УДК 517.946

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ПЕРЕМЕННОГО НАПРАВЛЕНИЯ

А. И. Кожанов

Пусть D есть ограниченная область пространства R^n с границей Γ, Q — цилиндр $\{(x,t) : x \in D, t \in (-T,T)\}$ $(0 < T < +\infty)$, $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $a_0(x)$ и $b_0(x)$ — заданные при $x \in \bar{D}$ функции. Определим операторы A и B

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}) + a_0(x)u,$$

$$Bu = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}) + b_0(x)u$$

(по повторяющимся индексам здесь и далее ведется суммирование в пределах от 1 до n), и пусть эти операторы будут эллиптико–параболическими, т.е. пусть выполняются условия

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0, \quad b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \forall x \in \bar{D}, \quad \forall \xi \in R^n.$$

Краевая задача: *найти в Q решение уравнения*

$$Au_t + \operatorname{sign} t \cdot Bu = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,+0) = \varphi_1(x)u(x,T) + \varphi_2(x)u(x,-T) + \varphi_0(x), \ x \in D, \tag{2}$$

$$u(x,-0) = \psi_1(x)u(x,T) + \psi_2(x)u(x,-T) + \psi_0(x), \ x \in D, \tag{3}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(-T,T)} = 0 \tag{4}$$

($f(x,t)$, $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$, $k = 0,1,2$ — заданные функции).

Введем обозначения

$$Q^+ = \{(x,t) : x \in D, \ 0 < t < T\}, \ Q^- = \{(x,t) : x \in D, \ -T < t < 0\},$$

$$u^+(x,t) = u(x,t)|_{Q^+}, \ u^-(x,t) = u(x,t)|_{Q^-},$$

$$f^+(x,t) = f(x,t)|_{Q^+}, \ f^-(x,t) = f(x,t)|_{Q^-}.$$

Используя эти обозначения, мы можем представить задачу (1)–(4) как *задачу сопряжения*: *найти функции $u^+(x,t)$ и $u^-(x,t)$, являющиеся в цилиндрах Q^+ и Q^- соответственно решениями уравнений*

$$Au_t^+ + Bu^+ = f^+(x,t), \quad Au_t^- - Bu^- = f^-(x,t), \tag{1'}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 01–01–00768 и Министерства образования РФ, код проекта Е00–1.0–79.

при выполнении условий

$$u^+(x,0) = \varphi_1(x)u^+(x,T) + \varphi_2(x)u^-(x,-T) + \varphi_0(x),\ x \in D, \tag{$2'$}$$

$$u^-(x,0) = \psi_1(x)u^+(x,T) + \psi_2(x)u^-(x,-T) + \psi_0(x),\ x \in D, \tag{$3'$}$$

$$u^+(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = u^-(x,t)|_{\Gamma\times(-T,0)} = 0 \tag{$4'$}$$

Продолжим преобразование исследуемой краевой задачи. Положим $v(x,t) = u^+(x,t)$, $f_1(x,t) = f^+(x,t)$, $(x,t) \in Q^+$, $w(x,t) = u^-(x,-t)$, $f_2(x,t) = -f^-(x,-t)$, $(x,t) \in Q^-$. Получим следующую задачу: *найти функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$, являющиеся в цилиндре Q^+ решениями уравнений*

$$Av_t + Bv = f_1(x,t), \quad Aw_t + Bw = f_2(x,t) \tag{$1''$}$$

и такие, что для них выполняются условия

$$v(x,0) = \varphi_1(x)v(x,T) + \varphi_2(x)w(x,T) + \varphi_0(x), \tag{$2''$}$$

$$w(x,0) = \psi_1(x)v(x,T) + \psi_2(x)w(x,T) + \psi_0(x), \tag{$3''$}$$

$$v(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = w(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0. \tag{$4''$}$$

Заметим, что в случае $\varphi_2(x) \equiv \psi_1(x) \equiv 0$ каждая из задач (1)–(4), $(1')$–$(4')$, $(1'')$–$(4'')$ представляет собой распадающуюся задачу. Далее, если оператор A есть оператор $-I$, оператор B эллиптичен (другими словами, оба уравнения $(1')$ есть параболические уравнения, но с разным направлением времени), функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ суть тождественно постоянные функции, то задача сопряжения $(1')$–$(4')$ будет задачей, рассмотренной в работах [1, 2]. Метод доказательства разрешимости этой задачи в указанных работах основан на методе Фурье, и тем самым представляется, что в случае не тождественно постоянных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ он не применим. И наконец, заметим, что если $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv \psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv 0$, то в случае эллиптико–параболических операторов A и B в работах [3–5] предложены условия, с помощью которых были доказаны теоремы существования регулярных или почти регулярных решений первой начально–краевой задачи для уравнений $(1'')$.

Из изложенного выше вытекает, что задачи $(1')$–$(4')$, $(1'')$–$(4'')$ изучались ранее лишь в частных случаях, и что целью настоящей работы является хотя бы частичное восполнение указанного пробела.

Перейдем к конкретному изложению результатов.

Пусть выполняется условие гладкости:

> *функции $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $i,j, = 1,\dots,n$, $a_0(x)$ и $b_0(x)$ бесконечно дифференцируемы в $\bar{D}$; граница Γ области D представляет собой компактное бесконечно дифференцируемое многообразие* (5)

(данное условие есть не минимальное, а достаточное условие).

Далее, для точек $(x,\xi_0,\eta_0,\xi,\eta,\lambda)$ таких, что $x \in \bar{D}$, $\xi_0 \in R$, $\eta_0 \in R$, $\xi \in R^n$, $\eta \in R^n$, $\lambda \in [0,1]$ определим функции $F_{k,A}(x,\xi_0,\xi,\lambda)$, $G_{k,A}(x,\xi_0,\xi), k = 1,2$, и $\Phi_A(x,\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)$:

$$F_{k,A}(x,\xi_0,\xi,\lambda) = [1-\lambda^2\varphi_k^2(x) - \lambda^2\psi_k^2(x)]a^{ij}(x)\xi_i\xi_j -$$

$$-2\lambda^2 a^{ij}(x)[\varphi_k(x)\varphi_{kx_j}(x) + \psi_k(x)\psi_{kx_j}(x)]\xi_i\xi_0 -$$

$$-\{\lambda^2 a^{ij}(x)[\varphi_{kx_i}(x)\varphi_{kx_j}(x) + \psi_{kx_i}(x)\psi_{kx_j}(x)] + a_0(x)[1-\lambda^2\varphi_k^2(x) - \lambda^2\psi_k^2(x)]\}\xi_0^2,$$

$$G_{k,A}(x,\xi_0,\xi)=-a^{ij}(x)\{[\varphi_k(x)\varphi_{0x_j}(x)+\psi_k(x)\psi_{0x_j}(x)]\xi_i+$$

$$+[\varphi_{kx_i}(x)\varphi_{0x_j}+\psi_{kx_i}(x)\psi_{0x_j}(x)]\xi_0\}+a_0(x)[\varphi_k(x)+\psi_k(x)]\varphi_0(x)\xi_0,$$

$$\Phi_A(x,\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)=-2a^{ij}(x)[\varphi_1(x)\varphi_2(x)+\psi_1(x)\psi_2(x)]\xi_i\eta_j-$$

$$-2a^{ij}(x)[\varphi_1(x)\varphi_{2x_j}(x)+\psi_1(x)\psi_{2x_j}(x)]\xi_i\eta_0-$$

$$-2a^{ij}(x)[\varphi_{1x_i}(x)\varphi_2(x)+\psi_{1x_i}(x)\psi_2(x)]\xi_0\eta_j-$$

$$-2\{a^{ij}(x)[\varphi_{1x_i}(x)\varphi_{2x_j}(x)+\psi_{1x_i}(x)\psi_{2x_j}(x)]-$$

$$-a_0(x)[\varphi_1(x)\varphi_2(x)+\psi_1(x)\psi_2(x)]\}\xi_0\eta_0.$$

Далее, через A_0 и B_0 будем обозначать старшие части операторов A и B:

$$A_0u=\frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)u_{x_j}),\ B_0u=\frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)u_{x_j}).$$

И последнее из предварительных сведений. Уточним, что всюду ниже фраза «постоянная … определяется лишь входными данными задачи» означает, что данная постоянная определяется с помощью коэффициентов операторов A и B, функций $f(x,t)$, $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ через величины, которые будут конечны в силу выполнения условий соответствующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть операторы A_0 и B_0 эллиптичны и симметричны на множестве $\bar D$ и пусть выполняются условие (5) и условия*

$$[1-\varphi_1^2(x)-\psi_1^2(x)]\xi_0^2-2[\varphi_1(x)\varphi_2(x)+\psi_1(x)\psi_2(x)]\xi_0\eta_0+$$

$$+[1-\varphi_2^2(x)-\psi_2^2(x)]\eta_0^2\geq m_0(\xi_0^2+\eta_0^2),\quad m_0>0,x\in\bar D,\xi_0\in R,\ \eta_0\in R;$$

$$F_{1,A}(x,\xi_0,\xi,\lambda)-\lambda^2\Phi_A(x,\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)+F_{2,A}(x,\eta_0,\eta,\lambda)\geq$$

$$\geq m(\xi_0^2+\eta_0^2+|\xi|^2+|\eta|^2),m>0,x\in\bar D,\xi_0\in R,\eta_0\in R,\xi\in R^n,\eta\in R^n;$$

$$b_0(x)\leq 0,\quad x\in\bar D;$$

$$f_k(x,t)\in L_2(Q^+),\ \varphi_k(x)\in W^2_\infty(D),\ \psi_k(x)\in W^2_\infty(D),\ k=1,2,$$

$$\varphi_0(x)\in W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D),\psi_0(x)\in W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D).$$

Тогда задача $(1'')$–$(4'')$ имеет решение $\{v(x,t),w(x,t)\}$ такое, что $v(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$, $w(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$, $v_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$, $w_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$.

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Будем обозначать для краткости множество функций

$$\{v(x,t):v(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)),\ v_t\in L_2(0,T;W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))\}$$

через V; очевидно, что V есть банахово пространство.

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим задачу: *найти функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$, являющиеся в цилиндре Q^+ решениями уравнений*

$$Av_t+\lambda Bv=f_1(x,t),\quad Aw_t+\lambda Bw=f_2(x,t) \tag{$1''_\lambda$}$$

и такие, что для них выполняются условия

$$v(x,0)=\lambda[\varphi_1(x)v(x,T)+\varphi_2(x)w(x,T)]+\varphi_0(x), \tag{$2''_\lambda$}$$

$$w(x,0)=\lambda[\psi_1(x)v(x,T)+\psi_2(x)w(x,T)]+\psi_0(x), \qquad (3''_\lambda)$$

и условия $(4'')$.

Покажем, что эта краевая задача для всех чисел λ из отрезка $[0,1]$ имеет решение $\{v(x,t),w(x,t)\}$, принадлежащее пространству $V\times V$.

Как обычно, обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0,1]$, для которых краевая задача $(1''_\lambda)$, $(2''_\lambda)$, $(3''_\lambda)$, $(4'')$ разрешима в пространстве $V\times V$ для всех функций $f_i(x,t)$, $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $i=1,2$, и $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы. Если это множество окажется непустым, одновременно открытым и замкнутым, то оно, как известно, будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$. А это и будет означать разрешимость в пространстве $V\times V$ задачи $(1'')$–$(4'')$.

Итак, нам необходимо доказать непустоту множества Λ, его открытость и замкнутость.

Непустота множества Λ очевидна — число 0 есть элемент множества Λ.

Открытость и замкнутость множества Λ обычно доказываются с помощью априорных оценок.

Рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_D[Av_\tau+\lambda Bv)v+(Aw_\tau+\lambda Bw)w]dxd\tau=-\int_0^t\int_D(f_1v+f_2w)dxd\tau,$$

где t есть произвольное число из отрезка $[0,T]$. Интегрируя по частям в левой части данного равенства, приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\int_D\{a^{ij}(x)([v_{x_i}(x,t)v_{x_j}(x,t)-v_{x_i}(x,0)v_{x_j}(x,0)]+[w_{x_i}(x,t)w_{x_j}(x,t)-$$

$$-w_{x_i}(x,0)w_{x_j}(x,0)])-a_0(x)([v^2(x,t)-v^2(x,0)]+[w^2(x,t)-w^2(x,0)])\}dx+$$

$$+\lambda\int_0^t\int_D\{b^{ij}(x)(v_{x_i}v_{x_j}+w_{x_i}w_{x_j})-b_0(x)(v^2+w^2)\}dxd\tau=\int_0^t\int_D(f_1v+f_2w)dxd\tau. \qquad (6)$$

Полагая в равенстве (6) $t=T$ и используя условия $(2''_\lambda)$ и $(3''_\lambda)$, получаем новое равенство

$$\frac{1}{2}\int_D[F_{1,A}(x,v(x,T),\nabla v(x,T),\lambda)+F_{2,A}(x,w(x,T),\nabla w(x,T),\lambda)]dx+$$

$$+\lambda\int_0^T\int_D[b^{ij}(x)(v_{x_i}v_{x_j}+w_{x_i}w_{x_j})-b_0(x)(v^2+w^2)]dxdt=$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}\int_D\Phi_A(x,v(x,T),w(x,T),\nabla v(x,T),\nabla w(x,T))dx-$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int_D[G_{1,A}(x,v(x,T),\nabla v(x,T))+G_{2,A}(x,w(x,T),\nabla w(x,T))]dx-$$

$$-\int_0^T\int_D(f_1v+f_2w)dxdt+\frac{1}{2}\int_D\{a^{ij}(x)[\varphi_{0x_i}\varphi_{0x_j}+\psi_{0x_i}\psi_{0x_j}]-a_0(x)[\varphi_0^2+\psi_0^2]\}dx. \qquad (7)$$

Используя условия теоремы и неравенство Юнга, нетрудно из равенства (7) вывести неравенство

$$||v(x,T)||^2_{W^1_2(D)} + ||w(x,T)||^2_{W^1_2(D)} \le \delta \left(||v||^2_{L_2(Q^+)} + ||w||^2_{L_2(Q^+)} \right) + K_1, \qquad (8)$$

где δ есть произвольное положительное число, число K_1 определяется числом δ и входными данными задачи.

Вновь используя условия $(2''_\lambda)$, $(3''_\lambda)$ и условия теоремы, из неравенства (8) нетрудно вывести неравенство

$$||v(x,0)||^2_{W^1_2(D)} + ||w(x,0)||^2_{W^1_2(D)} \le K_2 \left[\delta \left(||v||^2_{L_2(Q^+)} + ||w||^2_{L_2(Q^+)} \right) + K_1 \right], \qquad (9)$$

где постоянная K_2 определяется лишь входными данными задачи.

Вернемся к равенству (6). Заметим прежде всего, что из условия положительной определенности квадратичной формы $F_{1,A} - \lambda^2 \Phi_A + F_{2,A}$ следует, что в множестве $\bar{D}$ выполняется неравенство $-a_0(x) \ge \bar{a}_0 > 0$. Учитывая это неравенство, перенося слагаемые в левой части равенства (6), соответствующие значению $t = 0$, в правую часть, применяя неравенство Юнга и неравенство (9), приходим к неравенству

$$||v(x,t)||^2_{W^1_2(D)} + ||w(x,t)||^2_{W^1_2(D)} \le$$

$$\le (\delta_1 + K_3 \delta) \left(||v||^2_{L_2(Q^+)} + ||w||^2_{L_2(Q^+)} \right) + K_4, \qquad (10)$$

где δ_1 есть произвольное положительное число, число K_3 определяется лишь входными данными задачи, число K_4 определяется числом δ_1 и входными данными задачи. Интегрируя неравенство (10) по переменной t в пределах от 0 до T и далее подбирая числа δ и δ_1 малыми, получаем оценку

$$\int_0^T \left(||v(x,t)||^2_{W^1_2(D)} + ||w(x,t)||^2_{W^1_2(D)} \right) dt \le N_0,$$

где постоянная N_0 зависит лишь от входных данных задачи. Наконец, эта оценка и неравенство (10) приводят к первой априорной оценке

$$||v(x,t)||^2_{W^1_2(D)} + ||w(x,t)||^2_{W^1_2(D)} \le N_1, \quad t \in [0,T], \qquad (11)$$

с постоянной N_1, зависящей лишь от входных данных задачи.

Рассмотрим теперь следующее равенство

$$-\int_0^t \int_D [(Av_\tau + \lambda B v) v_\tau + (A w_\tau + \lambda B w) w_\tau] dx d\tau = -\int_0^t \int_D (f_1 v_\tau + f_2 w_\tau) dx d\tau,$$

где вновь t есть произвольное число из отрезка $[0,T]$. Интегрируя по частям (слева), используя условия теоремы, неравенство Юнга и оценку (11), нетрудно получить оценку

$$\int_0^t \left(||v_\tau(x,\tau)||^2_{W^1_2(D)} + ||w_\tau(x,\tau)||^2_{W^1_2(D)} \right) d\tau \le N_2, \ t \in [0,T], \qquad (12)$$

где вновь постоянная N_2 определяется лишь входными данными задачи.

На следующем шаге проанализируем равенство

$$\int_0^t \int_D [(Av_\tau + \lambda Bv)A_0v + (Aw_\tau + \lambda Bw)A_0w]dxd\tau = \int_0^t \int_D (f_1A_0v + f_2A_0w)dxd\tau.$$

Интегрируя по частям, от этого равенства нетрудно перейти к равенству

$$\frac{1}{2}\int_D \{[A_0v(x,t)]^2 + [A_0w(x,t)]^2 - [A_0v(x,0)]^2 - [A_0w(x,0)]^2\}dx+$$

$$+\lambda \int_0^t \int_D [A_0v \cdot B_0v + A_0w \cdot B_0w]dxd\tau + \lambda \int_0^t \int_D b_0(x)[A_0v + A_0w]dxd\tau =$$

$$= \int_0^t \int_D (f_1A_0v + f_2A_0w)dxd\tau. \tag{13}$$

Положим в равенстве (13) $t = T$. Учитывая, что

1. *условия* $(2''_\lambda)$ *и* $(3''_\lambda)$ *приводят к условиям*

$$A_0v(x,0) = \lambda\varphi_1(x)A_0v(x,T) + \lambda\varphi_2(x)A_0w(x,T)+$$

$$+\lambda\Phi_1(x, v(x,T), \nabla v(x,T), w(x,T), \nabla w(x,T)), \tag{14}$$

$$A_0w(x,0) = \lambda\psi_1(x)A_0v(x,T) + \lambda\psi_2(x)A_0w(x,T)+$$

$$+\lambda\Phi_2(x, v(x,T), \nabla v(x,T), w(x,T), \nabla w(x,T)), \tag{15}$$

где функции Φ_1 *и* Φ_2 *ограничены по* x *при* $x \in \bar{D}$ *и имеют первый порядок роста по функциям* $v(x,T)$, $v_{x_i}(x,T)$, $w(x,T)$ *и* $w_{x_i}(x,T)$, $i = 1, \ldots, n$;

2. *для функций* $\varphi(x)$ *из пространства* $W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *имеет место неравенство*

$$\int_D A_0\varphi \cdot B_0\varphi dx \geq k \sum_{i,j=1}^n \int_D \varphi^2_{x_ix_j} dx - K||\varphi||^2_{L_2(D)}, \tag{16}$$

где положительные постоянные k *и* K *зависят лишь от коэффициентов операторов* A_0 *и* B_0 *и от области* D *(см. доказательство второго основного неравенства для эллиптических операторов* [6]*).*

Используя условия теоремы, неравенство Юнга и оценку (11), нетрудно получить неравенство

$$||A_0v(x,T)||^2_{L_2(D)} + ||A_0w(x,T)||^2_{L_2(D)} \leq$$

$$\leq \delta(||A_0v||^2_{L_2(Q^+)} + ||A_0w||^2_{L_2(Q^+)}) + +K_5, \tag{17}$$

где δ есть произвольное положительное число, число K_5 определяется лишь входными данными задачи. Неравенство (17), условия (14) и (15) позволяют далее получить неравенство, аналогичное неравенству (17), но с левой частью $||A_0v(x,0)||^2_{L_2(D)} + ||A_0w(x,0)||^2_{L_2(D)}$. Последнее неравенство, вновь неравенство (16) и неравенство Юнга позволяют вывести из равенства (13) неравенство

$$||A_0v(x,t)||^2_{L_2(D)} + ||A_0w(x,t)||^2_{L_2(D)} \leq$$

$$\leq \delta K_6(||A_0v||^2_{L_2(Q^+)} + ||A_0w||^2_{L_2(Q^+)}) + K_7, \tag{18}$$

где постоянные K_6 и K_7 определяются лишь входными данными задачи. Интегрируя полученное неравенство по переменной t в пределах от 0 до T и далее подбирая число δ достаточно малым, получаем оценку

$$\int\limits_0^T (||A_0v(x,t)||^2_{L_2(D)} + ||A_0w(x,t)||^2_{L_2(D)})dt \le N_3 \tag{19}$$

с постоянной N_3, зависящей лишь от входных данных задачи. Наконец, используя оценку (19) и неравенство (18), приходим к оценке

$$||A_0v(x,t)||^2_{L_2(D)} + ||A_0w(x,t)||^2_{L_2(D)} \le N_4,$$

из которой с помощью второго основного неравенства для эллиптических операторов [6] получаем вторую априорную оценку

$$\sum_{i,j=1}^n (||v_{x_ix_j}(x,t)||^2_{L_2(D)} + ||w_{x_ix_j}(x,t)||^2_{L_2(D)}) \le N_5, \tag{20}$$

где вновь $t\in[0,T]$, постоянная N_5 определяется лишь входными данными задачи.

Последняя априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^n (||v_{x_ix_jt}||^2_{L_2(Q^+)} + ||w_{x_ix_jt}||^2_{L_2(Q^+)}) \le N_6, \tag{21}$$

с постоянной N_6, определяющейся лишь входными данными задачи, является следствием собственно уравнений $(1^{''}_\lambda)$ и оценок (11), (12) и (20).

Оценки (11), (12), (20) и (21) и позволят нам доказать открытость и замкнутость множества Λ.

Пусть $\{\lambda_m\}$ есть последовательность элементов множества Λ, сходящаяся к числу λ_0. Покажем, что λ_0 также будет элементом Λ.

Всякому числу λ_m соответствует решение $\{v_m(x,t), w_m(x,t)\}$ краевой задачи $(1^{''}_{\lambda_m})$, $(2^{''}_{\lambda_m})$, $(3^{''}_{\lambda_m})$, $(4^{''})$ из пространства $V\times V$. Для семейств функций $\{v_m(x,t)\}$ и $\{w_m(x,t)\}$ будут справедливы равномерные по m оценки (11), (12), (20) и (21). Из этих оценок вытекает, что найдутся функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ из пространства V и подпоследовательности $\{v_{m_k}(x,t)\}$ и $\{w_{m_k}(x,t)\}$ такие, что при $k\to\infty$ имеют место сходимости $v_{m_k}(x,t)\to v(x,t)$, $w_{m_k}(x,t)\to w(x,t)$ в пространстве $W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ (для почти всех t из отрезка $[0,T]$), $v_{m_kt}(x,t)\to v_t(x,t)$, $w_{m_kt}(x,t)\to w_t(x,t)$ в пространстве $L_2(0,T;W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$. Но тогда предельные функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ будут решениями уравнений $(1^{''}_{\lambda_0})$ и для них будут выполняться условия $(2^{''}_{\lambda_0})$, $(3^{''}_{\lambda_0})$ и $(4^{''})$. Согласно определению множества Λ, сказанное выше означает, что число λ_0 есть его элемент. Принадлежность же предельной для множества Λ точки ему же и означает его замкнутость.

Докажем теперь открытость множества Λ.

Пусть λ_0 есть элемент множества Λ. Множество Λ будет открытым, если числа $\lambda=\lambda_0+\hat\lambda$ при малой величине $|\hat\lambda|$ также будут принадлежать ему же. Пусть $\hat v(x,t)$ и $\hat w(x,t)$ есть произвольные функции из пространства V. Рассмотрим задачу: *найти функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$, являющиеся в цилиндре Q^+ решениями уравнений*

$$Av_t+\lambda_0Bv=f_1-\hat\lambda B\hat v,\quad Aw_t+\lambda_0Bw=f_2-\hat\lambda B\hat w$$

и такие, что для них выполняются условия

$$v(x,0)=\lambda_0[\varphi_1(x)v(x,T)+\varphi_2(x)w(x,T)]+$$

$$+\hat\lambda[\varphi_1(x)\hat v(x,T)+\varphi_2(x)\hat w(x,T)]+\varphi_0(x),$$
$$w(x,0)=\lambda_0[\psi_1(x)v(x,T)+\psi_2(x)w(x,T)]+$$
$$+\hat\lambda[\psi_1(x)\hat v(x,T)+\psi_2(x)\hat w(x,T)]+\psi_0(x),$$

и условия $(4^{''})$.

Вследствие принадлежности числа λ_0 множеству Λ и функций $\hat v(x,t)$ и $\hat w(x,t)$ пространству V эта задача имеет решение $\{v(x,t),w(x,t)\}$, принадлежащее пространству $V\times V$. Тем самым поставленная выше задача порождает оператор $\mathcal{L}$, переводящий пространство $V\times V$ в себя — $\mathcal{L}(\{\hat v,\hat w\})=\{v,w\}$. Покажем, что при малой величине $|\hat\lambda|$ этот оператор будет сжимающим.

Пусть $\{\hat v_1,\hat w_1\}$, $\{\hat v_2,\hat w_2\}$ — элементы пространства $V\times V$, $\{v_1,w_1\}$, $\{v_2,w_2\}$ — соответствующим им образы при действии оператора $\mathcal{L}$. Обозначим $\hat v=\hat v_1-\hat v_2$, $\hat w=\hat w_1-\hat w_2$, $v=v_1-v_2$, $w=w_1-w_2$. Имеют место равенства

$$Av_t+\lambda_0Bv=-\hat\lambda B\hat v,\quad Aw_t+\lambda_0Bw=-\hat\lambda B\hat w$$

$$v(x,0)=\lambda_0[\varphi_1(x)v(x,T)+\varphi_2(x)w(x,T)]+\hat\lambda[\varphi_1(x)\hat v(x,T)+\varphi_2(x)\hat w(x,T)],$$
$$w(x,0)=\lambda_0[\psi_1(x)v(x,T)+\psi_2(x)w(x,T)]+\hat\lambda[\psi_1(x)\hat v(x,T)+\psi_2(x)\hat w(x,T)].$$

Повторяя доказательство оценок (11), (12), (20) и (21), нетрудно получить неравенство

$$||v||_V+||w||_V\le M\cdot|\hat\lambda|(||\hat v||_V+||\hat w||_V),$$

где постоянная M зависит лишь от исходных данных задачи. Если теперь число $\hat\lambda$ будет таким, что будет выполняться неравенство $M|\hat\lambda|<1$, то оператор $\mathcal{L}$ как раз и станет сжимающим оператором. У сжимающего оператора есть неподвижная точка — элемент $\{v,w\}$ пространства $V\times V$, для которого выполняется равенство $\mathcal{L}(\{v,w\})=\{v,w\}$. Очевидно, что функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ будут удовлетворять уравнениям $(1^{''}_\lambda)$ и условиям $(2^{''}_\lambda)$, $(3^{''}_\lambda)$, $\lambda=\lambda_0+\hat\lambda$, а также условиям $(4^{''})$. Но тогда число λ будет принадлежать множеству Λ, что и дает его открытость.

Как уже говорилось выше, непустота, открытость и замкнутость множества Λ означает его совпадение со всем отрезком $[0,1]$. В свою очередь, совпадение множества Λ с отрезком $[0,1]$ означает, что задача $(1^{''})$–$(4^{''})$ имеет решение $\{v(x,t),w(x,t)\}$, принадлежащее пространству $V\times V$.

Теорема доказана.

Приведем необходимую для дальнейшего теорему о повышении гладкости решений задачи $(1^{''})$–$(4^{''})$ по переменной t (безусловно, эта теорема имеет и самостоятельное значение).

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1, и пусть дополнительно функции $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$ имеют производные по t до порядка p включительно, принадлежащие пространству $L_2(Q^+)$. Тогда решение $\{v(x,t),w(x,t)\}$ задачи $(1^{''})$–$(4^{''})$ будет таким, что производные функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$ по t до порядка p включительно будут принадлежать пространству V.*

Доказательство. Рассмотрим случай $p=1$. Принадлежность функций f_1, f_2, f_{1t} и f_{2t} пространству $L_2(Q^+)$ дает включения $f_1(x,0)\in L_2(D)$, $f_2(x,0)\in L_2(D)$. Эти включения, принадлежность функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$ пространству V и собственно уравнения $(1^{''})$ далее дают включения $Av_t(x,0)\in L_2(D)$, $Aw_t(x,0)\in L_2(D)$. Отсюда и из условий $(4^{''})$ следует, что функции $\varphi_{01}(x)=v_t(x,0)$ и $\psi_{01}(x)=w_t(x,0)$ будут принадлежать пространству $W_2^2(D)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ [6]. Из теоремы 1 теперь вытекает, что функции $v_t(x,t)$ и $w_t(x,t)$ как решения задач

$$Av_{tt}+Bv_t=f_{1t},\qquad Aw_{tt}+Bw_t=f_{2t},$$

$$v_t(x,0)=\varphi_{01}(x),\qquad w_t(x,0)=\psi_{01}(x),$$

$$v_t(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)}=0,\quad w_t(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)}=0$$

будут принадлежать пространству V, что и означает справедливость теоремы 2 при $p=1$.

Переходя от $p=1$ к $p=2$, и так далее, получаем, что теорема 2 будет справедлива для любого натурального числа p.

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая теорема о разрешимости краевой задачи (1)–(4).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть функция $f(x,t)$ имеет производные по переменной t до порядка p включительно, принадлежащие пространству $L_2(Q)$. Тогда краевая задача (1)–(4) имеет решение $u(x,t)$ такое, что для него выполняются условия (2) и (3), функция $u(x,t)$ и её производные по t до порядка p включительно принадлежат пространству $L_\infty(-T,T;W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$ функция $u_t(x,t)$ и её производные по t до порядка p включительно принадлежат пространствам $L_2(-0,T;W_2^2(D)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$ и $L_2(-T,0;W_2^2(D)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$.*

Перейдем к исследованию разрешимости задачи (1)–(4) в случае эллиптико–параболических операторов A и B.

Как и ранее, мы вначале изучим разрешимость задачи $(1'')$–$(4'')$.

Определим функции $F_{k,B}$, $G_{k,B}$, $k=1,2$, и Φ_B так же, как мы определяли функции $F_{k,A}$, $G_{k,A}$ и Φ_A, но с заменой функций $a^{ij}(x)$ на функции $b^{ij}(x)$. Далее, определим квадратичные формы и функции, которые понадобятся ниже.

Пусть $\varphi(x)$ есть функция из пространства $W_2^2(D)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Интегрируя по частям, нетрудно вывести равенство

$$\int\limits_D A_0\varphi\cdot B_0\varphi dx=\int\limits_D a^{ij}b^{kl}\varphi_{x_jx_k}\varphi_{x_lx_i}dx+$$

$$+\int\limits_D[a^{ij}_{x_k}b^{kl}_{x_i}\varphi_{x_j}\varphi_{x_l}-\frac{1}{2}(a^{ij}_{x_k}b^{kl})_{x_l}\varphi_{x_i}x_j-\frac{1}{2}(a^{ij}b^{kl}_{x_i})_{x_j}\varphi_{x_k}\varphi_{x_l}]dx+$$

$$+\int\limits_\Gamma[a^{ij}b^{kl}_{x_i}\varphi_{x_j}\varphi_{x_l}\nu_k-a^{ij}b^{kl}_{x_k}\varphi_{x_j}\varphi_{x_l}\nu_i-\frac{1}{2}a^{ij}_{x_k}b^{kl}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}\nu_l-\frac{1}{2}a^{ij}b^{kl}_{x_i}\varphi_{x_k}\varphi_{x_l}\nu_j+$$

$$+a^{ij}b^{kl}\varphi_{x_j}\varphi_{x_l}\nu_k-a^{ij}b^{kl}\varphi_{x_j}\varphi_{x_kx_l}\nu_i]ds.\qquad(22)$$

Подынтегральное выражение второго интеграла правой части данного равенства в фиксированной точке x области D представляет собой квадратичную форму относительно вектора $\xi=\operatorname{grad}\varphi$; будем обозначать эту форму $c_{AB}(x,\xi)$. Далее, представляя граничный интеграл правой части равенства (22) в виде суммы интегралов по локальным гладким компонентам $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_r$ (что возможно), переходя на каждой компоненте к местным координатам и используя обращение функции $\varphi(x)$ в нуль на границе, мы можем преобразовать граничный интеграл к виду

$$\sum_{k=1}^r\int\limits_{\tilde\Gamma_k}c_{k,AB}(y_1,\ldots,y_{n-1})\tilde\varphi^2_{y_n}(y_1,y_{n-1},0)dy_1,\ldots dy_{n-1},\qquad(23)$$

где $\tilde{\Gamma}_k$ есть образ компоненты Γ_k при преобразовании этой компоненты в часть плоскости $y_n = 0$. Определим также необходимые подмножества границы Γ.

Аналогичным образом преобразуя интеграл

$$\int\limits_D (A_0\varphi)^2 dx,$$

получаем квадратичную форму $c_A(x,\xi)$ и функции $c_{k,A}(y_1,\ldots,y_{n-1})$.

Определим теперь необходимые подмножества границы Γ области D.

Пусть Γ^0 есть множество точек Γ в которых оба оператора A_0 и B_0 эллиптичны. Для фиксированного малого положительного числа δ_0 определим множество Γ^{0,δ_0} как множество точек из Γ^0, отстоящих от границы Γ^0 на расстояние, не меньшее числа δ. Наконец, положим $\Gamma^{1,\delta_0} = \Gamma\backslash\Gamma^{0,\delta_0}$; без ограничения общности можно считать, что множество Γ^{1,δ_0} образовано локальными гладкими компонентами $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_{r_0}$, $r_0 \le 2$.

Теорема 4. *Пусть на множестве $\bar{D}$ операторы A_0 и B_0 симметричны и эллиптико–параболичны, оператор $A_0 + B_0$ эллиптичен, и пусть выполняется условие* (5), *а также условия*

$$[1-\varphi_1^2(x)-\psi_1^2(x)]\xi_0^2 - 2[\varphi_1(x)\varphi_2(x)+\psi_1(x)\psi_2(x)]\xi_0\eta_0+$$

$$+[1-\varphi_2^2(x)-\psi_2^2(x)]\eta_0^2 \ge m_0(\xi_0^2+\eta_0^2),\ m_0>0,\ x\in\bar{D},\ \xi_0\in R,\ \eta_0\in R;$$

$$F_{1,A}(x,\xi_0,\xi,1)-\Phi_A(x,\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)+F_{2,A}(x,\eta_0,\eta,1)\ge m[\xi_0^2+a^{ij}\xi_i\xi_j+a^{ij}(x)\eta_i\eta_j],$$

$$F_{1,B}(x,\xi_0,\xi,1)-\Phi_B(x,\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)+F_{2,B}(x,\eta_0,\eta,1)\ge$$

$$\ge m[\xi_0^2+\eta_0^2+b^{ij}(x)\xi_i\xi_j+b^{ij}(x)\eta_i\eta_j],$$

$$m>0,\ x\in\bar{D},\ \xi_0\in R,\ \eta_0\in R,\ \xi\in R^n,\ \eta\in R^n;$$

$$b_0(x)\le 0, x\in\bar{D};\ \ c_A(x,\xi)\ge 0,\ c_{AB}(x,\xi)\ge 0,\ x\in\bar{D},\ \xi\in R^n;$$

$$c_{k,A}(y_1,\ldots,y_{n-1})\ge 0,\ c_{k,AB}(y_1,\ldots,y_{n-1})\ge 0,\ k=1,\ldots,r_0,(y_1,\ldots,y_{n-1})\in\tilde{\Gamma}_k;$$

$$f_k(x,t)\in L_2(Q^+),\ f_{kt}(x,t)\in L_2(Q^+),\ \varphi_k(x)\in W_\infty^2(D),\ \psi_k(x)\in W_\infty^2(D), k=1,2;$$

$$\varphi_0(x)\in W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D),\ \psi_0(x)\in W_2^2(D)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D).$$

Тогда задача $(1'')$*–*$(4'')$ *имеет решение* $\{v(x,t),w(x,t)\}$ *такое, что функции* $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *принадлежат пространству* $L_\infty(0,T;W_2^2(D)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$*; кроме того, для них выполняются включения*

$$A_0v_t(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(D)), A_0w_t(x,t)\in L_\infty(0,T;L_2(D)),$$

и неравенства

$$\int\limits_D [a^{ij}(x)a^{kl}(x)v_{x_ix_kt}(x,t)v_{x_jx_lt}(x,t)+a^{ij}(x)v_{x_it}(x,t)v_{x_jt}(x,t)]dx<+\infty,$$

$$\int\limits_D [a^{ij}(x)a^{kl}(x)w_{x_ix_kt}(x,t)w_{x_jx_lt}(x,t)+a^{ij}(x)w_{x_it}(x,t)v_{x_jt}(x,t)]dx<+\infty,\ t\in[0,T].$$

Доказательство. Пусть ε есть положительное число. Определим операторы $A_{0,\varepsilon}$, A_ε, $B_{0,\varepsilon}$ и B_ε:

$$A_{0,\varepsilon}=A_0+\varepsilon B_0, A_\varepsilon=A_{0,\varepsilon}+a, B_{0,\varepsilon}=B_0+\varepsilon A_0, B_\varepsilon=B_{0,\varepsilon}+b_0.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$, являющиеся в цилиндре Q^+ решениями уравнений*

$$A_\varepsilon v_t + B_\varepsilon v = f_1,\ A_\varepsilon w_t + B_\varepsilon w = f_2, \tag{24}$$

и такие, что для них выполняются условия $(2'')$–$(4'')$. Поскольку операторы A_ε и B_ϵ эллиптичны (в силу эллиптичности оператора $A_0 + B_0$), то из условий теоремы 4 и из теоремы 2 вытекает, что решение $\{v^\varepsilon(x,t), w^\varepsilon(x,t)\}$ этой задачи будет существовать и будет таким, что функции $v^\varepsilon(x,t)$, $v^\varepsilon_t(x,t)$, $w^\varepsilon(x,t)$ b $w^\varepsilon_t(x,t)$ будут принадлежать пространству V.

Повторяя доказательство оценок (11) и (12), и вновь учитывая эллиптичность оператора $A_0 + B_0$, нетрудно установить, что для решений задачи (24), $(2'')$–$(4'')$ имеет место первая априорная оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_D [a^{ij}_\varepsilon (v^\varepsilon_{x_i\tau} v^\varepsilon_{x_j\tau} + w^\varepsilon_{x_i\tau} w^\varepsilon_{x_j\tau}) + {v^\varepsilon_\tau}^2 + {w^\varepsilon_\tau}^2] dx d\tau +$$

$$+ ||v^\varepsilon(x,t)||^2_{W^1_2(D)} + ||w^\varepsilon(x,t)||^2_{W^1_2(D)} \le M_1, \tag{25}$$

где t есть произвольное число из отрезка $[0,T]$, M_1 есть число, определяющее исходными данными задачи, но не зависящее от ε.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_D [(A_\varepsilon v^\varepsilon_\tau + B_\varepsilon v^\varepsilon) A_{0,\varepsilon} v^\varepsilon + (A_\varepsilon w^\varepsilon_\tau + B_\varepsilon w^\varepsilon) A_{0,\varepsilon} w^\varepsilon] dx d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_D [f_1 \cdot A_{0,\varepsilon} v^\varepsilon + f_2 \cdot A_{0,\varepsilon} w^\varepsilon] dx d\tau. \tag{26}$$

Равенство (22) и условия теоремы дают для функции v^ε неравенство

$$\int\limits_D A_0 v^\varepsilon(x,t) \cdot B_0 v^\varepsilon(x,t) dx \ge \int\limits_D a^{ij} b^{kl} v^\varepsilon_{x_j x_k}(x,t) v^\varepsilon_{x_l x_i}(x,t) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma^{0,\delta_0}} [a^{ij} b^{kl}_{x_j} v^\varepsilon_{x_j}(x,t) v^\varepsilon_{x_l}(x,t)\nu_k - a^{ij} b^{kl}_{x_k} v^\varepsilon_{x_j}(x,t) v^\varepsilon_{x_l}(x,t)\nu_i -$$

$$-\frac{1}{2} a^{ij}_{x_k} b^{kl} v^\varepsilon_{x_i}(x,t) v^\varepsilon_{x_j}(x,t)\nu_l - \frac{1}{2} a^{ij} b^{kl}_{x_i} v^\varepsilon_{x_k}(x,t) v^\varepsilon_{x_l}(x,t)\nu_j] ds +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma^{0,\delta_0}} [a^{ij} b^{kl} v^\varepsilon_{x_j}(x,t) v^\varepsilon_{x_i x_l}(x,t)\nu_k - a^{ij} b^{kl} v^\varepsilon_{x_j}(x,t) v^\varepsilon_{x_k x_l}(x,t)\nu_j] ds =$$

$$= I_D + I_1 + I_2. \tag{27}$$

На множестве Γ^{0,δ_0} оба оператора A_0 и B_0 строго эллиптичны. Следовательно можно указать подобласть D_0 области D такую, что на этой подобласти оба оператора A_0 и B_0 по-прежнему будут строго эллиптичны, и при этом множество Γ^{0,δ_0} будет частью границы области D_0. Но тогда будет выполняться неравенство

$$\int\limits_D A_0 v^\varepsilon(x,t) \cdot B_0 v^\varepsilon(x,t) dx \ge d_0 \sum_{i,k=1}^n \int\limits_{D_0} v^\varepsilon_{x_i x_k}(x,t) dx + I_1 + I_2,$$

где d_0 есть положительное число, определяющееся постоянными эллиптичности операторов A_0 и B_0 на области D_0.

Далее, граничный интеграл I_2 правой части неравенства (27) можно преобразовать к виду (23). Вследствие этого модули граничных интегралов I_1 и I_2 можно оценить сверху величиной

$$d_1 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma^{0,\delta_0}} v_{x_k}^{\varepsilon^2}(x,t)ds;$$

последнюю величину, в свою очередь, с помощью теорем вложения можно оценить сверху величиной

$$\delta \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{D_0} v_{x_i x_k}^{\varepsilon^2}(x,t)dx + c(\delta)||v^\varepsilon(x,t)||^2_{L_2(D)},$$

где δ есть произвольное положительное число. Выбирая число δ равным $\frac{d_0}{2}$ и отбрасывая неотрицательные слагаемые, окончательно получаем неравенство

$$\int\limits_D A_0 v^\varepsilon(x,t) \cdot B_0 v^\varepsilon(x,t)dx \geq -C||v^\varepsilon(x,t)||^2_{L_2(D)}, \tag{28}$$

где C есть некоторая постоянная, определяющаяся коэффициентами операторов A_0 и B_0 и областью D, t есть произвольное число из отрезка $[0,T]$.

Очевидно, что неравенство (28) будет выполняться и для функции $w^\varepsilon(x,t)$.

Вернемся к равенству (26). Полагая в этом равенстве $t = T$, интегрируя по частям, используя неравенство (28) и соответствующее неравенство для функции w^ε, оценку (25) и в целом действуя далее аналогично тому, как мы действовали при доказательстве оценки (20), получаем оценку

$$||A_{0,\varepsilon} v^\varepsilon(x,t)||_{L_2(D)} + ||A_{0,\varepsilon} w^\varepsilon(x,t)||_{L_2(D)} \leq M_2, \tag{29}$$

где $t \in [0,T]$, постоянная M_2 определяется исходными данными задачи и не зависит от ε.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_D [(A_\varepsilon v_\tau^\varepsilon + B_\varepsilon v^\varepsilon)B_{0,\varepsilon} v_\tau^\varepsilon + (A_\varepsilon w_\tau^\varepsilon + B_\varepsilon w^\varepsilon)B_{0,\varepsilon} w_\tau^\varepsilon]dxd\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_D [f_1 \cdot B_{0,\varepsilon} v_\tau^\varepsilon + f_2 \cdot B_{0,\varepsilon} w_\tau^\varepsilon]dxd\tau. \tag{30}$$

Выполняя в равенстве (30) действия, в целом аналогичные действиям, которые мы выполняли при анализе равенств (7) и (26) — с отличием лишь в том, что мы должны использовать неравенства типа неравенства (28), но для функций v_τ^ε и w_τ^ε, и что в правой части мы должны выполнить интегрирование по частям по переменной τ — мы приходим к оценке

$$\int\limits_0^t \int\limits_D b_\varepsilon^{ij}(v_{x_i\tau}^\varepsilon v_{x_j\tau}^\varepsilon + w_{x_i\tau}^\varepsilon w_{x_j\tau}^\varepsilon)dxd\tau +$$

$$+||B_{0,\varepsilon} v^\varepsilon(x,t)||^2_{L_2(D)} + ||B_{0,\varepsilon} w^\varepsilon(x,t)||^2_{L_2(D)} \leq M_3, \tag{31}$$

где $t \in [0,T]$, постоянная M_3 определяется исходными данными задачи и не зависит от ε.

Оценки (29) и (31) означают, что имеют место равенства

$$(1+\varepsilon)(A_0 v^\varepsilon + B_0 v^\varepsilon) = g_1^\varepsilon(x,t), (1+\varepsilon)(A_0 w^\varepsilon + B_0 w^\varepsilon) = g_2^\varepsilon(x,t), \tag{32}$$

причем правые части этих равенств равномерно по ε ограничены в пространстве $L_\infty(0,T;L_2(D))$. Строгая эллиптичность оператора A_0+B_0, второе основное неравенство для эллиптических операторов [6] и оценка (25) позволяют с помощью равенств (32) получить оценку

$$||v^\varepsilon(x,t)||_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))} + ||w^\varepsilon(x,t)||_{L_\infty(0,T;W_2^2(D))} \leq M_4 \tag{33}$$

с постоянной M_4, не зависящей от ε.

Далее, из оценки (33) следует, что выполняются равенства

$$A_0 v_t^\varepsilon + \varepsilon B_0 v_t^\varepsilon = \bar{g}_1^\varepsilon(x,t), \quad A_0 w_t^\varepsilon + \varepsilon B_0 w_t^\varepsilon = \bar{g}_2^\varepsilon(x,t),$$

причем вновь правые части этих равенств ограничены в пространстве $L_\infty(0,T;L_2(D))$ равномерно по ε. Умножая эти равенства вначале на функции $v_t^\varepsilon(x,t)$ и $w_t^\varepsilon(x,t)$, затем на функции $A_0 v_t^\varepsilon$ и $A_0 w_t^\varepsilon$ соответственно, интегрируя по области D и используя условия теоремы, приходим к неравенствам

$$\int\limits_D \{[A_0 v_t^\varepsilon(x,t)]^2 + [A_0 w_t^\varepsilon(x,t)]^2\} dx \leq M_5, \tag{34}$$

$$\varepsilon \int\limits_D \{[B_0 v_t^\varepsilon(x,t)]^2 + [B_0 w_t^\varepsilon(x,t)]^2\} dx \leq M_6, \tag{35}$$

$$\int\limits_D [a^{ij}(x)a^{kl}(x)v^\varepsilon_{x_i x_k t}(x,t)v^\varepsilon_{x_j x_l t}(x,t) + a^{ij}(x)v^\varepsilon_{x_i t}(x,t)v^\varepsilon_{x_j t}(x,t) +$$

$$+a^{ij}(x)a^{kl}(x)w^\varepsilon_{x_i x_k t}(x,t)w^\varepsilon_{x_j x_l t}(x,t) + a^{ij}(x)w^\varepsilon_{x_i t}(x,t)w^\varepsilon_{x_j t}(x,t)]dx \leq M_7, \tag{36}$$

в которых $t \in [0,T]$, постоянные $M_5 - M_7$ зависят лишь от исходных данных задачи и не зависят от ε.

Оценки (33)–(36) позволяют перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в пределе получить решение задачи $(1'')$–$(4'')$. Прежде всего заметим, что из оценки (35) следуют сходимости $\varepsilon B_0 v_t^\varepsilon(x,t) \to 0$, $\varepsilon B_0 w_t^\varepsilon(x,t) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве $L_2(D)$ для почти всех чисел t из отрезка $[0,T]$. Далее, оценки (33), (34), (36) позволяют стандартным образом показать существование подпоследовательностей $\{v^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ и $\{w^{\varepsilon_m}(x,t)\}$, а также предельных функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$ таких, что при $m \to \infty$ будут выполняться сходимости $\varepsilon_m \to 0$, $Av_t^{\varepsilon_m} + Bv^{\varepsilon_m} \to Av_t + Bv$, $Aw_t^{\varepsilon_m} + Bw^{\varepsilon_m} \to Aw_t + Bw$ в пространстве $L_2(D)$ для почти всех чисел t из отрезка $[0,T]$, $v^{\varepsilon_m}(x,0) \to v(x,0)$, $w^{\varepsilon_m}(x,0) \to w(x,0)$, $v^{\varepsilon_m}(x,T) \to v(x,T)$, $w^{\varepsilon_m}(x,T) \to w(x,T)$, почти всюду в области D. Из этих сходимостей и следует, что предельные функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ дадут решение краевой задачи $(1'')$–$(4'')$. Кроме того, оценки (33), (34), (36) и (37) для предельных функций $c(x,t)$ и $w(x,t)$ сохранятся, что и будет означать, что функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ будут представлять собой требуемое решение задачи $(1'')$–$(4'')$.

Теорема полностью доказана.

Сделаем несколько замечаний.

1. Из теоремы 4 очевидным образом следует теорема о разрешимости задачи (1)–(4).

2. Следствием теоремы 4 является тот факт, что при выполнении всех ее условий функции $v(x,t)$ и $w(x,t)$ в окрестности любой точки эллиптичности оператора A_0 будут иметь все производные (обобщенные), входящие в уравнения $(4^{''})$.

3. Собственно задача $(1^{''})$–$(4^{''})$ может быть исследована в более общей, нежели представленная выше, ситуации. В частности, одинаковые уравнения $(4^{''})$ могут быть заменены разными уравнениями, коэффициенты этих уравнений могут зависеть от переменной t, уравнения могут содержать слагаемые, связывающие в каждой из уравнений функции v и w.

4. Условия теоремы 4 на квадратичные формы $c_{AB}(x,\xi)$ и $c_A(x,\xi)$, а также на функции $c_{k,AB}$ и $c_{k,A}$ в целом представляют собой иное по сравнению с «условием характеристической выпуклости» [3–5] условие. Эти условия выполняются, например, если оператор A вырождается всюду на границе Г. Другой пример соответствует ситуации, когда операторы A_0 и B_0 есть операторы с постоянными коэффициентами. В частности, если оператор A_0 есть оператор Лапласа по первым n_1 переменным $(1 \leq n_1 < n)$, оператор B_0 есть оператор Лапласа по оставшимся переменным, то условия теоремы 4 на формы $c_{AB}(x,\xi)$ и $c_A(x,\xi)$, а также на функции $c_{k,AB}$ и c_{AB} представляют собой условия выпуклости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романко В. К.* Задача о сопряжении дифференциально–операторных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, N 1. С. 124–135.
2. *Пятков С. Г.* Об одном подходе к задачам сопряжения // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1983. С. 125–135.
3. *Кожанов А. И.* О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений // Докл. АН СССР. 1992. Т. 236, N 2. С. 781–786.
4. *Kozhanov A. I.* Certain classes of generate Sobolev–Galpern equations // Siberian Adv. Math. 1994. T. 4, V. 1. P. 65–94.
5. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Кожанов Александр Иванович
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
kozhanov@math.nsc.ru