frac{\nu(t)dt}{(1-t)^{p+s}(t-x)} \quad (27)$$
$$(0 < p < 1,\ 0 < x < 1).$$

Используя (27) с $p = -\alpha + \frac{1}{2}$ и $s = \beta - \frac{1}{2}$, перепишем (26) в виде особого интегрального уравнения с ядром Коши

$$[A\sqrt{\pi} + B\sin(\pi\alpha)(1-x)^{\alpha-\beta}]\nu(x) + \frac{B\cos(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^1 (\tfrac{t}{x})^{-\alpha+\frac{1}{2}} \frac{\nu(t)dt}{(1-t)^{\beta-\alpha}(t-x)} =$$
$$= 2A(D_{0+}^{\frac{1}{2}}\tau)(x) - 2(D_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}}g)(x) \quad (x \in (0,1)). \quad (28)$$

4. Решение сингулярного интегрального уравнения и краевой задачи

Произведя в (28) замены

$$\varphi(x) = x^{-\alpha+\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha-\beta}\nu(x), \quad (29)$$

$$a(x) = A\sqrt{\pi} + B\sin(\pi\alpha)(1-x)^{\alpha-\beta},\ b(x) = B\cos(\pi\alpha)(1-x)^{\alpha-\beta}, \quad (30)$$

и

$$f(x) = 2x^{-\alpha+\frac{1}{2}}(1-x)^{\alpha-\beta}[A(D_{0+}^{\frac{1}{2}}\tau)(x) - (D_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}}g)(x)], \quad (31)$$

получим характеристическое особое интегральное уравнение с ядром Коши [15]

$$a(x)\varphi(x) + \frac{b}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t-x}dt = f(x) \quad (x \in (0,1)). \quad (32)$$

Так как $\alpha - \beta > 0$, то согласно (22) $a(x), b(x) \in H^{\alpha-\beta}[0,1]$. Если же $g(x) \in H^{\lambda_2}[0,1]$ и $-\alpha + \frac{1}{2} < \lambda_2 \leq 1$, то в силу (7) и леммы 3 имеем

$$x^{-\alpha+\frac{1}{2}}(D_{0+}^{-\alpha+\frac{1}{2}}g)(x) = x^{-\alpha+\frac{1}{2}}(I_{0+}^{\alpha-\frac{1}{2},-\alpha+\frac{1}{2},\eta}g)(x) \in H^{\lambda_2+\alpha-\frac{1}{2}}[0,1]. \quad (33)$$

Тогда согласно (25) и (33) функция $f(x)$ в (31) удовлетворяет условию

$$f(x) \in H^{\gamma}[0,1], \quad \gamma = \min\left[\alpha - \beta, -\alpha + \frac{1}{2}, \lambda_1 - \frac{1}{2}, \lambda_2 + \alpha - \frac{1}{2}\right].$$

Предположим, что

$$d(x) \equiv [A\sqrt{\pi} + B\sin(\pi\alpha)(1-x)^{\alpha-\beta}]^2 + [B\cos(\pi\alpha)(1-x)^{\alpha-\beta}]^2 \neq 0 \quad (x \in [0,1]). \quad (34)$$

Учитывая (12) и (29) запишем функцию $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = (1-x)^{\alpha-\beta}\varphi^*(x),\ \text{где}\ \varphi^*(x) = x^{-\alpha+\frac{1}{2}}\nu(x) \in H_0^{\lambda}[0,1]. \quad (35)$$

На основании этого будем искать решение $\varphi(x)$ уравнения (32) в весовом классе гельдеровских функций $H_0^{\lambda}\left((1-x)^{\alpha-\beta};[0,1]\right)$, ограниченных на концах $x = 0$ и $x = 1$ отрезка $[0,1]$ (см. п. 30.1 в [1], обозначения и результаты откуда мы будем использовать в дальнейшем).

Коэффициент $G(x)$ краевой задачи Римана, соответствующей особому интегральному уравнению (32), дается формулой

$$G(x) = \frac{a(x)-ib(x)}{a(x)+ib(x)} = \frac{A\sqrt{\pi}+B[\sin(\pi\alpha)-i\cos(\alpha\pi)](1-x)^{\alpha-\beta}}{A\sqrt{\pi}+B[\sin(\pi\alpha)+i\cos(\pi\alpha)(1-x)^{\alpha-\beta}} = \\ == \frac{A\sqrt{\pi}-iBe^{i\pi\alpha}(1-x)^{\alpha-\beta}}{A\sqrt{\pi}+iBe^{-i\pi\alpha}(1-x)^{\alpha-\beta}} = e^{i\Theta(x)},$$

где $\Theta(x) = \arg[G(x)]$. Тогда

$$G(0) = \frac{A\sqrt{\pi} - iBe^{i\pi\alpha}}{A\sqrt{\pi} + iBe^{-i\pi\alpha}} = e^{i\Theta}.$$

Выберем значение $\arg[G(x)]$ так, чтобы

$$0 \le \arg[G(0)] = \arg\left[\frac{A\sqrt{\pi} - iBe^{i\pi\alpha}}{A\sqrt{\pi} + iBe^{-i\pi\alpha}}\right] < 2\pi.$$

Это означает, что $\Theta \equiv \Theta(0) = \arg[G(0)]$ определено следующим образом:

$\Theta = 2arctg\frac{-B\cos(\alpha\pi)}{A\sqrt{\pi}+B\sin(\alpha\pi)}$, если $B[A\sqrt{\pi} + B\sin(\alpha\pi)] < 0$;

$\Theta = 2\pi - 2arctg\frac{-B\cos(\alpha\pi)}{A\sqrt{\pi}+B\sin(\alpha\pi)}$, если $B[A\sqrt{\pi} + B\sin(\alpha\pi)] > 0$;

$\Theta = 0$, если $B = 0$; и

$\Theta = \pi$, если $A\sqrt{\pi} + B\sin(\alpha\pi) = 0$.

Кроме того, $G(1) = 1, \Theta(1) = \arg[G(1)] = 0$ и, следовательно, $\left[\frac{\Theta(1)}{2\pi}\right] = 0$. Согласно (35) $n_0 = 0, n_1 = 0$ и индекс κ уравнения (32) равен минус единице

$$\kappa = \left[\frac{\Theta(1)}{2\pi}\right] + n_0 + n_1 - 1 = -1.$$

Далее,

$$\mu_0 = 1 - n_0 - \frac{\Theta(0)}{2\pi} = 1 - \frac{\Theta}{2\pi}; \quad \mu_1 = \frac{\Theta(1)}{2\pi} - \left[\frac{\Theta(1)}{2\pi}\right] - n_1 = 0;$$

$$Z_0(x) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{\Theta(t)dt}{t-x} + \frac{\Theta\ln x}{2\pi}\right].$$

Тогда на основании теоремы 30.2 из [1] имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < \frac{1}{2}, \beta \le 0$, *функции* $\tau(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют соответственно условиям* (10) *и* (11); $a(x), b(x)$ *и* $f(x)$ *заданы соотношениями* (30)–(31) *и выполняется условие* (34).

Для разрешимости уравнения (32) *в пространстве* $H_0^\lambda\left((1-x)^{\alpha-\beta};[0,1]\right)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 \frac{f(t)dt}{Z_0(t)t^{1-\theta/2\pi}} = 0. \tag{36}$$

При выполнении этого условия уравнение (32) *имеет единственное решение, даваемое формулой*

$$\varphi(x) = \frac{a(x)f(x)}{d(x)} - \frac{bZ_0(x)}{\pi d(x)}\int_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{1-\frac{\Theta}{2\pi}} \frac{f(t)}{Z_0(t)(t-x)}dt.$$

Из результатов пункта 4 и теоремы 1 вытекает следующая теорема о разрешимости поставленной в п. 2 краевой задачи.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1/2$, $\beta \leq 0$, *функции* $\tau(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют соответственно условиям* (10) *и* (11), *и пусть выполнены условия* (34) *и* (36).

Тогда краевая задача (8), (9) *для гиперболического уравнения* (1) *имеет единственное решение* $U(x,y)$ *в классе* (12), *и это решение дается формулой* (17), *где*

$$\nu(x) = x^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-x)^{\beta-\alpha}\varphi(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: Саратовский ун-т, 1992.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
4. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000.
5. *Saigo M.* A certain boundary value problem for the Euler–Darboux equation // Math. Japon. 1979. V. 24, N 4. P. 377–385.
6. *Saigo M.* A certain boundary value problem for the Euler–Darboux equation // Math. Japon. 1980. V. 25, N 2. P. 211–220.
7. *Saigo M.* A certain boundary value problem for the Euler–Darboux equation // Math. Japon. 1981. V. 26, N 1. P. 103–119.
8. *Kilbas A. A., Repin O. A., Saigo M.* Solution in Closed Form of Boundary Value Problem for Degenerate Equation of Hyperbolic Type // Kyungpook. Math. J. 1996. V. 36, N 2. P. 261–273.
9. *Репин О. А.* О разрешимости задачи с краевым условием на характеристиках для вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, N 1. С. 110–113.
10. *Килбас А. А., Репин О. А.* Задача со смещением для для параболо–гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, N 6. С. 799–805.
11. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu. Univ. 1978. V. 11, N 2. P. 135–143.
12. *Saigo M. and Kilbas A. A.* Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces // Transform Methods and Special Functions, Sofia 94. Proceedings of International Workshop. Singapore: Sci. Cult. Publ. 1995. P. 282–293.
13. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
14. *Srivastava H. M. and Saigo M.* Multiplication of fractional calculus operators and boundary value problems involving the Euler–Darboux equation // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 121. P. 325–369.
15. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Килбас Анатолий Александрович
Беларусь, Минск, Белорусский государственный университет
kilbas@mmf.bsu.unibel.by

Репин Олег Александрович
Россия, Самара, Самарская государственная экономическая академия
academy@ssea.ru

Сайго Мегуми
Япония, Фукуока, Фукуокский университет