УДК 517.95

О ПОВЕДЕНИИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

И. М. Петрушко

Устанавливаются необходимые и достаточные условия на решения параболических уравнений, вырождающихся на части боковой границы цилиндра для существования предела в L_2 на цилиндрической поверхности цилиндра и в L_2 с весом на его нижнее основание.

Пусть Q — ограниченная область в $R_n,\ n \geq 2$ ($x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — точка из R_n), расположенная в полупространстве $x_n > 0$, граница ∂Q которой $(n-1)$–мерная замкнутая поверхность без края класса C^2. Часть границы Γ_0 области Q расположена в гиперплоскости $x_n = 0$. Остальную часть границы обозначим через $\Gamma_1 : \Gamma_1 = \partial Q \cap \{x_n = 0\}$, $\bar{\Gamma}_0 \cup \Gamma_1 = \partial Q$.

Обозначим через δ_0 столь малое число, чтобы для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ подмножество $Q_\delta = Q \cap \{r(x) > \delta\}$ было областью с границей $\partial Q_\delta \in C^2$. Здесь

$$r(x) = \min_{y \in \partial Q} |x - y|, \quad x \in Q.$$

Обозначим через Q^T цилиндр $Q^T = Q \times (0, T)$.

Рассмотрим в Q^T — линейное параболическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + x_n^m u_{x_n x_n} \right] + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f, \tag{1}$$

где m — постоянная, $0 < m < 1$; $a_{ij} \in C^1(\bar{Q}^T)$, $i, j = 1, 2, ..., n-1$; $a_i \in C^1(\bar{Q}^T)$, $i = 1, 2, ..., n$; $a \in C(\bar{Q}^T)$ и для всех $(x,t) \in \bar{Q}^T$ существует постоянная $\gamma_0 > 0$, что для всех $\xi \in R_{n-1}$

$$\gamma_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \gamma_0^{-1} |\xi|^2. \tag{2}$$

Правую часть уравнения (1) $f(x,t)$ будем предполагать принадлежащей банахову пространству $L_{2,1,m}(Q^T)$, получающемуся пополнением $C^\infty(\bar{Q}^T)$ по норме

$$||f||_{L_{2,1,m}(Q^T)} = ||f||_{L_2 Q(\delta_0 \times (\delta_0, T))} +$$

$$+ \int_0^{\delta_0} \mu ||f||_{L_2(\partial Q_\mu \times (\mu, T))} d\mu + \int_0^{\delta_0} \left[\int_{Q_\mu} \frac{(f(x,\mu))^2}{x_n^m} \rho(x) dx \right]^{1/2} d\mu.$$

Определение 1. Функцию $u(x,t) \in W_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$ называют *обобщенным решением из* $W_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$ уравнения (1), если для всех финитных в Q^T функций

$\eta(x,t) \in H_2^1(Q^T)$

$$\int\limits_{Q^T} \left[-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + u_{x_n}(x_n^m\eta)_{x_n} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta + au\eta\right] dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q^T} f\eta dxdt.$$

Будем говорить, что функция $w(x,t)$ финитна по x в Q^T, если существует область Q', строго лежащая в Q, такая, что $w(x,t)$ равна нулю вне Q'^T.

Предположим, что функция $u(x,t)$, определенная в Q^T, является обобщенным решением уравнения (1) из $W_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$. Тогда для любой функции $w(x,t)$, принадлежащей $H_2^1(Q^T)$ и финитной по x в Q^T, и для любого $\beta \in (0, T/2)$ и любого $T' \in (T/2, T)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{Q} u(x,T')w(x,T')dx - \int\limits_{Q} u(x,\beta)w(x,\beta)dx +$$

$$+ \int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q}\Big[-uw_t + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}(x_n^m w) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}w + auw\Big]dxdt = \int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q} fwdxdt.$$

Пусть $\rho(x)$ — функция, обладающая следующими свойствами

$$\rho(x) = r(x), \quad x \in Q/Q_{\delta_0}, \quad \rho(x) \in C^2(\bar{Q}),$$

и существует такая постоянная $\gamma_1 > 0$, что для всех $x \in Q$

$$\gamma_1 r(x) \le \rho(x) \le \gamma_1^{-1} r(x).$$

Так как уравнение (1) параболично при $x_n > 0$, то справедлива следующая лемма 1.

Лемма 1. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение из $W_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$ уравнения (1), правая часть которого $f \in L_{2,loc}(Q^T)$. Тогда для любого $\delta \in (0,\delta_0]$, для любого $\beta \in (0,\delta_0]$ и для любого $T' \in (T/2,T)$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta} u^2(x,T')\frac{\rho-\delta}{x_n^m}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta} u^2(x,\beta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}dx +$$

$$+ \int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\frac{\rho-\delta}{x_n^m} + u_{x_n}^2(\rho-\delta)\right]dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}\left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{x_n^m} + \rho_{x_n}^2\right]u^2 dsdt - \frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\right)_{x_i} u^2dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\left[\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(a_{ij}\frac{\rho_{x_i}}{x_n^m}\right)_{x_j}+\rho_{x_nx_n}\right]u^2dxdt+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}au^2\frac{\rho-\delta}{x_n}dxdt=$$

$$=\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}fu\frac{\rho-\delta}{x_n}dxdt.$$

Пусть $T'\in(T/2,T)$ и $\delta\in(0,\delta_0]$. Обозначим через

$$F_\delta(u)=\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{x_n^m}+u_{x_n}^2\right)(\rho(x)-\delta)dxdt+\int\limits_{Q_\delta}u^2(x,T')(\rho-\delta)dx$$

и

$$M(\delta)=\max_{\delta\le\mu\le\delta_0}\left[\int\limits_{\mu}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\mu}u^2dsdt+\int\limits_{Q_\mu}u^2(x,\mu)(\rho-\mu)dx\right].$$

Заметим, что в силу свойств функции $\rho(x)$ принадлежности ∂Q классу C^2 и неравенства (2), существует такая постоянная $\gamma_2>0$, что для всех $x\in\partial Q$

$$\gamma_2\le\left.\left(\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{x_n^m}+\rho_{x_n}^2\right)\right|_{x\in\partial Q}\le\gamma_2^{-1}.$$

Следовательно, справедливы следующие неравенства

$$\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}u^2dsdt+\int\limits_{Q_\delta}u^2(x,\delta)\frac{\rho(x)-\delta}{x_n^m}dx\le C_1\left[\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}|f||u|\frac{\rho-\delta}{x_n^m}dxdt+F_\delta(u)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}|a||u|^2\frac{\rho-\delta}{x_n^m}dxdt+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\frac{u^2}{x_n^m}dxdt\right] \tag{3}$$

и

$$F_\delta(u)+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}au^2\frac{\rho-\delta}{x_n^m}dxdt\le C_2\left[\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}|f||u|\frac{\rho-\delta}{x_n^m}dxdt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}u^2dsdt+\int\limits_{Q_\delta}u^2(x,\delta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}dx+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\frac{u^2}{x_n^m}dxdt\right]. \tag{4}$$

На основании оценок (3) и (4) легко доказываются следующие леммы 2, 3 (см. [1, 2]).

Лемма 2. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение уравнения* (1) *из $W_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$. Тогда для любого $\delta\in(0,\delta_0/2]$*

$$M(\delta)+\int\limits_{\delta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}u^2(\rho-\delta)dx\le C_3\left[||f||^2_{L_{2,1,m}(Q^T)}+F_\delta\right]$$

с постоянной C_3, не зависящей ни от $\delta \in (0, \delta_0/2]$ ни от $T' \in (T/2, T)$.

Лемма 3. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение уравнения (1) из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$. Тогда для любого $\delta \in (0, \delta_0/2]$*

$$F_\delta(u) + \int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} u^2(\rho - \delta) dx dt \leq$$

$$\leq C_4 \left[||f||^2_{L_{2,1,m}(Q^T)} + \int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} u^2 ds dt + \int\limits_{Q_\delta} u^2(x,\delta)(\rho - \delta) dx \right],$$

с постоянной C_4, не зависящей ни от $\delta \in (0, \delta_0/2]$ ни от $T' \in (T/2, T)$.

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу H_2, если

$$\sup_{\delta \in (0,\delta_0]} \left[\int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} u^2 ds dt + \int\limits_{Q_\delta} u^2(x,\delta) \frac{\rho(x) - \delta}{x_n^m} dx \right] < \infty \quad (H_2)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того, чтобы обобщенное из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ решение уравнения (1) с $f \in L_{2,loc}(Q^T) \cap L_{2,1,m}(Q^T)$ принадлежало классу H_2, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_0^T \int\limits_Q \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j} \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{x_n^m} + u^2_{x_n} \right] (\rho(x) - \delta) dx dt + \sup_{\delta, T'} \left\{ \int\limits_{Q_\delta} u^2(x, T')(\rho - \delta) dx \right\} < \infty.$$

Необходимость. Пусть $u(x,t) \in H_2$. Следовательно, $u(x,t) \in L_2(Q^T)$ и

$$\int\limits_0^T \int\limits_Q u^2(x,t) \frac{dx}{x_n^m} dt < \infty.$$

Поэтому в силу леммы 3 имеем, что

$$F_\delta(u) \leq C_5$$

с постоянной C_5, не зависящей ни от $\delta \in (0, \delta_0/2]$ ни от $T' \in (T/2, T)$.

Достаточность следует из леммы 2.

Теорема доказана.

Будем говорить, что функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ принимает граничное значение

$$u_{|\partial Q \times (0,T)} = \varphi, \quad \varphi \in L_2(\partial Q \times (0,T)) \tag{5}$$

в смысле L_2, если $\forall T' \in (T/2, T)$

$$\lim_{\delta \to +0} \int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{\partial Q} \left(u(x - \delta u(x,t)) - \varphi(x,t) \right)^2 ds\, dt = 0. \tag{5'}$$

Будем также говорить, что функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ принимает начальное значение

$$u_{|t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) \in L_2\left(Q, \frac{\rho(x)}{x_n^m}\right) \tag{6}$$

в смысле L_2 с весом $\dfrac{\rho(x)}{x_n^m}$, если

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_{Q_\delta} (u(x,\delta) - u_0(x))^2 \, \frac{\rho(x)-\delta}{x_n^m} \, dx. \tag{6$'$}$$

Определение 2. Функция $u(x,t)$ является *решением из* $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ первой смешанной задачи (1), (5), (6), если она является обобщенным из $W^{1}_{2,loc}(Q^T)$ решением уравнения (1) и удовлетворяет граничному условию (5) в смысле равенства (5$'$) и удовлетворяет начальному условию (6) в смысле равенства (6$'$).

Теорема 2. *Для любых функций* $L_2(\partial Q \times (0,T))$ *и* $u_0(x) \in L_2\left(Q, \dfrac{\rho}{x_n^m}\right)$ *и любой функции* $f \in L_{2,loc}(Q^T) \cap L_{2,1,m}(Q^T)$ *первая смешанная задача* (1), (5), (6) *имеет обобщенное решение* $u(x,t) \in W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$, *это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\int\limits_0^T \int\limits_Q \left[\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\,\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{x_n^m} + u_{x_n}^2\right] \rho(x)\,dx\,dt +$$

$$+ \max_{\delta\in(0,\delta_0]} \left[\int\limits_\delta^T \int\limits_{\partial Q_\delta} u^2\,ds\,dt + \int\limits_{Q_\delta} u^2(x,\delta)\frac{\rho-\delta}{x_n^m}\,dx\right] \leq$$

$$\leq C_{10}\left[||f||^2_{L_{2,1,m}(Q^T)} + ||\varphi||^2_{L_2(\partial Q\times(0,T))} + ||u_0||^2_{L_2\left(Q,\frac{\rho}{x_n^m}\right)}\right] \tag{7}$$

с постоянной C_{10}, *зависящей только от коэффициентов уравнения* (1).

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ задачи (1), (5), (6). Согласно (5$'$), (6$'$) решение $u(x,t)$ принадлежит классу H_2. Следовательно, по теореме 1 функция

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\,\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{x_n^m} + u_{x_n}^2\right) \rho(x)$$

интегрируема по Q^T и по теореме Лебега

$$\int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\,\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{x_n^m} + u_{x_n}^2\right) (\rho-\delta)\,dx\,dt \to$$

$$\to \int\limits_0^{T'} \int\limits_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\,\frac{u_{x_i}u_{x_j}}{x_n^m} + u_{x_n}^2\right) \rho(x)\,dx\,dt$$

при $\delta \to +0$. А т.к. $u(x,t) \in H_2$, то

$$\int\limits_0^{T'} \int\limits_Q u^2 \, \rho(x) \, dx < \infty,$$

и следовательно

$$\int\limits_\delta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} u^2 (\rho - \delta) \, dx \, dt \;\to\; \int\limits_0^{T'} \int\limits_Q u^2 \, \rho(x) \, dx \, dt$$

при $\delta \to +0$.

Следовательно, мы можем перейти к пределу при $\delta \to +0$ в неравенствах лемм 2 и 3. В результате получим неравенство (7).

Перейдем к доказательству существования решения.

Возьмем произвольные $\varphi \in L_2 \left(\partial Q \times (0,T)\right)$, $u_0 \in L_2 \left(Q, \dfrac{\rho}{x_n^m}\right)$ и $f(x,t) \in L_{2,loc} \left(Q^T\right) \cap L_{2,1,m} \left(Q^T\right)$.

Пусть $\{\varphi_k\}$ — последовательность функций из $C^2(\partial Q \times (0,T))$, сходящаяся в $L_2(\partial Q \times (0,T))$ к функции $\varphi(x,t)$

$$||\varphi_k - \varphi||_{L_2(\partial Q \times (0,T)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Пусть $\{u_{0k} - u_0\}$ — последовательность функций из $C^2(\bar{Q})$, сходящаяся в $L_2 \left(Q, \dfrac{\rho}{x_n^m}\right)$ к функции $u_0(x)$

$$||u_{0k} - u_0||_{L_2\left(Q, \frac{\rho}{x_n^m}\right)} \to 0 \text{ при } k \to \infty$$

и пусть $\{f_k\}$ — последовательность функций из $C^1(\bar{Q^T})$, сходящаяся в $L_{2,1,m} \left(Q^T\right)$ к функции $f(x,t)$

$$||f_k - f||_{L_{2,1,m} \left(Q^T\right)} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Обозначим через $u_k(x,t)$ решение из $W_2^{2,1} \left(Q^T\right)$ первой смешанной задачи (1), (5), (6) с функциями $\varphi_k(x,t)$, $u_{0k}(x)$, $f_k(x,t)$.

Т.к. решение из $W_2^{2,1}(Q^T)$ является также решением из $W_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$, то оценка (7) справедлива и для $u_k(x,t)$. Следовательно, последовательность $\{u_k\}$ сходится к некоторой функции $u(x,t)$ в банаховом пространстве с нормой

$$||u||_B^2 = \int\limits_0^T \int\limits_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{x_n^m} + u_{x_n}^2 \right) \rho(x) dx dt + \int\limits_0^T \int\limits_Q u^2 dx dt +$$

$$+ \max_{\substack{\delta \in (0,\delta_0] \\ T' \in [T/2, T]}} \left[\int\limits_0^{T'} \int\limits_{\partial Q_\delta} |u|^2 ds dt + \int\limits_{Q_\delta} u^2 (\rho - \delta) dx \right],$$

т.е. $||u_k - u||_B \to 0$ при $k \to \infty$.

Т.к. для любого Q' строго вложенного в Q последовательность $\{u_k\}$ сходится к функции $u(x,t)$ в $W_2^{1,0}(Q' \times (0,T'))$ и, следовательно, $u(x,t)$ является решением уравнения (1) из $W_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$. Удовлетворение условиям ($5'$) и ($6'$) очевидна.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 аналогично, как это делается в работе [1], доказывается теорема 3.

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t)$ *является решением из* $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ *уравнения* (1) *с* $f \in L_{2,1,m}(Q^T) \cup L_{2,loc}(Q^T)$. *Для того, чтобы функция* $u(x,t)$ *имела предел в смысле* L_2 *на боковой поверхности цилиндра* Q^T *и имела предел в смысле* L_2 *с весом* $\rho(x)/x_n^m$ *на его нижнее основание, необходимо и достаточно, чтобы функция* $u(x,t)$ *принадлежала классу* H_2.

Из теорем 1 и 3 вытекает справедливость теоремы 4.

Теорема 4. *Пусть* $u(x,t)$ *является решением из* $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ *уравнения* (1) *с* $f \in L_{2,1,m}(Q^T) \cup L_{2,loc}(Q^T)$. *Для того, чтобы функция* $u(x,t)$ *имела предел в смысле* L_2 *с весом* $\rho(x)/x_n^m$ *на его нижнее основание, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\int\limits_0^T \int\limits_Q \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{x_n^m} + u_{x_n}^2 \right) \rho(x) dx dt < \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петрушко И. М.* О граничных и начальных значениях в L_p, $p > 1$, решения параболических уравнений // Мат. сб. 1984. Т. 125(167), N 4(12). С. 489–521.
2. *Петрушко И. М.* О граничных значениях решений вырождающихся эллиптических уравнений типа Келдыша со слабым вырождением // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа со слабым вырождением. Новосибирск, 1990. С. 166–182.
3. *Петрушко И. М.* О существовании граничных значений решений вырождающихся эллиптических уравнений // Мат. сб. 1999. Т. 190, N 7. С. 41–72.

Петрушко Игорь Мелетьевич

Россия, Москва, Московский энергетический институт

petrushko@mail.ru