УДК 517.549.8

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

М. З. Маршенкулов, М. Х. Шхануков–Лафишев

1. В конечной области D, ограниченной отрезками прямых $x = 0$, $t = 0$, $t = T > 0$ и нехарактеристической кривой $x = s(t)$, $s(0) = b > 0$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x,t)u + f(x,t),$$

$$0 < x < s(t), 0 < t \leq T, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(s(t),t) = u_x(s(t),t) = 0, \qquad \dot{s}(t) \geq 0, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq s(0) = b, \qquad (3)$$

где коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями и удовлетворяют условиям

$$0 < c_1 \leq \eta(x,t) \leq c_2 \quad |k, \eta_t, q| \leq c_3.$$

Существование решений краевых задач для уравнения (1) зависит от того как расположена нехарактеристическая кривая $x = s(t)$, внутри ($\dot{s}(t) \leq 0$) характеристического четырехугольника ($x = 0$, $x = b$, $t = 0$, $t = T$) или вне ($\dot{s}(t) \geq 0$). В первом случае постановка краевых задач аналогична постановкам для уравнений параболического типа, во втором — следует задавать на кривой два условия, например, $u(s(t),t) = 0$, $u_x(s(t),t) = 0$, либо какие-нибудь другие классические или неклассические граничные условия [1].

В этой статье будут получены априорные оценки для решения задачи (1)–(3), а также для псевдопараболического уравнения с вырождением.

Умножим уравнение (1) скалярно на u:

$$(u_t, u) - ((ku_x)_x, u) - ((\eta u_x)_{xt}, u) + (q, u^2) = (f, u), \qquad (4)$$

где

$$(u,v) = \int\limits_0^{s(t)} u \cdot v\, dx, \quad ||u||^2_{L(0,s(t))} = (u,u).$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (4):

$$(u_t, u) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}||u||^2_{L(0,s(t))} - \frac{1}{2}\dot{s}(t)u^2(s(t),t),$$

$$((ku_x)_x, u) = k(s(t),t)u_x(s(t),t)\cdot u(s(t),t) - \int\limits_0^{s(t)} ku_x^2\,dx, \tag{5}$$

$$((ku_x)_{xt}, u) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{s(t)} \eta_t u_x^2\,dx - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{s(t)} \eta u_x^2\,dx + \dot{s}(t)\eta(s(t),t)u_x^2(s(t),t) +$$

$$+(\eta u_x)_t\big|_{x=s(t)} u(s(t),t).$$

Здесь мы воспользовались только одним граничным условием $u(0,t)=0$. Подставляя (5) в тождество (4), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}||u||^2_{L_2(0,s(t))} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{s(t)} \eta u_x^2\,dx - 2\dot{s}(t)\eta(s(t),t)u_x^2(s(t),t) \le$$

$$\le 3c_3||u_x||^2_{L_2(0,s(t))} + 2c_3||u||^2_{L_2(0,s(t))} + ||u||^2_{L_2(0,s(t))} + ||f||^2_{L_2(0,s(t))}. \tag{6}$$

Из неравенства (6) видно, что при $\dot{s}(t)\le 0$ третье слагаемое можно отбросить, в случае когда $\dot{s}(t)\ge 0$ необходимо задавать дополнительное условие (например, $u_x(s(t),t)=0$).

В обоих случаях из неравенства (6) следует

$$||u(x,t)||^2_{W_2^1(0,s(t))} \le C_4\int\limits_0^t ||u(x,\tau)||^2_{W_2^1(0,s(t))}\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t ||f(x,\tau)||^2_{L_2(0,s(\tau))}\,d\tau + ||u_0(x)||^2_{W_2^1(0,b)}. \tag{7}$$

Обозначим через

$$y(t) = \int\limits_0^t ||u||^2_{W_2^1(0,s(\tau))}\,d\tau,$$

$$F(t) = \int\limits_0^t ||f||^2_{L_2(0,s(\tau))}\,d\tau + ||u_0(x)||^2_{W_2^1(0,b)}.$$

Тогда (7) примет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} \le C_4 y(t) + F(t),$$

откуда на основании леммы 1.1 из [2] находим

$$||u(x,t)||^2_{W_2^1(0,s(t))} \le M(t)\left(\int\limits_0^t ||f(x,\tau)||^2_{L_2(0,s(\tau))}\,d\tau + ||u_0(x)||^2_{W_2^1(0,b)}\right).$$

2. В области $D=\{(x,t):\ 0<x<s(t),\ 0<t<T\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^\alpha k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^\alpha k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] -$$

$$-\frac{v}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha u) - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < s(t), 0 < t < T, \tag{8}$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha[ku_x + (ku_x)_t - vu] = 0, \quad u(s(t),t) = u_x(s(t),t) = 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le b = s(0),$$

где $k(x,t) \ge c_1 > 0$, $|q(x,t)| \le c_2$, $1 \le \alpha \le 2$, $v = const > 0$, $\dot{s}(t) \ge 0$.

Случаи $\alpha = 1,2$ соответствуют в гидродинамике течениям с цилиндрической и сферической симметрией. В случае, когда первое пространство представляет собой фрактал $\alpha \in (1,2)$ и определяется формулой $\alpha = d_f - 1$, где d_f — размерность Хаусдорфа–Безиковича [3].

Умножим уравнение (8) скалярно на $x^\alpha u$:

$$(u_t, x^\alpha u) - ((x^\alpha k u_x)_x, u) - ((x^\alpha k u_x)_{xt}, u) + v((x^\alpha u)_x, u) + (q, x^\alpha u^2) = (f, x^\alpha u). \tag{9}$$

Преобразовывая интегралы, входящие в тождество (9), находим

$$(u-t, x^\alpha u) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{s(t)} x^\alpha u^2\,dx + \frac{1}{2}\dot{s}(t)[s(t)]^\alpha u^2(s(t),t),$$

$$((x^\alpha k u_x)_x, u) = x^\alpha k u_x(s(t),t)u(s(t),t) - (x^\alpha k u_x)\cdot u\Big|_{x=0} - \int\limits_0^{s(t)} x^\alpha k u_x^2\,dx,$$

$$((x^\alpha k u_x)_{xt}, u) = (x^\alpha k u_x)_t u\Big|_0^{s(t)} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{s(t)} x^\alpha k_t u_x^2\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{s(t)} x^\alpha k u_x^2\,dx + \frac{1}{2}\dot{s}(t)[s(t)^\alpha]k u_x^2(s(t),t), \tag{10}$$

$$v((x^\alpha u)_x, u) = v x^\alpha u^2\Big|_0^{s(t)} - \frac{v}{2}x^\alpha u^2\Big|_0^{s(t)} + \frac{\alpha}{2}v\int\limits_0^{s(t)} x^{\alpha-1}u^2\,dx.$$

Подставляя (10) в тождество (9), с учетом граничных условий и упомянутой выше леммы 1.1, находим

$$||x^{\alpha/2}u||^2_{L_2(0,s(t))} + ||x^{\alpha/2}u_x||^2_{L_2(0,s(t))} + \int\limits_0^t ||x^{\alpha/2}u_x(x,\tau)||^2_{L_2(0,s(\tau))}\,d\tau \le$$

$$\le M(t)\left(\int\limits_0^t ||x^{\alpha/2}f(x,\tau)||^2_{L_2(0,s(\tau))}\,d\tau + ||x^{\alpha/2}u_0(x)||^2_{L_2(0,b)} + ||x^{\alpha/2}u_0'(x)||^2_{L_2(0,b)}\right).$$

Из полученных оценок следует единственность и устойчивость решения рассматриваемых задач по правой части и начальным данным.

3. Нетрудно получить дискретный аналог априорных оценок в случае прямоугольной области $0 < x < l$, $0 < t < T$.

Рассмотрим схему Роте для следующей начально–краевой задачи:

$$y_{\bar{t}} = \frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\alpha k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\alpha k(x)\frac{\partial}{\partial x}y_{\bar{t}}\right) - \frac{v}{x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha y) - q(x,t)y + f(x,t), \tag{11}$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha[ky_x + (ky_x)_{\bar t} - vy] = 0, \quad y(l,t) = 0, \tag{12}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad k \geq c_1 > 0, |q| \leq c_2, \tag{13}$$

где $y_{\bar t} = \frac{y-\check y}{\tau}$, $y = y^j$, $\check y = y^{j-1}$, $y^j = y(x,t_j)$, $\tau = t_j - t_{j-1}$ шаг сетки по времени.

Умножим уравнение (11) скалярно на $2\tau x^\alpha y$:

$$2\tau(y_t, x^\alpha y) - 2\tau((x^\alpha k(x)y_x)_x, y) - 2\tau((x^\alpha k y_{x\bar t})_x, y) +$$

$$+2\tau v((x^\alpha y)x, y) + 2\tau(q, x^\alpha y) = (f, x^\alpha y), \tag{14}$$

где $(u,v) = \int\limits_0^l uv\,dx$, $(u,u) = ||u||_0^2$.

Имеет место тождество

$$2\tau(y_t, x^\alpha y) = ||x^{\alpha/2}y||_0^2 - ||x^{\alpha/2}\check y||_0^2 + \tau^2||x^{\alpha/2}y_{\bar t}||_0^2.$$

Как и выше преобразуем интегралы, входящие в тождество (14):

$$2\tau((x^\alpha k y_x)_x, y) = -2\tau\int\limits_0^l x^\alpha k y_x^2\,dx + 2\tau x^\alpha k y_x \cdot y\Big|_0^l, \tag{15}$$

$$2\tau((x^\alpha k y_{x\bar t})_x, y) = 2\tau x^\alpha k y_{x\bar t}\cdot y\Big|_0^l - 2\tau\int\limits_0^l x^\alpha k(x) y_{x\bar t} y_x\,dx =$$

$$= 2\tau x^\alpha k y_{x\bar t}\cdot y\Big|_0^l - \left\{\int\limits_0^l x^\alpha k y_x^2\,dx - \int\limits_0^l x^\alpha k \check y_x^2\,dx + \tau^2\int\limits_0^l x^\alpha k y_{x\bar t}^2\,dx\right\}.$$

$$v((x^\alpha y)_x, y) = \frac{v}{2}x^\alpha y^2\Big|_0^l + \frac{\alpha v}{2}\int\limits_0^l x^{\alpha-1}y^2\,dx.$$

Подставляя (15) в тождество (14), с учетом граничных условий получаем

$$||x^{\alpha/2}y||_0^2 - ||x^{\alpha/2}\check y||_0^2 + \int\limits_0^l x^\alpha k y_x^2\,dx - \int\limits_0^l x^\alpha k\check y_x^2\,dx + 2\tau c_1\int\limits_0^l x^\alpha y_x^2\,dx \leq$$

$$\leq 2\tau c_2\int\limits_0^l x^\alpha y^2\,dx + \tau||x^{\alpha/2}f||_0^2 + \tau||x^{\alpha/2}y||_0^2. \tag{16}$$

Просуммируем (16) по j' от 1 до j, тогда получим

$$||x^{\alpha/2}y^j||_0^2 + c_1||x^{\alpha/2}y_x^j||_0^2 + 2c_1\sum_{j'=1}^{j}||x^{\alpha/2}y_x^{j'}||_0^2\tau \leq$$

$$\leq (1+2c_2)\sum_{j'=1}^{j}||x^{\alpha/2}y^{j'}||_0^2\tau + \sum_{j'=1}^{j}||x^{\alpha/2}f^{j'}||_0^2\tau + ||x^{\alpha/2}u_0(x)||_0^2 + ||x^{\alpha/2}u_0'(x)||_0^2. \tag{17}$$

Из неравенства (17) с помощью леммы 4 из [4] находим

$$||x^{\alpha/2}y||_0^2 + ||x^{\alpha/2}y_x||_0^2 + \sum_{j'=1}^{j}||x^{\alpha/2}y_x^{j'}||_0^2\tau \leq$$

$$\leq M\left(\sum_{j'=1}^{j}||x^{\alpha/2}f^{j'}||_0^2\tau+||x^{\alpha/2}u_0(x)||_0^2+||x^{\alpha/2}u_0'(x)||_0^2\right). \qquad (18)$$

Из оценки (18) следует сходимость метода Роте к решению исходной дифференциальной задачи (11)–(13) со скоростью $O(\tau)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шхануков М. Х.* Исследование краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка методом функции Римана // Сообщения АН ГССР. 1981. Т. 113, N 1. С. 25–28.
2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
3. *Динариев О. Ю.* Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин // Механика жидк. и газа. 1990. N 5. С. 66–70.
4. *Самарский А. А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, N 2. С. 266–298.

Маршенкулов Муса Замудинович, Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович
Россия, Нальчик, НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
niipma@mailru.com