УДК 517.946

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

О. А. Колтуновский

Пусть D есть прямоугольник $\{(x,t) : 0 < x < 1, \ \ 0 < t < T\}$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ и $b(x,\xi)$ — заданные при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, $\xi \in R$ функции. В прямоугольнике D рассмотрим параболическое уравнение

$$Lu \equiv a(x,t)b(x,\bar{u}(x,T))u_t - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где

$$\bar{u}(x,t) = \alpha(t)u(x,t) + \int\limits_0^t \beta(\tau)u(x,\tau)d\tau.$$

Краевая задача: *найти в D решение уравнения* (1), *удовлетворяющие условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x)u(x,T) + \psi(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные при $x \in [0,1]$ функции.

Отметим, что краевая задача (1)–(3) есть нелокальная по времени краевая задача для нелинейного нагруженного параболического уравнения — уравнения, содержащего в коэффициентах значения того или иного функционала от решения [1, 2].

Будем обозначать для краткости пространство $W_2^{2,1}(D) \cap L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))$ как пространство V; норму в V определим обычным образом

$$||v||_V = ||v||_{W_2^{2,1}(D)} + ||v||_{L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))}.$$

Теорема 1. *Пусть имеют место включения $\alpha(t) \in L_\infty([0,T])$, $\beta(t) \in L_1([0,T])$, $\varphi(x) \in W_\infty^1(0,1)$, $\psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $a(x,t) \in C^1(\bar{D})$, $c(x,t) \in C(\bar{D})$, $b(x,\xi) \in Lip_\xi(R)$, и пусть выполняются условия*

$$0 < a_0 \le a(x,t) \le a_1 < +\infty, \ (x,t) \in \bar{D};$$

$$0 < b_0 \le b(x,\xi) \le b_1 < +\infty, \ x \in [0,1], \xi \in R;$$

$$|b(x,\xi_1) - b(x,\xi_2)| \le B|\xi_1 - \xi_2|, x \in [0,1], \ \xi_1 \in R, \xi_2 \in R;$$

$$a(x,T)\exp(k_0 T) - a(x,0)\varphi^2(x) \ge k_1 > 0, \ x \in (0,1), ||\varphi||_{L_\infty(0,1)} < 1;$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 01–01–00768 и Министерства образования РФ, код проекта Е00–1.0–79.

$$c(x,t)-\frac{1}{2}b(x,\xi)[a_t(x,t)+k_0a(x,t)]\geq 0,\ (x,t)\in\bar{D},\xi\in R.$$

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет решение* $u(x,t)$ *из пространства* V.

Доказательство. Пусть $v(x,t)$ есть произвольная функция из пространства V. Рассмотрим краевую задачу: *найти в* D *решение уравнения*

$$L_vu\equiv a(x,t)b(x,\bar{v}(x,T))u_t-u_{xx}+c(x,t)u=f(x,t), \tag{1'}$$

удовлетворяющее условиям (2) *и* (3). Данная задача есть параболическая линейная нелокальная по времени краевая задача; для доказательства разрешимости этой задачи в пространстве V воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ есть число из отрезка [0,1]. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти в* D *решение уравнения* (1′), *удовлетворяющее условию*

$$u(x,0)=\lambda\varphi(x)u(x,T)+\psi(x),\ x\in(0,1) \tag{2_λ}$$

и условию (3).

Как обычно, обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача (1′), (2_λ), (3) разрешима в пространства V. Если это множество окажется непустым, одновременно открытым и замкнутым, то оно, как известно, будет совпадать со всем отрезком [0,1]. Но тогда краевая задача (1′), (2_1), (3) будет иметь решение, принадлежащее пространству V. А это и будет означать разрешимость в пространстве V задачи (1′), (2), (3).

Итак, необходимо доказать непустоту множества Λ, его открытость и замкнутость.

Краевая задача (1′), (2_0), (3) есть обычная первая начально–краевая задача для линейного параболического уравнения. Хорошо известно [3], что при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(D)\cap(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))$.

Итак, краевая задача (1′), (2_0), (3) имеет решение, принадлежащее пространству V. Следовательно, множество Λ не пусто.

Открытость и замкнутость множества Λ, как правило, следует из «хороших» априорных оценок. Докажем эти оценки.

Далее до конца доказательства теоремы 1 постоянные M_i $(i=0,1,2,\ldots)$ — это положительные постоянные, которые зависят только от коэффициентов уравнения (1) и функции $\varphi(x)$.

Анализ равенства

$$\int_0^T\int_0^1 L_vu\cdot ue^{k_0t}dxdt=\int_0^T\int_0^1 f\cdot ue^{k_0t}dxdt$$

после интегрирования по частям с учетом условий теоремы дает равномерную по λ оценку

$$\int_0^1 u^2(x,T)dx+\int_0^T\int_0^1[u^2+u_x^2]dxdt\leq M_1\left\{\int_0^T\int_0^1 f^2dxdt+\int_0^1\psi^2dx\right\}. \tag{4}$$

Проанализируем следующее равенство

$$\int_0^T\int_0^1 L_vu\cdot u_tdxdt=\int_0^T\int_0^1 fu_tdxdt.$$

Интегрируя по частям, используя неравенство Коши и оценку (4), получим следующую равномерную по λ оценку

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_t^2dxdt+\int\limits_0^1 u_x^2(x,T)dx\le M_3\left\{\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2dxdt+\int\limits_0^1[\psi^2+\psi_x^2]\right\}. \tag{5}$$

Из оценок (4) и (5), а также из условий на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вытекает оценка

$$\int\limits_0^1 u^2(x,0)dx+\int\limits_0^1 u_x^2(x,0)dx\le M_4\left\{\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2dxdt+\int\limits_0^1[\psi^2+\psi_x^2]dx\right\}.$$

Теперь интегрирование по частям в равенстве

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 L_vu(u_\tau+u)dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 f(u_\tau+u)dxd\tau,$$

где t есть произвольное число из отрезка $[0,T]$, дает равномерную по λ оценку

$$\int\limits_0^1 u^2(x,t)du+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_\tau^2dxd\tau+\int\limits_0^1 u_x^2(x,t)dx\le$$

$$\le M_5\left\{\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2dxdt+\int\limits_0^1[\psi^2+\psi_x^2]dx\right\}. \tag{6}$$

Следующая оценка

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_{xx}^2dxdt\le M_6\left\{\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f^2dxdt+\int\limits_0^1[\psi^2+\psi_x^2]dx\right\}. \tag{7}$$

Оценки (4), (6), (7) дают равномерную по λ оценку решений $u(x,t)$ краевой задачи $(1')$, (2_λ), (3) в пространстве V:

$$||u||_V\le M_0\left\{||f||_{L_2(D)}+||\psi||_{W_2^1(0,1)}\right\}. \tag{8}$$

Эта оценка и позволит доказать открытость и замкнутость множества Λ.

Пусть $\{\lambda_m\}$ есть последовательность элементов множества Λ, сходящаяся к числу λ_0. Покажем, что λ_0 также будет элементом Λ.

Всякому числу λ_m соответствует функция $u_m(x,t)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением краевой задачи $(1')$, (2_{λ_m}), (3). Для семейства функций $\{u_m(x,t)\}$ будет справедлива равномерная по m оценка (8). Из этой оценки вытекает, что найдутся функция $u(x,t)$ из пространства $W_2^{2,1}(D)$ и подпоследовательность $\{u_{m_k}(x,t)\}$ последовательности $\{u_m(x,t\}$ такие, что при $K\to\infty$ имеют место сходимости:

$$u_{m_k}(x,t)\to u(x,t)\ \textit{слабо в}\ W_2^{2,1}(D)\ \textit{и почти всюду в}\ \bar D.$$

Из этих сходимостей следует, что предельная функция $u(x,t)$ будет решением уравнения $(1')$ и что для нее будут выполняться условия (2_{λ_0}), (3) и оценка (8). Отсюда и вытекает, что число λ_0 будет элементом множества Λ.

Принадлежность предельной для множества Λ точки ему же и означает его замкнутость.

Докажем теперь открытость множества Λ.

Пусть число λ_0 есть элемент множества Λ. Множество Λ будет открытым, если числа $\lambda = \lambda_0 + \hat{\lambda}$ при малой величине $|\hat{\lambda}|$ также будут принадлежать ему же. Пусть $w(x,t)$ есть произвольная функция из пространства V. Рассмотрим краевую задачу: *найти в D решение уравнения* $(1')$, *удовлетворяющее условию*

$$u(x,0) = \lambda_0\varphi(x)u(x,T) + \hat{\lambda}\varphi(x)w(x,T) + \psi(x) \qquad (2'_{\lambda_0})$$

и условию (3). Согласно определению множества Λ, эта задача имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V. Тем самым краевая задача $(1')$, $(2'_{\lambda_0})$, (3) порождает оператор G, переводящий пространство V в себя: $G(w) = u$. Покажем, что при малой величине $|\hat{\lambda}|$ этот оператор будет сжимающим.

Пусть $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$ — функции из пространства V, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — соответствующие им образы при действии оператора G. Обозначим

$$w(x,t) = w_1(x,t) - w_2(x,t), \quad u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Для функции $u(x,t)$ выполняется уравнение $L_v u = 0$, условие (3) и условие

$$u(x,0) = \lambda_0\varphi(x)u(x,T) + \hat{\lambda}\varphi(x)w(x,T), \quad x \in (0,1).$$

Оценка (8) даёт для функции $u(x,t)$ неравенство

$$||u||_V \leq M_0' \cdot |\hat{\lambda}| \cdot ||w(x,T)||_{W_2^1(0.1)},$$

из которого ватекает неравенство

$$||u||_V \leq M_0' \cdot |\hat{\lambda}| \cdot ||w||_V.$$

Если теперь число $\hat{\lambda}$ будет таким, что $M_0'|\hat{\lambda}| < 1$, то оператор G станет сжимающим оператором. У сжимающего оператора есть неподвижная точка — функция $u(x,t)$ такая, что $G(u) = u$. Для этой функции будет выполняться уравнение $(1')$, условие (3) и условие

$$u(x,0) = (\lambda_0 + \hat{\lambda})\varphi(x)u(x,T) + \psi(x), \quad x \in (0,1).$$

Другими словами, функция $u(x,t)$ будет решением краевой задачи $(1')$, (2_λ), (3) из пространства V. А это и означает, что числа $\lambda = \lambda_0 + \hat{\lambda}$ есть элементы множества Λ, и далее — что множество Λ открыто.

Из всего вышедоказанного следует, что краевая задача $(1')$, (2), (3) при принадлежности функции $v(x,t)$ пространству V будет иметь решение $u(x,t)$, принадлежащее снова пространству V. Но тогда эта краевая задача порождает оператор Φ, переводящий пространство V в себя: $\Phi(v) = u$. Покажем, что оператор Φ имеет в V неподвижные точки.

Для решений краевой задачи $(1')$, (3), (3) выполняется оценка (8). Следовательно, оператор Φ любой шар пространства V радиуса R такого, что

$$R \geq M_0\{||f||_{L_2(D)} + ||\psi||_{W_2^1(0,1)}\},$$

будет переводить в себя.

Покажем теперь, что оператор Φ будет вполне непрерывен.

Пусть последовательность функций $\{v_m(x,t)\}$ есть ограниченная последовательность из пространства V, $\{u_m(x,t)\}$ есть последовательность образов функций $v_m(x,t)$ при действии оператора Φ. Вновь из оценок (4), (6), (7) вытекает,

что последовательность $\{u_m(x,t)\}$ будет ограничена в пространстве V. Последовательность $\{\bar{v}_m(x,T)\}$ будет ограниченной последовательностью в пространстве $W_2^1(0,1)$. Из ограниченности последовательностей $\{v_m(x,t)\}$, $\{u_m(x,t)\}$ и $\{\bar{v}_m(x,T)\}$ следует, что существуют подпоследовательности $\{v_{m_k}(x,t)\}$ и $\{u_{m_k}(x,t)\}$ соответствующих последовательностей, функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости:

$$v_{m_k}(x,t) \to v(x,t) \text{ слабо в } W_2^{2,1}(D) \text{ и почти всюду в } \bar{D},$$

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в } W_2^{2,1}(D) \text{ и почти всюду в } \bar{D},$$

$$\bar{v}_{m_k}(x,T) \to \bar{v}(x,T) \text{ и почти всюду на интервале } (0,1).$$

Из этих сходимостей следует, что функции $v(x,t)$ и $u(x,t)$ будут связаны уравнением ($1'$), для функции $u(x,t)$ будет выполняться условие (2). Обозначим $w_k(x,t) = u(x,t) - u_{m_k}(x,t)$. Имеет место равенство

$$a(x,t)b(x,\bar{v}(x,T))w_{kt} - \Delta w_k + c(x,t)w_k =$$

$$= a(x,t)[b(x,\bar{v}_{m_k}(x,T)) - b(x,\bar{v}(x,T))]u_{m_k t}.$$

Это равенство, оценка (8) для функции w_k, ограниченность функций $u_{m_k t}$ свойства функции $b(x,\xi)$ и сходимость последовательности $\{\bar{v}_{m_k t}(x,T) - \bar{v}(x,T)\}$ почти всюду к нулевой функции дают сходимость

$$||w_k||_V \to 0 \text{ при } k \to 0.$$

Другими словами, для всякой ограниченной в пространстве V последовательности $\{v_m(x,t)\}$ из последовательности $\{\Phi v_m\}$ можно извлечь сильно сходящуюся подпоследовательность. А это и означает, что оператор Φ вполне непрерывен в пространстве V.

Вполне непрерывность оператора Φ, его свойство переводить шар пространства V достаточно большого радиуса в себя и теорема Шаудера дают, что оператор Φ имеет в пространстве V неподвижную точку. Эта неподвижная точка — то есть функция $u(x,t)$ из пространства V — и будет искомым решением краевой задачи (1)–(3).

Теорема 1 доказана.

Введем обозначения

$$\beta_0 = ||\beta(t)||_{L_2(0,T)}, \quad K_0 = M_2[||f||^2_{L_2(Q)} + ||\psi||^2_{W_2^1(0,1)}]$$

(постоянная M_2 есть постоянная из неравенства (5)).

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1. *Если дополнительно имеют место включения $c(x,t) \in C^1(\bar{D})$, $\varphi(x) \in W_2^2(0,1)$, и если для некоторого отрицательного числа γ выполняются неравенства*

$$\exp(\gamma T) - \varphi^2(x) - \frac{2\alpha^2(T)K_0 a_1^2 B^2}{a_0 b_0} > 0, \quad x \in [0,1],$$

$$-\gamma \exp(\gamma T) - \frac{2\beta_0^2 K_0 a_1^2 B^2}{a_0 b_0} > 0,$$

$$c(x,T)\exp(\gamma T) - c(x,0)\varphi^2(x) + \varphi(x)\varphi''(x) \geq 0, \quad x \in [0,1],$$

$$(c(x,t)\exp(\gamma t))_t \leq 0, \quad (x,t) \in \bar{Q},$$

то краевая задача (1)–(3) *может иметь в пространстве* V *лишь одно решение.*

Доказательство. Предположим, что краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V два решения $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Положим $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. Для функции $w(x,t)$ выполняются уравнение

$$a(x,t)b(x,\bar{u}(x,T))w_t - w_{xx} + c(x,t)w =$$

$$= a(x,t)[b(x,\bar{v}(x,T)) - b(x,\bar{u}(x,T))]v_t, \quad (x,t) \in D, \tag{9}$$

а также условие (3) и условие

$$w(x,0) = \varphi(x)w(x,T), \quad x \in (0,1). \tag{10}$$

Умножим уравнение (9) справа и слева на функцию $w_t(x,t)\exp(\gamma t)$ и проинтегрируем по области D. Используя условие (10), приходим к равенству

$$\int_0^T\int_0^1 a(x,t)b(x,\bar{u}(x,T))w_t^2\,dxdt - \frac{\gamma}{2}\int_0^T\int_0^1 w_x^2\exp(\gamma t)\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1[\exp(\gamma T) - \varphi^2(x)]w_x^2(x,T)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^1(c(x,t)\exp(\gamma t))_t w^2\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1[c(x,T)\exp(\gamma T) - c(x,0)\varphi^2(x) + \varphi(x)\varphi''(x)]w^2(x,T)\,dx =$$

$$= \int_0^T\int_0^1 a(x,t)[b(x,\bar{u}(x,T) - b(x,\bar{v}(x,T))]v_t w_t\exp(\gamma t)\,dxdt. \tag{11}$$

Оценим правую часть данного равенства. Имеем

$$\left|\int_0^T\int_0^1 a(x,t)[b(x,\bar{u}(x,T)) - b(x,\bar{v}(x,T))]v_t w_t\exp(\gamma t)\,dxdt\right| \le$$

$$\le a_1 B\int_0^T\int_0^1 |\bar{w}(x,T)||v_t||w_t|\,dxdt \le \frac{\delta^2}{2}\int_0^T\int_0^1 w_t^2\,dxdt + \frac{a_1^2B^2}{2\delta^2}\int_0^T\int_0^1[\bar{w}(x,T)]^2v^2\,dxdt$$

(здесь δ — произвольное положительное число). Используя оценку снизу для функций $a(x,t)$ и $b(x,\xi)$, выбирая δ равным a_0b_0 и учитывая условия теоремы, получаем неравенство

$$\frac{a_0b_0}{2}\int_0^T\int_0^1 w_t^2\,dxdt - \frac{\gamma}{2}\exp(\gamma T)\int_0^T\int_0^1 w_x^2\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^1[\exp(\gamma T) - \varphi^2(x)]w_x^2(x,T)\,dx \le \frac{a_1^2B^2}{2a_0b_0}\int_0^T\int_0^1[\bar{w}(x,T)]^2v_t^2\,dxdt. \tag{12}$$

Далее, с помощью оценки

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 [\bar{w}(x,T)]^2 v_t^2 dxdt \leq \int\limits_0^T \underset{0\leq x\leq 1}{\mathrm{vraimax}} [\bar{w}(x,T)]^2 \left(\int\limits_0^1 v_t^2 dx \right) dt, \qquad (13)$$

оценим величину $|\bar{w}(x,T)|$:

$$|\bar{w}(x,T)| \leq |\alpha(T)||w(x,T)| + \left(\int\limits_0^T \beta^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^T w^2(x,t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq |\alpha(T)| \left(\int\limits_0^T w_x^2(x,T)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \beta_0 \left(\int\limits_0^T \int\limits_0^1 w_x^2(x,t)dxdt \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (14)$$

Наконец, заметим, что поскольку функция $v(x,t)$ есть решение краевой задачи (1)–(3), то для неё будет выполняться оценка (5). Учитывая эту оценку, неравенства (13) и (14), мы можем перейти от неравенства (12) к неравенству

$$\frac{a_0 b_0}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 w_t^2 dxdt - \frac{\gamma}{2} \exp(\gamma T) \int\limits_0^T \int\limits_0^1 w_x^2 dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 [\exp(\gamma T) - \varphi^2(x)] w_x^2(x,T)dx \leq$$

$$\leq \frac{a_1^2 B^2 K_0}{2a_0 b_0} \left[2\alpha^2(T) \int\limits_0^1 w_x^2(x,T)dx + 2\beta_0^2 \int\limits_0^T \int\limits_0^1 w_x^2 dxdt \right].$$

Вследствие условий теоремы последнее неравенство может выполняться лишь в случае $w_x(x,t) \equiv w_t(x,t) \equiv 0$ почти всюду в D, $w_x(x,T) \equiv 0$ почти всюду на интервале (0,1). Поскольку же выполняются равенства $w(0,t) = w(1,t) = 0$, то будет выполняться тождество $w(x,t) \equiv 0$ почти всюду в D. А это и означает совпадение функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1995.
2. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А, Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Колтуновский Олег Александрович
Россия, Южно–Сахалинск, Южно-Сахалинский институт (филиал)
Московского государственного университета коммерции