УДК 517.956.6

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. М. Нахушев

Для класса квазилинейных вырождающихся уравнений гиперболического типа с обобщенным оператором Трикоми в главной части предлагается схема получения априорных оценок, весьма важных в газовой динамике сверхзвуковых течений. Схема является развитием метода Франкля доказательства единственности решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина. Особо выделен случай степенного вырождения.

1. Априорные оценки для уравнений с обобщенным оператором Трикоми в главной части

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = f(u), \tag{1}$$

где $K(y) \le 0$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной отрезком $AB = \{(x,y) : 0 \le x \le r,\ y = 0\}$ и характеристиками $AC: dx + \sqrt{-K(y)}dy = 0$ и $BC: dx - \sqrt{-K(y)}dy = 0$, выходящими из точки $C = (r/2; y_c)$, $y_c < 0$ (см. рис. 1).

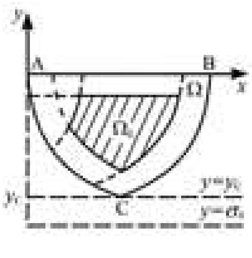

Рис. 1

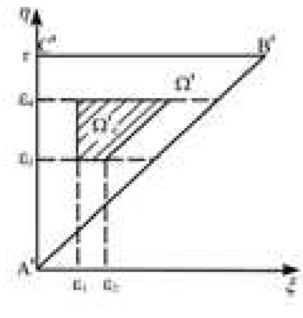

Рис. 2

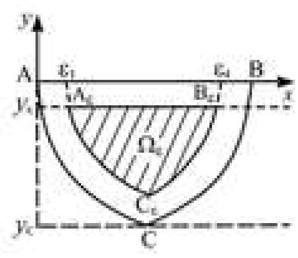

Рис. 3

Уравнение (1) при $K(y) = y$, $f(u) = 0$ совпадает с хорошо известным в газовой динамике смешанных течений уравнением Трикоми.

Предполагается, что $f: u \to f(u)$ — дифференциальный оператор в частных производных первого порядка с областью определения $D(f) \subset C^2(\Omega)$ и областью значения $R(f) \subset C(\Omega)$;

$$K(y) \in C^2]y_c, 0], \quad K'(y) \ne 0, \quad K(y) < 0 \quad \forall\, y \in]y_c, 0]; \tag{2}$$

$$|K(y)| \le K_0|y|^{-2\mu}, \quad K_0 = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const} < 1. \tag{3}$$

Условие (3) позволяет записать характеристические координаты уравнения (1) в виде

$$\xi = x + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt, \quad \eta = x - \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt. \tag{4}$$

На характеристике AC $\xi = 0$, а на характеристике BC $\eta = r$.

В силу (2) якобиан преобразования (4)

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{vmatrix} = -2\sqrt{-K(y)}$$

отличен от нуля при $y_c < y < 0$. Преобразование (4) отображает область Ω в область $\Omega' = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < r\}$ евклидовой плоскости точек (ξ,η) (см. рис. 2).

Для любой функции $u = u(x,y)$ из класса $C^2(\Omega)$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{-K}}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{-K}}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{5}$$

$$Ku_{xx} = K(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}), \tag{6}$$

$$u_{yy} = -K(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - \frac{K'}{2\sqrt{-K}}(u_\xi - u_\eta). \tag{7}$$

В силу (6) и (7) уравнение (1) записывается в виде

$$\sqrt{-K}K'u_\xi = \sqrt{-K}K'u_\eta - 8K^2u_{\xi\eta} + 2Kf(u). \tag{8}$$

Следуя Ф. И. Франклю [1, с. 283], введем функцию $M(y)$ по формуле

$$M(y)\frac{d\sqrt{|K|}}{dy} = 4|K|^{3/2}, \quad K \equiv K(y).$$

Очевидно, что при $y_c < y < 0$ функция $M(y) = -8K^2/K'$.

Согласно (5) имеем

$$M(y)u_\eta u_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[M(y)u_\eta^2\right] - \frac{1}{2}u_\eta^2\frac{\partial M(y)}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[M(y)u_\eta^2\right] - \frac{M'(y)}{4\sqrt{-K}}u_\eta^2. \tag{9}$$

Обе части уравнения (8) умножим на u_η/K', а затем воспользуемся (9). В результате получим

$$\sqrt{-K}u_\xi u_\eta = -\sqrt{-K}N(K)u_\eta^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[M(y)u_\eta^2\right] + 2Ku_\eta f(u)/K', \tag{10}$$

где дифференциальный оператор N действует на K по формуле

$$N(K) = -1 - \frac{M'(y)}{4K(y)}.$$

Поскольку

$$N(K) = -1 + \frac{2}{K}\left[K\left(\frac{K}{K'}\right)\right]' = -1 + 2\left(\frac{K}{K'}\right)' + 2,$$

то функция

$$N(K) = 1 + 2\left(K/K'\right)', \quad y_c < y < 0$$

совпадает с известной в теории уравнений смешанного типа функцией $F(y)$ [2, с. 9].

Пусть: $\Omega'_\varepsilon = \{(\xi,\eta) : \varepsilon_3 < \eta < \varepsilon_4,\, \varepsilon_1 < \xi < \eta + \varepsilon_2 - \varepsilon_3\}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < r$ — строго внутренняя подобласть области Ω' (см. рис. 2); Ω_ε — прообраз области Ω'_ε при отображении (4) (см. рис. 1); $\omega'_0 = A'B' = \{(\xi,\eta) : 0 < \eta = \xi < r\}$; $\omega'_1 = A'C' = \{(\xi,\eta) : \xi = 0,\, 0 < \eta < r\}$; интеграл $\iint\limits_{\Omega'} \varphi\, d\xi d\eta$ от функции $\varphi = \varphi(\xi,\eta)$ определен равенством

$$\iint\limits_{\Omega'} \varphi\, d\xi d\eta = \lim_{\varepsilon_4 \to r} \lim_{\varepsilon_3 \to 0} \lim_{\varepsilon_2 \to \varepsilon_3} \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \iint\limits_{\Omega'_\varepsilon} \varphi\, d\xi d\eta.$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть $u = u(x,y)$ — регулярное в области Ω решение уравнения* (1), *обладающее следующими свойствами:*

1) $K(y)u_\eta^2 \in C(\Omega' \cup \omega'_0 \cup \omega'_1)$;

2) *существует интеграл от функции $\varphi = \sqrt{-K}N(K)u_\eta^2$ по области Ω'; справедливо равенство*

$$\left[(Ku_\eta)^2/K'\right](0,\eta) = \left[(Ku_\eta)^2/K'\right](\eta,\eta), \quad 0 < \eta < r. \tag{11}$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega'} \sqrt{-K}\left[u_\xi + 2\sqrt{-K}f(u)/K'\right]u_\eta\, d\xi d\eta = -\iint\limits_{\Omega'} \sqrt{-K}N(K)u_\eta^2\, d\xi d\eta. \tag{12}$$

Действительно, на основании формулы Грина имеем

$$\iint\limits_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[M(y)u_\eta^2\right] d\xi d\eta = \lim_{\varepsilon_4 \to r} \lim_{\varepsilon_3 \to 0} \lim_{\varepsilon_2 \to \varepsilon_3} \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{\partial\Omega'_\varepsilon} M(y)u_\eta^2 d\eta =$$

$$= \lim_{\varepsilon_4 \to r} \lim_{\varepsilon_3 \to 0} \lim_{\varepsilon_2 \to \varepsilon_3} \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_4} \left\{ \left[M(y)u_\eta^2\right]\Big|_{\xi = \eta + \varepsilon_2 - \varepsilon_3} - \left[M(y)u_\eta^2\right]\Big|_{\xi = \varepsilon_1} \right\} d\eta =$$

$$= \int\limits_0^r \left\{ \left[M(y)u_\eta^2\right](\eta,\eta) - \left[M(y)u_\eta^2\right](0,\eta) \right\} d\eta.$$

Отсюда с учетом нелокального краевого условия (11) получаем, что

$$\iint\limits_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[M(y)u_\eta^2\right] d\xi d\eta = 0. \tag{13}$$

Равенства (10) и (13) говорят об истинности формулы (12).

Так как $d\xi d\eta = 2\sqrt{-K}d\Omega$, то формулу (12) можно переписать в виде

$$\int\limits_\Omega [u_\xi + 2\sqrt{-K}f(u)/K']u_\eta K\, d\Omega = -\int\limits_\Omega KN(K)u_\eta^2\, d\Omega. \tag{14}$$

Из (14) при

$$2\sqrt{-K}f(u)/K' = \lambda u_\xi + \mu u_\eta, \tag{15}$$

где λ =const, $\mu = \mu(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, получаем равенство

$$(1+\lambda)\int\limits_{\Omega} K u_\xi u_\eta \, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} K[N(K)+\mu]u_\eta^2 \, d\Omega. \tag{16}$$

Условие (15) в силу (1), (6) и (7) означает, что функция u как функция характеристических переменных ξ и η удовлетворяет уравнению

$$8(-K)^{3/2}u_{\xi\eta} + (\lambda+1)K' u_\xi + (\mu-1)K' u_\eta = 0. \tag{17}$$

При $K(y) = y$, $4(-y)^{3/2} = 3(\eta - \xi)$ уравнение (17) переходит в обобщенное уравнение Эйлера–Дарбу–Пуассона

$$(\eta - \xi)u_{\xi\eta} + B' u_\xi - B u_\eta = 0, \tag{18}$$

где

$$B' = (\lambda+1)/6, \quad B = (1-\mu)/6. \tag{19}$$

Уравнение (18) в силу (19) относится к классу гиперболического типа уравнений первого рода, если в области Ω' $\lambda - \mu < 4$, и второго рода, если $\lambda - \mu > 4$ [3].

Как видно из (5),

$$4K u_\xi u_\eta = K u_x^2 + u_y^2.$$

Теперь ясно, что равенство (16) можно записать в виде

$$(1+\lambda)F(K;u) = -4\int\limits_{\Omega} K[N(K)+\mu]u_\eta^2 \, d\Omega, \tag{20}$$

где

$$F(K;u) = \int\limits_{\Omega} (K u_x^2 + u_y^2) \, d\Omega.$$

Из (20) вытекают следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(u)$ задается формулой* (15) *и соблюдены условия леммы* 1. *Тогда*

$$(1+\lambda)F(K;u) \geq 0 \quad (\leq 0),$$

если

$$N(K) + \mu \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \forall\, (x,y) \in \Omega.$$

Теорема 2. *Пусть $f(u)$ задается формулой* (15), *соблюдены условия леммы* 1 *и функции $N(K) \in C[y_c, 0]$. Тогда*

$$(1+\lambda)F(K;u) \geq 4\mu_* \int\limits_{\Omega} |K| u_\eta^2 d\Omega,$$

если $\mu_* = \min\limits_{\overline{\Omega}}[N(K)+\mu] \geq 0;$

$$(1+\lambda)F(K;u) \leq 4\mu^* \int\limits_{\Omega} |K| u_\eta^2 d\Omega,$$

если $\mu^* = \max\limits_{\overline{\Omega}}[N(K)+\mu] \leq 0.$

Пусть теперь

$$2\sqrt{-K}f(u)/K' = \lambda\frac{\partial u}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^{n}\mu_i\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{2i-1}, \quad \mu_1 \equiv \mu,$$

где $\mu_i = \mu_i(x,y) \in C(\overline{\Omega})$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда равенство (14) принимает следующий вид:

$$(1+\lambda)F(K;u) = -4\int\limits_{\Omega} K\left\{[N(K)+\mu]\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\mu_i\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{2i}\right\}d\Omega. \qquad (21)$$

Из (21) следует, что если $N(K)+\mu \geq 0$, $\mu_i(x,y) \geq 0$ в области Ω, то $(1+\lambda)F(K;u) \geq 0$.

Нелинейное условие (11) при $K'(y) > 0$ (либо $K'(y) < 0$) можно заменить линейным нелокальным краевым условием

$$\left[\left(K/\sqrt{|K'|}\right)u_\eta\right](0,\eta) = G\left[\left(K/\sqrt{|K'|}\right)u_\eta\right](\eta,\eta), \quad 0 < \eta < r, \qquad (22)$$

где коэффициент G равен 1 или -1.

Пусть $K(y) = -(-y)^m$, $-2 < m = \mathrm{const}$. Тогда вследствие (4) имеем

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \ \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \ \sqrt{-K} = \left[\frac{m+2}{4}(\eta-\xi)\right]^{\frac{m}{m+2}},$$

$$\frac{K}{\sqrt{|K'|}} = -\frac{1}{\sqrt{|m|}}(-y)^{\frac{m+1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{|m|}}\left[\frac{m+2}{4}(\eta-\xi)\right]^{\frac{m+1}{m+2}} \quad (m \neq 0),$$

и, стало быть, условие (22) допускает следующую запись:

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\partial u}{\partial \eta} = G\lim_{\xi\to\eta}(1-\xi/\eta)^{\frac{m+1}{m+2}}\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad 0 < \xi < \eta < r, \qquad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left[\frac{m+2}{4}(\eta-\xi)\right]^{\frac{-m}{m+2}}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

При $m = 0$, $f(u) = 0$ уравнение (1) и условие (23) принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0 \quad \forall\,(x,y) \in \Omega, \qquad (24)$$

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\partial u}{\partial \eta} = G\lim_{\xi\to\ \eta}\sqrt{1-\xi/\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad 0 < \eta < r, \qquad (25)$$

где $\Omega = \{(x,y) : 0 < \xi < \eta < r\}$, $\xi = x+y$, $\eta = x-y$, $2\partial u/\partial\eta = \partial u/\partial x - \partial u/\partial y$.

Пусть $u = u(x,y)$ — регулярное в области Ω решение уравнения (24) такое, что $u(x,0) \equiv T(x) \in C^2]0,r[$, $u_y(x,0) \equiv N(x) \in C^1]0,r[$. Тогда

$$2\partial u/\partial\eta = T'(\eta) + N(\eta) \in C(0 < \eta < r). \qquad (26)$$

Из (26) прямо следует, что при $\xi \to \eta$ выражение $\sqrt{1-\xi/\eta}\,\partial u/\partial\eta \to 0$. Принимая это во внимание, из (25) получаем локальное краевое условие

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad 0 < \eta < r. \qquad (27)$$

Равенство (27) говорит о том, что функция u является решением уравнения $u_x - u_y = 0$. Она будет решением и уравнения $u_x^2 - u_y^2 = (u_x + u_y)(u_x - u_y) = 0$. Поэтому ясно, что функционал $F(1, u) = 0$.

Когда $m \neq 0$, выражение $N(-(-y)^m) = 1 + 2/m$ и оно положительно при $m > 0$ и отрицательно при $-2 < m < 0$.

Известное в теории смешанных до– и сверхзвуковых течений уравнение Чаплыгина можно записать в виде (1) с $f(u) = 0$, т.е. в форме

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{28}$$

где $x = \theta$ — угол наклона скорости течения, $0 \leq x \leq \theta_0$;

$$y = \sigma = \frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau_*} \frac{(1-t)^\beta}{t} dt, \quad K(y) = \frac{\tau_* - \tau}{\tau_*(1-\tau)^{1/\tau_*}},$$

τ — переменная Чаплыгина, $0 < \tau \leq 1$, $\tau_* = 1/(2\beta + 1)$ — критическая скорость; $u = u(x, y) \equiv \Psi(\theta, \sigma)$ — функция тока [1, с. 279].

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\frac{dK}{dy} = \frac{dK}{d\tau}\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{4\beta\tau^2}{\tau_*(1-\tau)^{3\beta+2}} \geq 0. \tag{29}$$

Итак, функция $K(y)$ при $\tau \to 0$ ($y \to +\infty$) стремится к единице и падает при растущем τ (убывающем y). При переходе через критическую линию $\tau = \tau_*$ ($y = 0$) она меняет свой знак: $\operatorname{sign} K(y) = \operatorname{sign} y$.

Поскольку (см. [1, с. 283])

$$\sqrt{|K|} - \frac{1}{4\sqrt{|K|}}\frac{dM}{d\sigma} = \sqrt{|K|}\frac{(2+\beta)\tau - 2}{\beta(2\beta+1)\tau^2},$$

то

$$N(K) = \frac{4(\tau_0 - \tau)\tau_*^2}{\tau_0(1-\tau_*)\tau^2}, \tag{30}$$

где $\tau_0 = 2/(2+\beta)$ — значение переменной Чаплыгина τ, при котором число Маха $M_0(\tau) = \sqrt{2\beta\tau/(1-\tau)}$ равняется 2: $M_0(\tau_0) = 2$.

Пусть σ_0 (σ_1) равно значению σ при $\tau = \tau_0$ ($\tau = 1$). Равенства (29) и (30) подводят к следующему заключению: $N(K) > 0$ ($N(K) < 0$) тогда и только тогда, когда $\sigma_0 < y < 0$ ($\sigma_1 < y < \sigma_0$).

Если $\Omega \subset \{(x, y) : \sigma_0 < y < 0\}$, функция тока $\Psi = u(x, y)$ — регулярное в области Ω решение уравнения Чаплыгина (28) такое, что $\Psi \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \{(x, y) : 0 < x < \theta_0,\ y = 0\})$, $\partial\Psi/\partial\eta = O(1/\sqrt{-K})$, $F(K; \Psi) < \infty$, $\Psi|_{AC} = 0$, то функционал $F(K; \Psi) \geq 0$. Этот результат по существу принадлежит Ф. И. Франклю [1, с. 282].

2. Априорные оценки для гиперболического типа уравнения со степенным вырождением

В этой части рассмотрим уравнение

$$u_{yy} - (-y)^m u_{xx} = 0, \quad m = const > -1 \tag{31}$$

в области Ω, ограниченной характеристиками AC : $x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, BC : $x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = r$ и отрезком AB оси абсцисс (см. рис. 1).

Как отмечено ранее, уравнение (31) при $m = 1$ совпадает с уравнением Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

При определенной схематизации [1, с. 486] прямая задача теории плоскопараллельного симметричного сопла Лаваля приводит к задаче Трикоми для уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^{-1/2} u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{32}$$

с разрывным условием сопряжения

$$\lim_{y \to -0} u_y(x,y) = -\lim_{y \to +0} u_y(x,y).$$

Уравнение (32) в зоне сверхзвуковых течений является уравнением гиперболического типа и его можно записать в виде

$$u_{xx} - (-y)^{1/2} u_{yy} = 0. \tag{33}$$

В случае уравнения (33) граница области Ω не содержит нехарактеристических точек. Прямая $y = 0$ представляет собой особую характеристику уравнения (33), где оно одновременно вырождается в уравнение параболического типа.

В теории краевых задач для уравнений смешанного типа ключевую роль играет знак функционала $\varphi(m; u) = F(-|y|^m; u)$ в классе функций, обращающихся в нуль на одной из характеристик AC или BC.

Пусть $u = u(x, y)$ — регулярное в области Ω решение уравнения (31). Через $\varphi_\varepsilon(m; u)$, где на этот раз $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, обозначим следующий функционал

$$\varphi_\varepsilon(m; u) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} [u_y^2 - (-y)^m u_x^2] \, dx \, dy.$$

При $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ граница области Ω_ε состоит (см. рис. 3) из отрезка $A_\varepsilon B_\varepsilon$ прямой $y = y_\varepsilon = -\big[\frac{m+2}{4}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\big]^{2/(m+2)}$ и характеристик $A_\varepsilon C_\varepsilon$: $x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = \varepsilon_1$; $C_\varepsilon B_\varepsilon$: $x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = \varepsilon_4$; $A_\varepsilon = \big(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_3}{2}, y_\varepsilon\big)$, $B_\varepsilon = \big(\varepsilon_4 - \frac{\varepsilon_3-\varepsilon_1}{2}, y_\varepsilon\big)$; $C_\varepsilon = \Big(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_4}{2}, -\big[\frac{m+2}{4}(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)\big]^{2/(m+2)}\Big)$.

Поскольку

$$u_y^2 - (-y)^m u_x^2 = \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) - \frac{\partial}{\partial x}[(-y)^m uu_x],$$

то

$$\varphi_\varepsilon(m; u) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial y}(uu_y) - \frac{\partial}{\partial x}(|y|^m uu_x)\right] dx \, dy. \tag{34}$$

Из (34) согласно формуле Грина имеем

$$\varphi_\varepsilon(m;u) = -\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} u\,[u_y\,dx + |y|^m u_x\,dy] =$$

$$= \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} uu_y\,dx - \left(\int\limits_{A_\varepsilon C_\varepsilon} + \int\limits_{C_\varepsilon B_\varepsilon}\right)[u_y\,dx + |y|^m u_x\,dy]u. \tag{35}$$

На характеристике $A_\varepsilon C_\varepsilon:\ dx = -|y|^{m/2}\,dy$ полный дифференциал

$$du = u_x dx + u_y dy = -|y|^{-m/2}(u_y dx + |y|^m u_x dy), \tag{36}$$

$$du = (u_\xi + u_\eta)dx + |y|^{m/2}(u_\xi - u_\eta)dy = 2u_\eta dx, \tag{37}$$

а на характеристике $C_\varepsilon B_\varepsilon\ :\ dx = |y|^{-m/2}dy$

$$du = |y|^{-m/2}(u_y dx + |y|^m u_x dy) = 2u_\xi dx. \tag{38}$$

Учтем (36), (37) и (38) в (35). Тогда, если ввести обозначение

$$I_\varepsilon(u) = \varphi_\varepsilon(m;u) - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} uu_y dx,$$

то

$$I_\varepsilon(u) = \left(\int\limits_{A_\varepsilon C_\varepsilon} - \int\limits_{C_\varepsilon B_\varepsilon}\right)|y|^{m/2}u du \tag{39}$$

или

$$I_\varepsilon(u) = 2\int\limits_{A_\varepsilon C_\varepsilon}|y|^{m/2}uu_\eta dx - 2\int\limits_{C_\varepsilon B_\varepsilon}|y|^{m/2}uu_\xi dx. \tag{40}$$

Пусть: $u(x,y)$ непрерывна всюду в $\overline{\Omega}$ за исключением, быть может, точек A и B; $u_\eta \in C(0 \le \xi < \eta \le r)$; $u\Big|_{AC} = const$; $C_\varepsilon^0 B_\varepsilon^0$ — характеристика $C_\varepsilon B_\varepsilon|_{\varepsilon_1=0}$, $B_\varepsilon^0 = \big(\varepsilon_4 - \varepsilon_3/2, y_\varepsilon^0\big)$, а $A_\varepsilon^0 C_\varepsilon^0$ — часть характеристики AC с концами в точках $A_\varepsilon^0 = \big(\varepsilon_3/2, y_\varepsilon^0\big)$ и $C_\varepsilon^0 = \Big(\varepsilon_4/2, -\big[\frac{m+2}{4}\varepsilon_4\big]^{2/(m+2)}\Big)$, где $y_\varepsilon^0 = -\big[\frac{m+2}{4}\varepsilon_3\big]^{2/(m+2)}$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{A_\varepsilon C_\varepsilon}|y|^{m/2}u\,du = \frac{1}{2}\int\limits_{A_\varepsilon^0 C_\varepsilon^0}|y|^{m/2}\,du^2 = 0. \tag{41}$$

Из (39)–(41) при $\varepsilon_1 \to 0$ получаем

$$I_\varepsilon^0(u) = I_\varepsilon(u)\Big|_{\varepsilon_1=0} = -\frac{1}{2}\int\limits_{C_\varepsilon^0 B_\varepsilon^0}|y|^{m/2}\,du^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}|y|^{m/2}u^2\Big|_{C_\varepsilon^0}^{B_\varepsilon^0} - \frac{m}{4}\int\limits_{C_\varepsilon^0 B_\varepsilon^0}u^2|y|^{(m-2)/2}\,dy. \tag{42}$$

Отсюда нетрудно видеть, что если $-1 < m < 0$, то

$$I_\varepsilon^0(u) \ge -\frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{4}\varepsilon_3\right)^{m/(m+2)} u^2\left(\varepsilon_4 - \frac{\varepsilon_3}{2}, -\left[\frac{m+2}{4}\varepsilon_3\right]^{2/(m+2)}\right), \tag{43}$$

если же $m > 0$, то

$$I_\varepsilon^0(u) \le \frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{4}\varepsilon_4\right)^{m/(m+2)} u^2\left(\frac{\varepsilon_4}{2}, -\left[\frac{m+2}{4}\varepsilon_4\right]^{2/(m+2)}\right). \tag{44}$$

Теперь воспользуемся известными в теории уравнений смешанного типа обозначениями: $2\beta = m/(m+2)$, $u(x,0) = \tau(x)$, $u_y(x,0) = \nu(x)$, $(\tau,\nu)_0$ — скалярное произведение в пространстве $L^2[0,r]$ и сформулируем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $u(x,y)$ — регулярное в области Ω решение уравнения* (31), *непрерывное всюду в $\overline{\Omega}$ за исключением, быть может, точек A и B; $u_\eta \in C(0 \le \xi < \eta \le r)$; $\tau(x)\nu(x) \in L[0,r]$; $u|_{AC} = \Psi \equiv \mathrm{const}$. Тогда*

$$\varphi(m;u) - (\tau,\nu)_0 \ge -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon_4\to r}\lim_{\varepsilon_3\to 0}\left(\frac{m\varepsilon_3}{8\beta}\right)^{2\beta} u^2\left(\varepsilon_4 - \frac{\varepsilon_3}{2}, -\left[\frac{m\varepsilon_3}{8\beta}\right]^{4\beta/m}\right),$$

если $-1 < m < 0$ и

$$\varphi(m;u) - (\tau,\nu)_0 \le \frac{1}{2}\left(\frac{mr}{8\beta}\right)^{2\beta}\Psi^2,$$

если $m > 0$.

Лемма 2 является следствием (42)–(44).

Из леммы 2 следует, что если $\Psi = 0$ при $m > 0$ и

$$\lim_{\varepsilon_4\to r}\lim_{\varepsilon_3\to 0}\varepsilon_3^{2\beta}u^2\left(\varepsilon_4 - \frac{\varepsilon_3}{2}, \left[\frac{m\varepsilon_3}{8\beta}\right]^{2\beta/m}\right) = 0, \tag{45}$$

при $-1 < m < 0$, то

$$\varphi(m;u) \ge (\tau,\nu)_0, \quad -1 < m < 0,$$
$$\varphi(m;u) \le (\tau,\nu)_0, \quad m > 0.$$

Условие (45) имеет место, если соблюдено условие Ф. И. Франкля о «достаточно быстром стремлении $u \to 0$ в точке B» [1, с. 401]:

$$\lim_{(x,y)\to(r,0)}(-y)^{m/2}u^2(x,y) = 0.$$

Знак $(\tau,\nu)_0$ при $-1 < m < 0$ и $\Psi = 0$ можно определить по схеме, предложенной в [4, с. 222], опираясь на фундаментальное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{B(\beta,1-2\beta)}{\Gamma(2\beta)}D_{0x}^{2\beta-1}\nu(t),$$

где $B(x,y)$ — бета-функция, $D_{0x}^{2\beta-1}$ — оператор дробного интегрирования порядка $1-2\beta$.

В настоящее время хорошо развит метод априорных оценок решения краевых задач для линейных уравнений вида (1). Среди основополагающих работ отметим работу В. Н. Врагова [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1978.
2. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.

3. *Нахушев А. М.* // Дифференц. уравнения, 1992. Т. 28, N 10. С. 1770–1786.
4. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000.
5. *Врагов В. Н.* // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, N 1. С. 7–16.

Нахушев Адам Маремович
Россия, Нальчик, НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
niipma@mailru.com