УДК 517.956

ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф. Г. Мухлисов, С. М. Гафурова

Пусть R_{n+1}^{+} — полупространство $t > 0$ $n+1$–мерного арифметического пространства точек $(x_1, x_2, ..., x_n, t)$. В этом полупространстве рассматривается сингулярное волновое уравнение

$$\square_B u = B_t u - a^2 \Delta_x u = 0,$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $B_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t} = t^{-k}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^k \frac{\partial}{\partial t}\right)$, $0 < k < 1$.

В первом параграфе строится фундаментальное решение одного сингулярного обыкновенного дифференциального оператора. Второй параграф посвящен построению фундаментального решения оператора $\square_B$. В третьем и четвертом параграфах строятся запаздывающий потенциал и поверхностные потенциалы типа простого и двойного слоев и с помощью этих потенциалов доказывается существование единственного решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения.

§ 1. Фундаментальное решение сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$LW = t^{-k}\frac{d}{dt}\left(t^k \frac{dW}{dt}\right) + \lambda^2 W = \delta(t) \tag{1}$$

где $\delta(t)$ есть известная δ–функция Дирака.

Фундаментальным решением оператора L называется обобщенная функция, удовлетворяющая при $t > 0$ уравнению (1).

Докажем, что фундаментальное решение оператора L может быть представлено в виде:

$$W(t) = \theta(t) Z(t),$$

где $\theta(t)$ — θ–функция Хевисайда:

$$\theta(x) = 1,\ x > 0;\ \theta(x) = 0,\ x \le 0,$$

$Z(t)$ — решение уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(t^k \frac{dZ}{dt}\right) + \lambda^2 t^k Z = 0 \tag{2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$Z(0) = 0, \quad t^k \frac{dZ}{dt}\bigg|_{t=0} = 1 \tag{3}$$

Действительно, пользуясь формулой дифференцирования обобщенной функции, с учетом формул

$$\theta'(t) = \delta(t), \quad \delta(t) f(t) = f(0)$$

и начальных условий (3), получаем

$$\frac{dW}{dt} = \theta'(t) Z(t) + \theta(t) \frac{dZ}{dt} = \delta(t) Z(t) + \theta(t) \frac{dZ}{dt} = \theta \frac{dZ}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}\left(t^k \frac{dW}{dt}\right) = \delta(t)\left(t^k \frac{dZ}{dt}\right) + \theta(t)\frac{d}{dt}\left(t^k \frac{dZ}{dt}\right) = \delta(t) + \theta(t)\frac{d}{dt}\left(t^k \frac{dZ}{dt}\right).$$

Откуда

$$\theta(t)\frac{d}{dt}\left(t^k \frac{dZ}{dt}\right) + \delta(t) + \lambda^2 \theta(t) t^k Z(t) =$$

$$= \theta(t) t^k \left[t^{-k} \frac{d}{dt}\left(t^k \frac{dZ}{dt}\right) + \lambda^2 Z(t)\right] + \delta(t) = \delta(t).$$

Умножая уравнение (2) на t^{2-k}, получаем

$$t^2 Z'' + ktZ' + \lambda^2 t^2 Z = 0.$$

В этом уравнении положим

$$Z = \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1-k}{2}} Y, \quad t = \frac{\tau}{\lambda}$$

В результате имеем

$$\tau^2 Y'' + \tau Y + \left(\tau^2 - \left(\frac{1-k}{2}\right)^2\right) Y = 0.$$

Это есть уравнение Бесселя. Его общее решение при $0 < k < 1$ имеет вид

$$Y = C_1 J_{\frac{k-1}{2}}(\tau) + C_2 J_{\frac{1-k}{2}}(\tau).$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$Z = C_1 t^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda t) + C_2 t^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda t).$$

В силу первого начального условия из (3) $C_1 = 0$. Требуя выполнения второго начального условия, находим значение C_2.

$$\frac{dZ}{dt} = C_2 \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda t)\right) = C_2 \lambda^{\frac{k+1}{2}} \frac{d}{d\lambda t}\left[(\lambda t)^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda t)\right] =$$

$$= C_2 \lambda^{\frac{k+1}{2}} (\lambda t)^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda t) = C_2 \lambda t^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda t).$$

В результате имеем

$$t^k \frac{dZ}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{C_2 \lambda}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}.$$

Откуда

$$C_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{\lambda}.$$

Таким образом, фундаментальное решение оператора L, имеет вид

$$W = \theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) t^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda t)}{\lambda}. \tag{4}$$

§ 2. Фундаментальное решение сингулярного волнового оператора

$$\Box_B W_n = t^{-k}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^k \frac{\partial W_n}{\partial t}\right) - a^2 \Delta W_n = \delta(x,t). \tag{5}$$

Применяя к равенству (5) преобразование Фурье F_x, получаем

$$F_x\left[t^{-k}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^k\frac{\partial W_n}{\partial t}\right)\right] - a^2 F_x\left[\Delta W_n\right] = F_x[\delta(x,t)].$$

Известно [1], что имеет место следующие формулы:

$$F_x[\delta(x,t)] = F_x[\delta(x)\cdot\delta(t)] = F[\delta](\xi)\cdot\delta(t) = 1(\xi)\cdot\delta(t),$$

$$F_x\left[t^{-k}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^k\frac{\partial W_n}{\partial t}\right)\right] = t^{-k}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^k\frac{\partial}{\partial t}F_x[W_n]\right),$$

$$F_x[\Delta W_n] = -|\xi|^2 F_x[W_n].$$

В результате для обобщенной функции $\widetilde{W}_n(\xi,t) = F_x[W_n](\xi,t)$ получаем уравнение

$$t^{-k}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^k\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{W}_n\right) + a^2|\xi|^2\widetilde{W}_n(\xi,t) = 1(\xi)\cdot\delta(t). \tag{6}$$

Пользуясь формулой (4) с заменой λ на $a|\xi|$, получаем решение уравнения (6)

$$\widetilde{W}_n = \theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) t^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}.$$

Отсюда, применяя обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1}, получаем

$$W_n(x,t) = F_\xi^{-1}[\widetilde{W}_n(\xi,t)] = \theta(t)t^{\frac{1-k}{2}}\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)F_\xi^{-1}\left[\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right] =$$

$$= \theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) t^{\frac{1-k}{2}}}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n}\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}e^{i(\xi x)}d\xi.$$

Откуда

$$W_n(x,t) = \theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) t^{\frac{1-k}{2}}}{(2\pi)^n}F_\xi\left[\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right].$$

Здесь интегральное преобразование Фурье F_ξ нужно понимать в обобщенном смысле, т.е. в смысле

$$\left(F_\xi\left[\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right],\varphi\right)=\left(\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|},F_\xi\left[\varphi\right]\right),\quad \varphi\in S,$$

где S — пространство основных функций.

К множеству основных функций S относятся все функции класса $C^\infty(E_n)$, убывающих при $|x|\to\infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|\xi|^{-1}$. Линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций называется обобщенной функцией медленного роста. Обозначим через S' множество всех обобщенных функций медленного роста.

Пусть $n=1$. Тогда

$$F_\xi\left[\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}e^{i(x\xi)}d\xi=2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a\xi t)}{a\xi}\cos(x\xi)d\xi=$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{a(1-k)}\cos\left(\frac{1-k}{2}\arcsin\frac{x}{at}\right), & |x|\le at\\ \frac{2(at)^{\frac{1-k}{2}}\cos\frac{1-k}{4}\pi}{(1-k)\left(x+\sqrt{x^2-(at)^2}\right)^{\frac{1-k}{2}}}, & |x|\ge at.\end{cases}$$

Пусть теперь $n=2$. Тогда

$$F_\xi\left[\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right]=\int\limits_{E_2}\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}e^{i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}d\xi_1d\xi_2.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\int\limits_{E_2}\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}e^{i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}d\xi_1d\xi_2=\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty J_{\frac{1-k}{2}}(a\rho t)d\rho\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}e^{i\rho(x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)}d\varphi=\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty J_{\frac{1-k}{2}}(at\rho)d\rho\int\limits_0^{2\pi}\cos[\rho(x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi)]d\varphi=$$

$$=\begin{cases}\frac{2\pi}{a^2}F\left(\frac{3-k}{4},\frac{k+1}{4},1;\frac{|x|^2}{(at)^2}\right), & |x|<at\\ \frac{2\pi\Gamma\left(\frac{3-k}{4}\right)}{a\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}(at)^{\frac{1-k}{2}}|x|^{\frac{k-3}{2}}F\left(\frac{3-k}{4},\frac{3-k}{4},\frac{3-k}{2};\frac{(at)^2}{|x|^2}\right), & |x|>at\end{cases}$$

Пусть $n=3$. Тогда

$$F_\xi\left[\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right]=\int\limits_{E_3}\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}e^{i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3)}d\xi_1d\xi_2d\xi_3.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$\int\limits_{E_3}\frac{J_{\frac{1-k}{2}}(a|\xi|t)}{a|\xi|}e^{i(x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3)}d\xi_1d\xi_2d\xi_3=$$

$$=-\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty\rho J_{\frac{1-k}{2}}(at\rho)d\rho\int\limits_0^\pi\sin\psi d\psi\int\limits_0^{2\pi}\cos[\rho\sin\psi(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta)+$$

$$+\rho x_3\cos\psi]d\theta = -\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty \rho J_{\frac{1-k}{2}}(at\rho)d\rho$$

$$\int\limits_0^\pi \sin\psi\cos(\rho x_3\cos\psi)d\psi\int\limits_0^{2\pi}\cos[\rho\sin\psi(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta)]d\theta =$$

$$= -\frac{4\pi}{a|x|}\begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{1-k}{2}\arcsin\frac{|x|}{at}\right)}{\sqrt{(at)^2-|x|^2}}, & |x|\le at \\ \frac{(at)^{\frac{1-k}{2}}\cos\frac{1-k}{4}\pi}{\sqrt{|x|^2-(at)^2}\left(|x|+\sqrt{|x|^2-(at)^2}\right)^{\frac{1-k}{2}}}, & |x|\ge at. \end{cases}$$

Таким образом, фундаментальными решениями оператора $\Box_B$ при $n=1$, 2 и 3 являются функции

$$W_1(x,t)=\begin{cases} \theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)t^{\frac{1-k}{2}}}{\pi a(1-k)}\cos\left(\frac{1-k}{2}\arcsin\frac{x}{at}\right), & |x|\le at \\ \theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)(a^{\frac{1-k}{2}}t^{1-k}}{\pi(1-k)}\frac{\cos\frac{1-k}{4}\pi}{\left(x+\sqrt{x^2-(at)^2}\right)^{\frac{1-k}{2}}}, & |x|\ge at, \end{cases}$$

$$W_2(x,t)=\begin{cases} \theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)t^{\frac{1-k}{2}}}{2\pi a^2}F\left(\frac{3-k}{4},\frac{k+1}{4},1;\frac{|x|^2}{(at)^2}\right), & |x|<at \\ \theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-k}{4}\right)a^{-\frac{k+1}{2}}t^{1-k}}{2\pi\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}|x|^{\frac{k-3}{2}}F\left(\frac{3-k}{4},\frac{3-k}{4},\frac{3-k}{2};\frac{(at)^2}{|x|^2}\right), & |x|>at \end{cases}$$

где $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция.

$$W_3(x,t)=\begin{cases} -\theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)t^{\frac{1-k}{2}}}{2\pi^2a|x|}\frac{\sin\left(\frac{1-k}{2}\arcsin\frac{|x|}{at}\right)}{\sqrt{(at)^2-|x|^2}}, & |x|\le at \\ -\theta(t)\frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)t^{1-k}}{2\pi^2a^{\frac{1+k}{2}}}\frac{\cos\frac{1-k}{4}\pi}{|x|\sqrt{|x|^2-(at)^2}\left(|x|+\sqrt{|x|^2-(at)^2}\right)^{\frac{1-k}{2}}}, & |x|\ge at. \end{cases}$$

§ 3. Запаздывающий потенциал для сингулярного волнового оператора

Пусть функция $f(x,t)$ обращается в нуль в полупространстве $t<0$. Функция

$$V_n = W_n * f,$$

где W_n — фундаментальное решение оператора $\Box_B$, называется запаздывающим потенциалом с плотностью $f(x,t)$.

Теорема 1. *Пусть $f\in S'$ такова, что свертка $W_n * f$ существует в S'. Тогда решение уравнения*

$$\Box_B u = f(x,t) \tag{7}$$

существует в S' и дается формулой

$$u = W_n * f. \tag{8}$$

Доказательство. Пользуясь формулой дифференцирования свертки [2], получим

$$\Box_B(W_n * f) = (\Box_B W_n) * f = \delta * f = f.$$

Поэтому функция (8) будет решением уравнения (7).

При $n = 1$, 2 и 3 потенциал V_n выражается формулами

$$V_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{\pi a(1-k)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\frac{1-k}{2}} d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) \cos\left(\frac{1-k}{2} \arcsin \frac{|x-\xi|}{a(t-\tau)}\right) d\xi +$$

$$+ \frac{a^{\frac{1-k}{2}} \cos \frac{1-k}{4}\pi \Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{\pi(1-k)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{1-k} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{|x-\xi|>a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)}{\left(|x-\xi| + \sqrt{(x-\xi)^2 - (a(t-\tau))^2}\right)^{\frac{1-k}{2}}} d\xi,$$

$$V_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{2\pi a^2} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\frac{1-k}{2}} d\tau \int\limits_{K(x,a(t-\tau))} f(\xi,\tau) F\left(\frac{3-k}{4}, \frac{k+1}{4}, 1; \frac{|x-\xi|^2}{(a(t-\tau))^2}\right) d\xi +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-k}{4}\right) a^{-\frac{k+1}{2}}}{2\pi\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{1-k} d\tau \int\limits_{K_e(x,a(t-\tau))} f(\xi,\tau)|x-\xi|^{\frac{k-3}{2}} \times$$

$$\times F\left(\frac{3-k}{4}, \frac{3-k}{4}, \frac{3-k}{2}; \frac{(a(t-\tau))^2}{|x-\xi|^2}\right) d\xi,$$

$$V_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{2\pi^2 a} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\frac{1-k}{2}} d\tau \int\limits_{Q(x,a(t-\tau))} f(\xi,\tau) \frac{\sin\left(\frac{1-k}{2} \arcsin \frac{|x-\xi|}{a(t-\tau)}\right)}{|x-\xi|\sqrt{(a(t-\tau))^2 - |x-\xi|^2}} d\xi -$$

$$- \frac{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) \cos \frac{1-k}{4}\pi}{2\pi^2 a^{\frac{k+1}{2}}} \int\limits_0^t (t-\tau)^{1-k} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{Q_e(x,a(t-\tau))} \frac{f(\xi,\tau)\left(|x-\xi| + \sqrt{|x-\xi|^2 - (a(t-\tau))^2}\right)^{\frac{k-1}{2}}}{|x-\xi|\sqrt{|x-\xi|^2 - (a(t-\tau))^2}} d\xi,$$

где $K(x, a(t-\tau))$ — круг с центром в точке x и радиуса $a(t-\tau)$, $K_e(x, a(t-\tau))$ — внешность круга $K(x, a(t-\tau))$, $Q(x, a(t-\tau))$ — шар с центром в точке x и радиуса $a(t-\tau)$, $Q_e(x, a(t-\tau))$ — внешность шара $Q(x, a(t-\tau))$. Имеет место следующая

Теорема 2. *Если функция $f \in C^2(t \geq 0)$ при $n = 2$ и 3, $f \in C^1(t \geq 0)$ при $n = 1$ и абсолютно интегрируема в $R^+_{n+1}\{(x,t) \in R_{n+1}, t > 0\}$, то потенциал V_n удовлетворяет начальным условиям*

$$V_n\Big|_{t=0} = 0, \quad t^k \frac{\partial V_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы для запаздывающего волнового потенциала [2].

§ 4. Поверхностные потенциалы для сингулярного волнового оператора

Пусть $\mu(x)$ и $\nu(x)$ — функции, такие, что свертки

$$W_n * \mu, \quad t^k \frac{\partial W_n}{\partial t} * \nu$$

существуют. Тогда функции

$$V_{0n} = W_n * \mu, \quad V_{1n} = t^k \frac{\partial W_n}{\partial t} * \nu,$$

где W_n — фундаментальное решение оператора $\square_B$, называются поверхностными потенциалами (простого и двойного слоев с плотностями μ и ν соответственно).

Если $\mu(x)$ и $\nu(x)$ абсолютно интегрируемые в пространстве R_n функции, то потенциал V_{0n} выражается формулами

$$V_{01}(x,t) = \frac{\theta(t)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) t^{\frac{1-k}{2}}}{\pi a(1-k)} \int\limits_{x-at}^{x+at} \mu(\xi) \cos\left(\frac{1-k}{2} \arcsin \frac{|x-\xi|}{at}\right) d\xi +$$

$$+ \frac{\theta(t) a^{\frac{1-k}{2}} \cos \frac{1-k}{4}\pi \Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) t^{1-k}}{\pi(1-k)} \int\limits_{|x-\xi|>at} \frac{\mu(\xi) d\xi}{\left(|x-\xi| + \sqrt{(x-\xi)^2 - (at)^2}\right)^{\frac{1-k}{2}}},$$

$$V_{02}(x,t) = \frac{\theta(t)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) t^{\frac{1-k}{2}}}{2\pi a^2} \int\limits_{K(x,at)} \mu(\xi) \times$$

$$\times F\left(\frac{3-k}{4}, \frac{k+1}{4}, 1; \frac{|x-\xi|^2}{(at)^2}\right) d\xi + \frac{\theta(t)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-k}{4}\right) a^{-\frac{k+1}{2}} t^{1-k}}{2\pi\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_{K_e(x,at)} \mu(\xi) |x-\xi|^{\frac{k-3}{2}} F\left(\frac{3-k}{4}, \frac{3-k}{4}, \frac{3-k}{2}; \frac{(at)^2}{|x-\xi|^2}\right) d\xi,$$

$$V_{03}(x,t) = -\frac{\theta(t)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) t^{\frac{1-k}{2}}}{2\pi^2 a} \int\limits_{Q(x,at)} \mu(\xi) \times$$

$$\times \frac{\sin\left(\frac{1-k}{2} \arcsin \frac{|x-\xi|}{at}\right)}{|x-\xi|\sqrt{(at)^2 - |x-\xi|^2}} d\xi - \frac{\theta(t)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) t^{1-k} \cos \frac{1-k}{4}\pi}{2\pi^2 a^{\frac{k+1}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{Q_e(x,at)} \frac{\mu(\xi)\left(|x-\xi| + \sqrt{|x-\xi|^2 - (at)^2}\right)^{\frac{k-1}{2}}}{|x-\xi|\sqrt{|x-\xi|^2 - (at)^2}} d\xi.$$

Теорема 3. *Если функции μ и ν абсолютно интегрируемы в R_n и $\mu \in C^3(R_n)$, $\nu \in C^2(R_n)$ при $n = 2$ и 3; $\mu \in C^2(R_1)$, $\nu \in C^1(R_1)$ при $n = 1$, то потенциалы V_{0n} и V_{1n} удовлетворяют начальным условиям*

$$V_{0n}\Big|_{t=0} = 0, \quad t^k \frac{\partial V_{0n}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \mu(x),$$

$$V_{1n}\Big|_{t=0} = \nu(x), \quad t^k \frac{\partial V_{1n}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы для поверхностных волновых потенциалов [2].

Из теорем 1–3 вытекает следующее утверждение о разрешимости задачи Коши для сингулярного волнового уравнения.

Пусть функция f абсолютно интегрируема в R^+_{n+1}, а μ и ν абсолютно интегрируемые функции в R_n. Тогда если $f \in C^2(t \geq 0)$, $\mu \in C^3(R_n)$ и $\nu \in C^2(R_n)$ при $n = 2$ и 3; $f \in C^1(t \geq 0)$, $\mu \in C^2(R_1)$ и $\nu \in C^1(R_1)$ при $n = 1$, то решение задачи Коши об отыскании решения уравнения (7), удовлетворяющего начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = \mu(x), \quad t^k \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \nu(x)$$

существует, единственно и выражается формулой

$$u(x,t) = V_n(x,t) + V_{0n}(x,t) + V_{1n}(x,t).$$

Подставляя вместо V_n, V_{0n} и V_{1n} их значения, получаем при $n = 1$ аналог формулы Даламбера, при $n = 2$ аналог формулы Пуассона и при $n = 3$ аналог формулы Кирхгофа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физике. М.: Наука, 1981.

Мухлисов Фоат Габдуллович, Гафурова Сириня Мубарякшиновна

Россия, Казань, Казанский государственный педагогический университет