УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАТАЛИТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В КИПЯЩЕМ СЛОЕ

Н. А. Люлько

Исследуется одномерная нестационарная математическая модель химического превращения вещества A в вещество B в кипящем слое катализатора высотой h. Газообразное вещество A подается на вход слоя с некоторой скоростью, в результате чего твердые частицы катализатора приходят в движение. Одна часть частиц (их доля α) движется вверх, другая часть частиц (их доля $1-\alpha$) движется вниз. В ходе химической реакции на поверхности движущихся частиц катализатора вещество A превращается в вещество Az.

Обозначим через $c(x,t)$ концентрацию вещества A в слое в момент t на высоте x, на входе в слой концентрация считается постоянной, т.е. $c(0,t)=c_0$, $t\geq 0$. Функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ обозначают концентрацию вещества Az на частицах катализатора, двигающихся вверх и вниз, соответственно.

Используя балансовые соотношения и обезразмеривая имеющиеся физические величины, мы получаем задачу для определения функций $u(x,t)$, $v(x,t)$, $c(x,t)$ в полуполосе $\Pi=\{(x,t): 0<x<1,\, t>0\}$

$$\begin{cases} \alpha u_t+\gamma u_x=\beta(v-u)+\alpha\Big(f(c)-(1+f(c))u\Big), \\ (1-\alpha)v_t-\gamma v_x=\beta(v-u)+(1-\alpha)\Big(f(c)-(1+f(c))v\Big), \end{cases} \qquad (1)$$

$$u=v, \qquad x=0,h, \qquad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad v(x,0)=v_0(x), \qquad 0\leq u_0,v_0\leq 1, \qquad (3)$$

$$\frac{dc}{dx}=-f(c)\Big(\alpha(1-u)+(1-\alpha)(1-v)\Big), \quad c|_{x=0}=c_0. \qquad (4)$$

Здесь функция $f(c)$ характеризует скорость химической реакции и представляет собой непрерывную, монотонно возрастающую функцию, такую, что $f(c)=0$ при $c\leq 0$ и $f(c)>0$ при $c>0$. Параметры β, γ — положительные числа, β — коэффициент обмена между частицами катализатора, γ — скорость циркуляции частиц катализатора. Число α фиксировано для данного слоя и лежит в интервале $(0,1)$.

Данная модель (1)–(4) в стационарном режиме использовалась для численных расчетов в [1]. Поэтому представляет практический интерес теоретическое исследование свойств данной модели: существование стационарного и нестационарного решений, устойчивость или неустойчивость стационарного решения и т.д.

В. П. Гаевым было доказано, что при условии непрерывной дифференцируемости функции $f(c)$ существует единственное стационарное решение u^c, v^c, c^c

задачи (1)–(4), причем $0 \le u^c$, $v^c \le 1$. Если же у рассматриваемой задачи существует гладкое нестационарное решение u, v, c, то справедливо

$$V(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} V^c = \int\limits_0^h \Big(\alpha u^c + (1-\alpha)v^c\Big)dx, \quad c(h,t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} c^c(h),$$

где $V(t) = \int\limits_0^h \Big(\alpha u + (1-\alpha)v\Big)dx$. Эти соотношения обозначают, что количество вещества Az на поверхности катализатора в слое в момент t стабилизируетя к величине V^c, а количество вещества A на выходе из слоя стабилизируется к величине $c^c(h)$.

В настоящей работе для задачи (1)–(4) доказывается существование и единственность гладкого решения для всех $t > 0$.

Линейная задача

Рассмотрим в полуполосе Π смешанную задачу для линейной гиперболической системы

$$\begin{cases} u_t + \frac{\gamma}{\alpha}u_x = \frac{\beta}{\alpha}(v-u) + g(x,t) - (1+g(x,t))u, \\ v_t - \frac{\gamma}{1-\alpha}v_x = \frac{\beta}{1-\alpha}(u-v) + g(x,t) - (1+g(x,t))v, \end{cases}$$

$$u = v, \qquad x = 0, h, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \qquad 0 \le u_0, \;\; v_0 \le 1 \; .$$

Здесь функция $g(x,t)$ предполагается известной. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $g(x,t) \ge 0$ непрерывно дифференцируемая функция в полуполосе $\overline{\Pi}$. Если $u_0, v_0 \in C^1[0,h]$ и удовлетворяют условиям согласования*

$$u_0(i) = v_0(i), \quad \frac{u_{0x}(i)}{\alpha} = \frac{-v_{0x}(i)}{1-\alpha}, \quad i = 0, h, \tag{6}$$

то для всех $t > 0$ существует единственное непрерывно дифференцируемое решение $U(x,t) = (u(x,t), v(x,t))$ задачи (5), *причем*

$$0 \le u(x,t), v(x,t) \le 1. \tag{7}$$

Доказательство. Существование классического решения $U(x,t)$ задачи (5) в полуполосе Π для любой гладкой функции $g(x,t)$ следует из работы [2]. В случае, когда $g(x,t) \ge 0$, докажем оценку (7).

Так как функция $U(x,t)$ непрерывна в полуполосе $\overline{\Pi}$, то для получения оценки (7) мы исследуем поведение $U(x,t)$ на границе и внутри Π. Обозначим $U_m(x,t) = \min(u(x,t), v(x,t))$, $U^m(x,t) = \max(u(x,t), v(x,t))$.

I. Рассмотрим сторону $\Gamma_1 = \Big\{(x,t) : x = 0, t > 0\Big\}$ (сторона $\Gamma_h = \Big\{(x,t) : x = h, t > 0\Big\}$ исследуется аналогично). В силу граничных условий $u = v$ на стороне Γ_1, из дифференциальной системы (5) имеем, что при $t > 0$ справедливы соотношения

$$u_t = v_t, \qquad \frac{u_x}{\alpha} = \frac{-v_x}{1-\alpha} \; . \tag{8}$$

Проанализируем всевозможные случаи поведения функции $U(x,t)$ на стороне Γ_1.

1. Если $u_x \neq 0$ в точке $(0,t_1)$, то из соотношений (8) следует, что $v_x \neq 0$ в этой же точке, и знаки этих производных противоположны, т. е. одна из функций возрастает по переменной x, а другая убывает по этой же переменной. Так как $u = v$ в точке $(0,t_1)$, то минимум функции $U_m(x,t_1)$ и максимум функции $U^m(x,t_1)$ будет внутри Π или на стороне Γ_h.

2. Пусть $u_x = 0$ в точке $(0,t_1)$, тогда из соотношений (8) следует, что $v_x = 0$ в этой же точке. Из системы (5) имеем равенство

$$u_t = \Big(1 + g(0,t_1)\Big)\left(\frac{g(0,t_1)}{1+g(0,t_1)} - u\right),$$

откуда следует:

i) $u(0,t_1) < \frac{g(0,t_1)}{1+g(0,t_1)} < 1$, если $u_t > 0$, ii) $u(0,t_1) > \frac{g(0,t_1)}{1+g(0,t_1)} \geq 0$, если $u_t < 0$, iii) $u(0,t_1) = \frac{g(0,t_1)}{1+g(0,t_1)}$, если $u_t = 0$.

Рассмотрим произвольный прямоугольник $\Pi_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq h,\ 0 \leq t \leq T\}$, $T > 0$. Обозначим $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_h \cup \{(x,t) : 0 \leq x \leq h, t = 0\}$ и $\Gamma_T = \Pi_T \cap \Gamma$. Из рассуждений в пунктах 1, 2 следует неравенство

$$\left(0, U_m(x,t)\Big|_{\Pi_T\setminus\Gamma_T}\right) \leq U_m(x,t)\Big|_{\Gamma_T} \leq U^m(x,t)\Big|_{\Gamma_T} \leq \left(1, U^m(x,t)\Big|_{\Pi_T\setminus\Gamma_T}\right). \tag{9}$$

II. Рассмотрим внутренность $\overset{\circ}{\Pi}_T$ прямоугольника Π_T и обозначим: $M_u = \max\limits_{\overset{\circ}{\Pi}_T} u(x,t)$, $m_u = \min\limits_{\overset{\circ}{\Pi}_T} u(x,t)$, $M_v = \max\limits_{\overset{\circ}{\Pi}_T} v(x,t)$, $m_v = \min\limits_{\overset{\circ}{\Pi}_T} v(x,t)$, если эти величины существуют. Рассмотрим случаи:

1. Пусть $M_u = u(x_0,t_0)$, $(x_0,t_0) \in \overset{\circ}{\Pi}_T$. а) Предположим, что $M_u \geq v(x_0,t_0)$, тогда в точке (x_0,t_0) выполнено соотношение $u_t = u_x = 0$ и из уравнений (5) имеем

$$\frac{\beta}{\alpha}(u-v) = \Big(1 + g(x_0,t_0)\Big)\left(\frac{g(x_0,t_0)}{1+g(x_0,t_0)} - u\right),$$

т. е. справедливо, что $u(x_0,t_0) \leq \frac{g(x_0,t_0)}{1+g(x_0,t_0)} < 1$.

б) Предположим, что $M_u < v(x_0,t_0)$, тогда либо $M_v > M_u$, либо максимум функции $v(x,t)$ достигается на Γ_T или на верхней стороне Π_T.

2. Пусть $M_v = v(x_0,t_0)$, $(x_0,t_0) \in \overset{\circ}{\Pi}_T$. а) Предположим, что $M_v \geq u(x_0,t_0)$, тогда в точке (x_0,t_0) выполнены соотношения $v_t = v_x = 0$, а из системы (5) имеем

$$\frac{\beta}{\alpha}(v-u) = \Big(1 + g(x_0,t_0)\Big)\left(\frac{g(x_0,t_0)}{1+g(x_0,t_0)} - v\right),$$

т.е. справедливо, что $v(x_0,t_0) \leq \frac{g(x_0,t_0)}{1+g(x_0,t_0)} < 1$.

б) Предположим, что $M_v < u(x_0,t_0)$, тогда либо максимум функции $u(x,t)$ достигается на границе Γ_T или на верхней стороне Π_T, либо $M_u > M_v$. Случай же $M_u > M_v$, т. е. $M_u = u(x_0,t_0) > v(x_0,t_0)$ рассмотрен в 1а).

Аналогичные рассуждения проводятся для функций m_u, m_v. Пусть, например, $m_u = u(x_0,t_0) < v(x_0,t_0)$, тогда $u_t = u_x = 0$ и из системы (5) имеем $u(x_0,t_0) \geq \frac{g(x_0,t_0)}{1+g(x_0,t_0)} \geq 0$. Таким образом, если минимум функции $U_m(x,t)$ и максимум функции $U^m(x,t)$ находятся в $\overset{\circ}{\Pi}_T$, то для них верны оценки

$$0 \leq \min_{\overset{\circ}{\Pi}_T} U_m(x,t) \leq \max_{\overset{\circ}{\Pi}_T} U^m(x,t) \leq 1. \tag{10}$$

Итак, в любом прямоугольнике Π_T минимум непрерывной функции $U_m(x,t)$ и максимум непрерывной функции $U^m(x,t)$ может достигаться или внутри прямоугольника или на его границе. В силу оценок (9), (10) и произвольности $T>0$ теорема доказана.

Нелинейная задача

Рассмотрим в полуполосе Π задачу (1)–(4). Справедлива

Теорема 2. *Пусть функция* $f(c)\in C^2[0,c_0]$, *функции* $u_0(x)$, $v_0(x)\in C^2[0,h]$ *и удовлетворяют условиям согласования* (6). *Тогда в полуполосе* Π *существует единственное непрерывно дифференцируемое решение* $U(x,t)=(u,v), c(x,t)$ *задачи* (1)–(4), *причем* $0\le u,\ v\le 1$.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник Π_T, где T — произвольное положительное число. Докажем, что существуют непрерывно дифференцируемая функция $c(x,t)\in C^1(\Pi_T)$, удовлетворяющая уравнению (4) при $0\le t\le T$, и непрерывно дифференцируемая функция $U(x,t)\in C^1(\Pi_T)$, удовлетворяющая дифференциальной системе (1) при $0<t<T$, а граничным условиям (2) и начальным условиям (3) в обычном смысле. Определим в пространстве $C^1(\Pi_T)$ множество M функций $Z=(z,\omega): M=\{Z\in C^1(\Pi_T), 0\le Z\le 1,\ z(x,0)=u_0(x),\ \omega(x,0)=v_0(x)\}$ и зададим на множестве M оператор $D: DZ=U$.

Здесь $U(x,t)$ — решение линейной задачи (5) с функцией

$$g(x,t)=f(c(x,t)), \tag{11}$$

где $c(x,t)$ — решение задачи

$$\frac{dc}{dx}=-f(c)(\alpha(1-z)+(1-\alpha)(1-\omega)),\ \ c\Big|_{x=0}=c_0. \tag{12}$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение $c(x,t)$ уравнения (12) для $Z\in M$ существует, единственно и представляет собой монотонно убывающую по x функцию из пространства $C^1(\Pi_T)$ такую, что $0<c(x,t)\le c_0$ для всех $(x,t)\in\Pi_T$.

В силу теоремы 1 решение $U(x,t)$ задачи (5) с функцией $g(x,t)$ вида (11) существует и единственно, причем $U(x,t)\in M$. Таким образом, нелинейный оператор D отображает замкнутое выпуклое множество $M\subset C^1(\Pi_T)$ в себя. Для доказательства существования неподвижной точки оператора D применим теорему Шаудэра, доказав для этого, что оператор D компактен в M и непрерывен.

Для доказательства этих утверждений сведем дифференциальную задачу (5) к интегральной, используя при этом подход, изложенный в работе [2]. Итак, рассмотрим задачу (5) с функцией $g(x,t)$ в виде (11), т.е.

$$\begin{cases} u_t+\frac{\gamma}{\alpha}u_x=\frac{\beta}{\alpha}(v-u)+f(c)-(1+f(c))u,\\[2ex] v_t-\frac{\gamma}{1-\alpha}v_x=\frac{\beta}{1-\alpha}(u-v)+f(c)-(1+f(c))v,\end{cases} \tag{13}$$

$$u=v,\qquad x=0,h, \tag{14}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad v(x,0)=v_0(x), 0\le u_0,\ \ v_0\le 1. \tag{15}$$

Здесь $c=c(x,t)\in C^1(\Pi_T)$ — известная функция, которая является решением задачи (12).

Система (13) задает два семейства характеристик, проходящих через каждую точку $(x_0, t_0) \in \Pi : x = \varphi_1(t; x_0, t_0) = \frac{\gamma}{\alpha} t + x_0 - \frac{\gamma}{\alpha} t_0$ и $x = \varphi_2(t; x_0, t_0) = -\frac{\gamma}{1-\alpha} t + x_0 + \frac{\gamma}{1-\alpha} t_0$, т. е. $\varphi_i|_{t=t_0} = x_0$, $i = 1, 2$. Пусть $\chi_i(x_0, t_0) = \inf\{t : (\varphi_i(t; x_0, t_0), t) \in \overline{\Pi}\}$, тогда, очевидно,

$$\chi_1(x_0, t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x_0 \le h, \quad t_0 \le \frac{\alpha}{\gamma} x_0, \\ t_0 - \frac{\alpha}{\gamma} x_0, & 0 \le x_0 \le h, \quad t_0 > \frac{\alpha}{\gamma} x_0, \end{cases}$$

$$\chi_2(x_0, t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x_0 \le h, \quad t_0 + \frac{(1-\alpha)}{\gamma} x_0 \le \frac{(1-\alpha)}{\gamma} h, \\ t_0 + \frac{(1-\alpha)}{\gamma} x_0 - \frac{(1-\alpha)}{\gamma} h, & 0 \le x_0 \le h, \quad t_0 + \frac{(1-\alpha)}{\gamma} x_0 > \frac{(1-\alpha)}{\gamma} h. \end{cases}$$

Введем для первого семейства характеристик два множества: $\Pi_1 = \{(x, t) : t \le \frac{\alpha}{\gamma} x,\ 0 \le x \le h\}$ и $\Pi_1^0 = \{(x, t) : t > \frac{\alpha}{\gamma} x,\ 0 \le x \le h\}$. Нетрудно видеть, что если точка $(x_0, t_0) \in \Pi_1$, то характеристика первого семейства, проведенная из этой точки, «выходит» с нижнего основания полуполосы Π, т.е. $\varphi_1(\chi_1(x_0, t_0); x_0, t_0) \in [0, h]$. Если же точка $(x_0, t_0) \in \Pi_1^0$, то характеристика, проведенная из этой точки, «выходит» со стороны Γ_1, т. к. $\varphi_1(\chi_1(x_0, t_0); x_0, t_0) = 0$.

Для второго семейства характеристик также введем два множества: $\Pi_2 = \{(x, t) : t + \frac{(1-\alpha)}{\gamma} x \le \frac{(1-\alpha)}{\gamma} h,\ 0 \le x \le h\}$ и $\Pi_2^h = \{(x, t) : t + \frac{1-\alpha}{\gamma} x > \frac{(1-\alpha)}{\gamma} h,\ 0 \le x \le h\}$. Для точек $(x_0, t_0) \in \Pi_2$ имеем, что $\chi_2(x_0, t_0) = 0$, т.е. характеристики второго семейства, проведенные в этих точках, «выходят» с нижнего основания Π. Рассматриваемые характеристики, проведенные в точках $(x_0, t_0) \in \Pi_2^h$, «выходят со стороны Γ_h, т. е. $\varphi_2(\chi_2(x_0, t_0); x_0, t_0) = h$.

Проинтегрируем i-е уравнение системы (13) вдоль соответствующей характеристики $x = \varphi_i(t; x_0, t_0)$, $i = 1, 2$. Тогда, используя граничные условия (14) и начальные данные (15), получим следующую интегральную систему

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \widehat{u}(x_0, t_0) + \\ &+ \int\limits_{\chi_1(x_0, t_0)}^{t_0} \left\{\beta(v - u) + f(c) - \Big(1 + f(c)\Big)u\right\}(x, t)\Bigg|_{\substack{t = \tau \\ x = \varphi_1(\tau; x_0, t_0)}} d\tau, \\ v(x_0, t_0) &= \widehat{v}(x_0, t_0) + \\ &+ \int\limits_{\chi_2(x_0, t_0)}^{t_0} \left\{\beta(u - v) + f(c) - \Big(1 + f(c)\Big)v\right\}(x, t)\Bigg|_{\substack{t = \tau \\ x = \varphi_2(\tau; x_0, t_0)}} d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $(x_0, t_0) \in \Pi_T$ и

$$\widehat{u}(x, t) = \begin{cases} u_0\Big(\varphi_1(0; x, t)\Big), & (x, t) \in \Pi_1, \\ v\Big(0, \chi_1(x, t)\Big), & (x, t) \in \Pi_1^0, \end{cases}$$

$$\widehat{v}(x, t) = \begin{cases} v_0\Big(\varphi_2(0; x, t)\Big), & (x, t) \in \Pi_2, \\ u\Big(h, \chi_2(x, t)\Big), & (x, t) \in \Pi_2^h. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что непрерывно дифференцируемая функция $U(x, t)$ будет решением задачи (13)–(15) тогда и только тогда, когда она будет являться решением интегральной системы (16).

Для системы (13)–(15) (аналогично работам [2, 3]) можно ввести понятие непрерывного обобщенного решения, понимая под этим функцию $U(x,t) \in C(\Pi_T)$, удовлетворяющую для всех рассматриваемых $t \geq 0$ интегральной системе (16). В работе [2] доказана теорема существования такого решения.

Итак, пусть $U(x,t) \in C^1(\Pi_T)$ — решение рассматриваемой задачи (13)–(15), тогда при всех $t \geq 0$ оно удовлетворяет интегральной системе (16). Обозначим $U(t) = \max\limits_{\tau \leq t} \left(\|u(x,\tau)\|_{C[0,h]}\,,\ \|v(x,\tau)\|_{C[0,h]} \right)$, тогда из системы (16) получим (см. [2]) систему

$$U(t) = \begin{cases} K \int\limits_0^t U(\tau) d\tau + K_1 \left(\Phi_0 + \|U_0\|_{C[0,h]} \right), & 0 \leq t \leq \rho, \\ K \left(\int\limits_0^t U(\tau) d\tau + U(t-\rho) \right) + K_1 \left(\Phi_0 + \|U_0\|_{C[0,h]} \right), & t > \rho, \end{cases} \tag{17}$$

где $\rho = \max \left(\frac{\alpha}{\gamma} h, \frac{(1-\alpha)}{\gamma} h \right)$, $\Phi_0 = f(c_0)$, $U_0 = (u_0(x), v_0(x))$.

Здесь и всюду в дальнейшем под нормой вектор–функции будем понимать максимум из норм ее компонент, константы же K, K_1 будут обозначать величины, зависящие только от коэффициентов системы (16) и не зависящие от t. Согласно лемме Гронуолла (см. [2]), из последнего неравенства следует оценка

$$U(t) < K_1 e^{Kt} \left(\|U_0\|_{C[0,h]} + \Phi_0 \right), \ \ t > 0\,. \tag{18}$$

Рассмотрим дифференциальную систему, полученную из системы (13)–(15) дифференцированием по x

$$\begin{cases} u_{xt} + \frac{\gamma}{\alpha} u_{xx} = \frac{\beta}{\alpha}(v_x - u_x) - (1 + f(c))u_x + f_c c_x (1-u) \\ v_{xt} - \frac{\gamma}{1-\alpha} v_{xx} = \frac{\beta}{1-\alpha}(u_x - v_x) - (1 + f(c))v_x + f_c c_x (1-v), \end{cases} \tag{19}$$

$$\frac{u_x}{\alpha} = -\frac{v_x}{1-\alpha}, \qquad x = 0, h,$$

$$u_x(x,0) = u_{0x}, \qquad v_x(x,0) = v_{0x}\,.$$

В силу условий теоремы 2 коэффициенты, входящие в эту систему, являются гладкими в Π_T функциями и для начальных данных u_{0x}, v_{0x} этой задачи выполнены условия согласования нулевого порядка. Поэтому задача (19) имеет непрерывное обобщенное решение $U_x(x,t) \in C(\Pi_T)$, которое является производной по x от решения $U(x,t)$ задачи (13)–(15). Функция $U_x(x,t)$ удовлетворяет интегральной системе, соответствующей задаче (19). Так как функция $c(x,t)$ есть решение задачи (12) и функции $Z(x,t)$, $U(x,t)$ принадлежат множеству M, то из этой интегральной системы описанным выше приемом получаем оценку

$$\|U_x(x,t)\|_{C[0,h]} \leq K_1 e^{Kt} \left(\|U_{0x}\|_{C[0,h]} + \Phi_0 \widehat{\Phi}_0 \right), \ \ t > 0\,.$$

где $\widehat{\Phi}_0 = \max\limits_{[0,c_0]} |f'(c)|$. Отсюда и из оценки (18) и следует нужная оценка для решения $U(x,t)$ задачи (13)–(15)

$$\|U(x,t)\|_{C^1[0,h]} \leq K_1 e^{Kt} \left(\|U_0\|_{C^1[0,h]} + \Phi_1 \right), \ \ t > 0, \tag{20}$$

где константа Φ_1 зависит от $\|f\|_{C^1[0,c_0]}$. Из системы (13) видно, что норма $\|U_t(x,t)\|_{C[0,h]}$ также оценивается правой частью этого неравенства.

Так как коэффициенты системы (19) являются непрерывно дифференцируемыми в Π_T функциями, то, как следует из результатов работы [3], функция

$U_x(x,t)$ будет кусочно–гладким решением этой системы в Π_T. Это означает, что в прямоугольнике Π_T существует конечное число характеристик первого семейства, на которых функции $u_{xx}(x,t)$, $u_{xt}(x,t)$ могут терпеть разрывы только первого рода, и существует конечное число характеристик второго семейства, на которых функции $v_{xx}(x,t)$, $v_{xt}(x,t)$ могут также терпеть разрывы только первого рода. Во всех же остальных точках прямоугольника Π_T рассматриваемые функции будут непрерывны. Из интегральной системы, которой удовлетворяют производные $u_{xx}(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$, получается следующая оценка

$$|U_{xx}| \le K_1 e^{Kt} \left(\|U_0\|_{C^2[0,h]} + \|Z\|_{C^1(\Pi_t)} + \Phi_2\right), \quad t > 0, \tag{21}$$

где константа Φ_2 зависит от $\|f\|_{C^2[0,c_0]}$. Систему (13)–(15) можно продифференцировать по переменной t и такими же рассуждениями доказать, что для функции $U_t(x,t)$ будут справедливы те же свойства гладкости, что и для функции $U_x(x,t)$. Поэтому при $t > 0$ справедливо неравенство

$$(|U_{xx}|, |U_{xt}|, |U_{tt}|) \le K_1 e^{Kt} \left(\|U_0\|_{C^2[0,h]} + \|Z\|_{C^1(\Pi_t)} + \Phi_2\right). \tag{22}$$

Из оценок (20), (22) следует, что оператор D будет компактным в множестве M, так как согласно теореме Арцела он любое ограниченное множество из M будет переводить во вполне ограниченное в $C^1(\Pi_T)$.

Непрерывность оператора D следует из оценки

$$\|U^1 - U^2\|_{C^1(\Pi_T)} \le N(T)\|Z^1 - Z^2\|_{C^1(\Pi_T)}, \tag{23}$$

где $U^i = DZ^i$, $Z^i \in M$, $i = 1,2$. Для получения этой оценки введем в рассмотрение вектор $R = (r,s)$, где $R = U^1 - U^2$, и пусть $c_i(x,t)$ — решение задачи (12), соответствующее функции $Z^i(x,t) \in M$, $i = 1,2$. Функции r,s удовлетворяют следующей системе

$$\begin{cases} r_t + \frac{\gamma}{\alpha} r_x = \frac{\beta}{\alpha}(s - r) - (1 + f(c_2))r + (f(c_1) - f(c_2))(1 - u_1), \\[2mm] s_t - \frac{\gamma}{1-\alpha} s_x = \frac{\beta}{1-\alpha}(r - s) - (1 + f(c_2))s + (f(c_1) - f(c_2))(1 - v_1), \end{cases} \tag{24}$$

$$r = s, \qquad x = 0, h,$$

$$r(x,0) = 0, \qquad s(x,0) = 0,$$

а функция $R_x = (r_x, s_x)$ является непрерывным обобщенным решением следующей задачи

$$\begin{cases} r_{xt} + \frac{\gamma}{\alpha} r_{xx} = \frac{\beta}{\alpha}(s_x - r_x) - (1 + f(c_2))r_x + F_1(x,t), \\[2mm] s_{xt} - \frac{\gamma}{1-\alpha} s_{xx} = \frac{\beta}{1-\alpha}(r_x - s_x) - (1 + f(c_2))s_x + F_2(x,t), \end{cases} \tag{25}$$

$$\frac{r_x}{\alpha} = \frac{-s_x}{1-\alpha}, \qquad x = 0, h,$$

$$r_x(x,0) = 0, \qquad s_x(x,0) = 0\,.$$

Здесь

$$F_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\Big(f(c_1) - f(c_2)\Big)(1 - u_1)\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(c_2)\Big)r,$$

$$F_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\Big(f(c_1) - f(c_2)\Big)(1 - v_1)\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(c_2)\Big)s\,.$$

Из этих систем для функций $R(x,t)$, $R_x(x,t)$ получим оценки в норме $C(\Pi_T)$, используя тот же метод, что и при получении оценки (18). Из системы (24) имеем

$$\|R(x,t)\|_{C[0,h]} \le K_1 e^{Kt} \max_{0\le\tau\le t} \|f(c_1)-f(c_2)\|_{C[0,h]}. \tag{26}$$

Оценим величину $|c_1-c_2|$. Из уравнения (12) следует соотношение

$$\int\limits_{c(x,t)}^{c_0} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int\limits_0^x \Big\{\alpha(1-z)+(1-\alpha)(1-\omega)\Big\}(\xi,t)d\xi\ .$$

Обозначим $G(c)=\int\limits_c^{c_0}\frac{d\xi}{f(\xi)}$, тогда $G(c_1)-G(c_2)=G'(\xi)(c_1-c_2)=\frac{1}{f(\xi)}(c_2-c_1)$, где $\xi\in(c_1,c_2)$. Поэтому справедливо равенство

$$c_1-c_2=f(\xi)\Big(G(c_2)-G(c_1)\Big)=f(\xi)\int\limits_0^x\Big\{\alpha(z_1-z_2)+(1-\alpha)(\omega_1-\omega_2)\Big\}(x,t)dx,$$

откуда имеем

$$\|c_1-c_2\|_{C(\Pi_T)} \le \Phi_0 h\|Z^1-Z^2\|_{C(\Pi_T)}\ . \tag{27}$$

Отсюда и из неравенства (26) следует оценка

$$\|R(x,t)\|_{C(\Pi_T)} \le K_1 e^{KT}\Phi_0\widehat{\Phi}_0 h\|Z^1-Z^2\|_{C(\Pi_T)}\ . \tag{28}$$

Рассмотрим систему (25). Аналогично оценке (26) имеем для функции $R_x(x,t)$ следующее неравенство

$$\|R_x(x,t)\|_{C[0,h]} \le K_1 e^{Kt}\max_{0\le\tau\le t}\|F(x,\tau)\|_{C[0,h]}, \tag{29}$$

где $F=(F_1,F_2)$. Оценим норму $\|F_1(x,t)\|_{C(\Pi_T)}$. Из вида $F_1(x,t)$ имеем

$$|F_1| \le |f_c(c_2)c_{2x}r| + \left|(1-u_1)\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(c_1)-f(c_2)\Big)\right| + \left|u_{1x}\Big(f(c_1)-f(c_2)\Big)\right|. \tag{30}$$

Для оценки первого слагаемого используем неравенство (28) и уравнение (12). Получаем, что $\|f_c(c_2)c_{2x}r\|_{C(\Pi_T)} \le N_1(T)\|Z^1-Z^2\|_{C(\Pi_T)}$.

Для оценки второго слагаемого в правой части формулы (30) рассмотрим выражение

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(c_1)-f(c_2)\Big)\right| = \left|f_c(c_1)(c_{1x}-c_{2x})+c_{2x}\Big(f_c(c_1)-f_c(c_2)\Big)\right| \le$$

$$\le \widehat{\Phi}_0|c_{1x}-c_{2x}| + \Phi_0\Phi_1 h|c_1-c_2|\ .$$

Из уравнения (12) имеем

$$c_{1x}-c_{2x}=\Big(f(c_2)-f(c_1)\Big)\Big(\alpha(1-z_1)+(1-\alpha)(1-\omega_1)\Big)+$$
$$+f(c_2)\Big(\alpha(z_1-z_2)+(1-\alpha)(\omega_1-\omega_2)\Big),$$

откуда следует, что

$$\|c_{1x}-c_{2x}\|_{C(\Pi_T)} \le \widehat{\Phi}_0\|c_1-c_2\|_{C(\Pi_T)} + \Phi_0\|R(x,t)\|_{C(\Pi_T)}\ .$$

Поэтому, из неравенств (27), (28) для рассматриваемого второго слагаемого следует оценка

$$\left\|(1-u_1)\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(c_1)-f(c_2)\Big)\right\|_{C(\Pi_T)} \leq N_2(T)\|Z^1-Z^2\|_{C(\Pi_T)}\,.$$

Оценим третье слагаемое в правой части формулы (30). Из оценки (20) для функции $U_x(x,t)$ и неравенства (27) имеем

$$\|u_{1x}(f(c_1)-f(c_2))\|_{C(\Pi_T)} \leq N_3(T)\|Z^1-Z^2\|_{C(\Pi_T)}\,.$$

Итак, из приведенных рассуждений ясно, что оценку (30) можно записать в следующем виде

$$\|F_1(x,t)\|_{C(\Pi_T)} \leq N_4(T)\|Z^1-Z^2\|_{C(\Pi_T)}\,. \tag{31}$$

Такая же оценка справедлива и для нормы функции $F_2(x,t)$ и, следовательно, для $\|F(x,t)\|_{C(\Pi_T)}$. Поэтому из неравенства (29) имеем

$$\|R_x(x,t)\|_{C(\Pi_T)} \leq N_5(T)\|Z^1-Z^2\|_{C(\Pi_T)}\,.$$

Отсюда, из оценки (28) и системы (24) следует справедливость оценки (23). Таким образом, согласно теореме Шаудэра, оператор D в каждом прямоугольнике Π_T имеет неподвижную точку $U\in M$, т.е. $DU=U$, что в силу произвольности T и означает существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (1)–(4) в полуполосе Π.

Для доказательства единственности этого решения покажем существование такого числа $t_*>0$, что во множестве Π_{t_*} для оператора D будет справедлива оценка

$$\|DZ^1-DZ^2\|_{C(\Pi_{t_*})} \leq \frac{1}{2}\|Z^1-Z^2\|_{C(\Pi_{t_*})}, \tag{32}$$

причем число t_* не будет зависеть от начальных данных.

Для получения оценки (32) запишем систему (24) в следующем виде

$$\begin{cases} r_t+\frac{\gamma}{\alpha}r_x=\frac{\beta}{\alpha}(s-r)-r+Y_1(x,t), \\ s_t-\frac{\gamma}{1-\alpha}s_x=\frac{\beta}{1-\alpha}(r-s)-s+Y_2(x,t), \end{cases} \tag{33}$$

$$s=r, \qquad x=0,h,$$

$$r(x,0)=0, \qquad s(x,0)=0.$$

Здесь $Y_1(x,t)=f(c_1)-f(c_2)+f(c_2)u_2-f(c_1)u_1$, $Y_2(x,t)=f(c_1)-f(c_2)+f(c_2)v_2-f(c_1)v_1$. Обозначим $Y=(Y_1,Y_2)$. Из работы [3] для решения $R(x,t)$ данной системы следует справедливость оценки

$$\Big\|R(x,t)\Big\|_{C[0,h]} \leq A_1\int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\max_{\tau\leq t}\Big\|Y(x,\tau)\Big\|_{C[0,h]}d\tau, \quad t>0, \tag{34}$$

где константы A, A_1 не зависят от t и A есть такая константа, что $A>\mathbf{Re}\lambda$, где λ — собственные числа задачи

$$\lambda r+\frac{\gamma}{\alpha}r_x=\frac{\beta}{\alpha}(s-r)-r, \ \ \lambda s-\frac{\gamma}{1-\alpha}s_x=\frac{\beta}{1-\alpha}(r-s)-s,$$

$$s = r, \qquad x = 0, h\ .$$

Непосредственным вычислением нетрудно увидеть, что собственные числа λ этой задачи лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le -1$, поэтому в оценке (34) возьмем $A = -\varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Оценим норму $\|Y_1(x,t)\|_{C(\Pi_T)}$. Из вида функции $Y_1(x,t)$ имеем

$$|Y_1(x,t)| = |(f(c_1) - f(c_2))(1 - u_1) + f(c_2)(u_2 - u_1)| \le \widehat{\Phi}_0|c_1 - c_2| + \Phi_0|u_2 - u_1|.$$

Тогда из оценки (27) следует соотношение

$$\|Y_1(x,t)\|_{C(\Pi_T)} \le \Phi_3\|Z^1 - Z^2\|_{C(\Pi_T)} + \Phi_4\|R(x,t)\|_{C(\Pi_T)},$$

где константы Φ_3, Φ_4 зависят лишь от коэффициентов системы и не зависят от t. Очевидно, что величина $\|Y_2(x,t)\|_{C(\Pi_T)}$ оценивается также правой частью этого неравенства. Используя это соотношение, запишем оценку (34) в следующем виде

$$\|R(x,t)\|_{C(\Pi_T)} \le A_1T\Big(\Phi_3\|Z^1 - Z^2\|_{C(\Pi_T)} + \Phi_4\|R(x,t)\|_{C(\Pi_T)}\Big).$$

Обозначим через $h(t)$ следующую функцию: $h(t) = \frac{A_1t\Phi_3}{1-A_1t\Phi_4}$. Из вида функции $h(t)$ ясно существование такого числа $t_* > 0$, что при $0 \le t \le t_*$ выполнено: $0 \le h(t) \le h(t_*) = \frac{1}{2}$. Таким образом, оценка (32) имеет место. Из оценки (27) следует единственность функции $c(x,t)$, соответствующей решению $U(x,t)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Покровская С. А., Гаевой В. П., Садовская Е. М. и др.* Математическое моделирование процессов в кипящем слое с учетом нестационарного состояния катализатора // Математическое моделирование каталитических реакторов: Сб. тр. Новосибирск: Наука, 1989. С. 85–106.
2. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. 1960. Т. 50(92). С. 423–442.
3. *Елтышева Н. А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. Т. 135(177). С. 186–209.

Люлько Наталья Альбертовна

Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

lulko@online.nsk.su