УДК 517.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МОНОТОННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

А. Г. Подгаев

Впервые М. Жевре и И. Г. Петровский исследовали для одномерного линейного уравнения теплопроводности краевую задачу в области с криволинейной границей, определив условия, накладываемые на границу, для корректности задачи и гладкости решений. Общий случай линейного одномерного уравнения рассмотрен в работах В. П. Михайлова [1, 2]. В частности, изучен важный вопрос о следе решения на криволинейных участках границы. Предлагалась и общая абстрактная схема изучения таких уравнений (С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев).

Исследование нелинейных уравнений требовало получения дополнительных сведений о о полноте некоторых систем функций, о следах семейства распределений, о компактности. Для областей с не слишком сложной границей эти вопросы удалось снять сведением уравнений с помощью замены переменных к случаю цилиндрической границы. Такой подход применялся, например, в работах Н. А. Ларькина, А. И. Кожанова и их учеников.

Автором развивается подход получения теорем разрешимости не использующий преобразование уравнения к классическому случаю.

В [3] развивался метод компактности исследования таких задач, а в [4] предложена модификация метода монотонности для случая нецилиндрических областей. Причем, удалось избежать введения понятия следа на пространственно–временных поверхностях построив доказательство, используя только понятия следа у интегралов от функций по пространственным переменным.

В связи с этим возник вопрос о единственности решений задач в нецилиндрических областях, в этом же классе функций, и при тех же предположениях, поскольку разработанные ранее методы, также использовали понятие следов при $t = const$. В данной работе предлагается один из таких подходов и устанавливается единственность решения задачи, существование которого доказано в [2] в том же классе функций.

Пусть $\bar{B} = \{y \in R^n : |y| \le 1\}$ — замкнутый шар в R^n; $\psi(y,t) = \big(\psi^1(y,t), \psi^2(y,t), \ldots, \psi^n(y,t)\big)$ — семейство диффеоморфизмов, таких, что $\psi(y,t)$ при фиксированном $t \in [0,T]$ переводит $\bar{B}$ в замкнутую область $\bar{D}_t \subset R^n$; $\varphi(x,t) = \big(\varphi^1(x,t), \varphi^2(x,t), \ldots, \varphi^n(x,t)\big)$ — семейство обратных отображений: $\bar{D}_t \to \bar{B}$; $\bar{Q}_T = \bigcup\limits_{t\in[0,T]} \{\bar{D}_t \times t\}$, так что $\bar{D}_{t_0}$ — сечение $\bar{Q}_T$ гиперплоскостью $t = t_0$ в пространстве R^{n+1}.

Будем предполагать, что $\varphi \in C^1(\bar{Q}_T), \bigtriangledown_x \varphi^i \in C^1(\bar{Q}_T),\ i = 1, 2, \ldots, n$ и якобиан I преобразования $\varphi : \bar{D}_t \to \bar{B}$ такой, что $I(x,t) \ne 0$ в $\bar{Q}_T$.

Функции a, f, u_0, определяющие задачу, обладают свойствами:

I. *Условие монотонности*: $a \in C(R)$, $a(\xi)$ не убывает.

II. *Условие на рост*: $|a(\xi)| \le c_1|\xi|^{p-1} + c_2$, $p \ge 2$.

III. *Условие эллиптичности*: $a(\xi)\cdot\xi \geq \nu|\xi|^p - \mu$, где $\nu > 0$, $\mu \geq 0$.

IV. *Условия на входные данные*: $u_0 \in L_2(D_0)$, $\|f\|_{L_2(D_t)} \in L_\infty(0,T)$ и для каждой $g \in C^1(\bar{Q}_T)$ функция $\int\limits_{D_t} f(x,t)g(x,t)dx$ непрерывна на $[0,T]$.

В области Q_T рассматривается уравнение

$$u_t(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a(u_{x_i}(x,t)) = f(x,t). \tag{1}$$

Требуется найти решение $u = u(x,t)$ данного уравнения, удовлетворяющее однородным граничным условиям на «боковой» поверхности $S = \bigcup\limits_{t\in[0,T]} \{\partial D_t \times t\}$ и начальному условию при $t = 0$. Определим $L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$ — пространство вещественнозначных функций ϑ, равных нулю на ∂D_t для почти всех t, и

$$\int\limits_{Q_T} (|\vartheta|^p + |\bigtriangledown\vartheta|^p) dQ_T \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \|\vartheta\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)} dt < \infty.$$

Определение 1. Функция $u \in L_p(t; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$, такая, что $\underset{t\in[0,T]}{\mathrm{vraimax}} \|u\|_{L_2(D_t)} < \infty$, называется *обобщенным решением* задачи, если для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ и любой функции $F \in C^1(\bar{Q_T})$, обращающейся в нуль на S, выполнено интегральное тождество

$$-\int\limits_0^T \Bigl(\int\limits_{D_t} uF dx\Bigr)\acute{\varphi} dt - \int\limits_0^T \int\limits_{D_t} uF_t \varphi dx dt + \int\limits_0^T \Bigl(\int\limits_{D_t} \sum_{i=1}^{n} a(u_{x_i}) F_{x_i} dx\Bigr)\varphi dt =$$
$$= \int\limits_0^T \int\limits_{D_t} fF\varphi dx dt, \tag{2}$$

а для любых $\omega_j(x,t)$ выполнено условие

$$\int\limits_{D_t} u(x,t)\omega_j(x,t)dx \to \int\limits_{D_0} u_0(x)\omega_j(x,0)dx, \text{ при } t \to 0, \tag{3}$$

где $\omega_j(x,t)$ — некоторый гладкий базис, ортонормированный в $L_2(D_t)$ для каждого t.

Для дальнейших рассуждений выберем его таким, что линейные комбинации $\sum\limits_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} b_i(t)\omega_j(x,t)$ плотны в пространстве $H(Q_T)$, определенном ниже. В работе [2] такой базис построен исходя из решений спектральной задачи $(\tilde{\omega}_j, v)_{\overset{\circ}{H}{}^s} = \lambda_j(\tilde{\omega}_j, v)_{L_2(B)}$ для любого $v \in \overset{\circ}{H}{}^s$ по формуле

$$\omega_j(x,t) = \tilde{\omega_j}(\varphi(x,t))|I|^{\frac{1}{2}}.$$

В работе [2] доказана следующая

Теорема 1. *Если выполнены предположения на область Q_T, ограничения I–III на функцию $a(\xi)$, условие IV на начальную функцию и правую часть, то уравнение (1) имеет обобщенное решение $u(x,t)$ в смысле определения 1, причем функция $\langle u(\cdot,t),\ F(\cdot,t)\rangle_t$ непрерывна по $t\in[0,T]$ для любой функции F из $C^1(\bar{Q_T})$, обращающейся в нуль на S.*

Здесь через $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ обозначена двойственность между пространствами $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)$ и $W^{-1}_{\acute{p}}(D_t)$. Считаем, что скалярное произведение в $L_2(D_t)$ согласовано с двойственностью между этими пространствами. Индекс t в угловых скобках указывает на то, что соответствующие пары пространств различны при разных t. Но в дальнейшем он будет опускаться.

Обозначим через $W^{1,1}_{p,\acute{p}}(Q_T)$ полное пространство функций $v\in L_p(t;\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$ таких, что обобщенная производная в смысле Соболева $v_t\in L_{\acute{p}}(Q_T)$. Данное пространство наделено нормой $\|v\|_{W^{1,1}_{p,\acute{p}}(Q_T)}=\Big(\int\limits_0^T\|v\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)}dt\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int\limits_0^T\|v_t\|^{\acute{p}}_{L_{\acute{p}}(D_t)}dt\Big)^{\frac{1}{\acute{p}}}$ и является замыканием по этой норме всех функций из $C^1(\bar{Q_T})$, равных нулю на «боковой» поверхности S.

Определим пространство $H(Q_T)$ как замыкание множества функций из $C^1(\bar{Q_T})$, равных нулю на «боковой» поверхности S, по норме $\|\cdot\|_{H(Q_T)}=\Big(\int\limits_0^T\|\cdot\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)}dt\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int\limits_0^T\|\frac{\partial}{\partial t}\cdot\|_{W^{-1}_{\acute{p}}(D_t)}dt\Big)^{\frac{1}{\acute{p}}}$, где $W^{-1}_{\acute{p}}(D_t)$ — топологически сопряженное к $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)$ пространство. Понятие производной по t для предельной функции во втором слагаемом дает следующее

Определение 2. Пусть $F\in L_p(t;\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))\bigcap C^1(\bar{Q_T})$, $u\in L_p(t;\overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t))$ и $\varphi\in C_0^\infty(0,T)$. Назовем «функцию», которую обозначим через u_t, *производной функции u по t*, если для всех F и φ из указанных классов выполнено тождество

$$\int\limits_0^T\langle u_t,F\rangle\varphi(t)dt=-\int\limits_0^T\Big(\int\limits_{D_t}uF dx\Big)\acute{\varphi}(t)dt-\int\limits_0^T\int\limits_{D_t}F_t u\varphi(t)dxdt.$$

Отметим, что при доказательстве теоремы 1 в [2] получено решение, для которого $u_t\in L_{\acute{p}}(t;W^{-1}_{\acute{p}}(D_t))$. Поэтому t $u_t\in W^{-1}_{\acute{p}}(D_t)$ для почти всех. Это будет использоваться при доказательстве единственности.

Сформулируем лемму, доказанную в [2], необходимую в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть u и $F\in H(Q_T)$. Тогда $\langle F,u\rangle=\int\limits_{D_t}Fudx$ имеет суммируемую производную по t, функция $\int\limits_{D_t}Fudx$ непрерывна по t и справедлива формула*

$$\frac{d}{dt}\langle F,u\rangle=\langle F_t,u\rangle+\langle u_t,F\rangle. \tag{4}$$

Существование решения задачи, гарантированное теоремой 1, доказано в [2] в классе функций $H(Q_T)$. Следующая теорема устанавливает единственность решения задачи в этом классе функций.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 в классе функций $H(Q_T)$ может существовать не более одного решения задачи.*

Доказательство. Пусть существуют два решения u_1 и u_2, удовлетворяющие соотношению (2). Заменяя его на эквивалентное

$$\int_0^T \langle u_{it}, F\rangle\varphi(t)dt + \int_0^T \langle A(t)u_i, F\rangle\varphi(t)dt = \int_0^T \langle f, F\rangle\varphi(t)dt \quad (i=1,2)$$

и замыкая до класса функций $F \in H(Q_T)$ (см. в [2] теорему 5 о плотности вложения $W^{1,1}_{p,\acute{p}}(Q_T) \subset H(Q_T)$), получим, что оно справедливо для всех $F \in H(Q_T)$ и всех $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Отсюда следует

$$\langle u_{it}, F\rangle + \langle A(t)u_i, F\rangle = \langle f, F\rangle. \tag{5}$$

Пусть $F_k \in C^1(\bar{Q_T})$, $F_k|_S = 0$ и $F_k \to F$ в $H(Q_T)$. Из леммы 1 следует, что величины $\langle u, F_k\rangle$ и $\langle u, F\rangle$ непрерывны по t. По ходу доказательства леммы 8 в [2] установлено, что при $k \to \infty$

$$\langle u, F_k\rangle|_{t=0} = \left(\int_{D_t} uF_k dx\right)\Big|_{t=0} \to \left(\int_{D_t} uF dx\right)\Big|_{t=0}.$$

Используя базис $\{\omega_j(x,t)\}$, приблизим F линейными комбинациями $F_k(x,t) = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij}b_i(t)\omega_j(x,t)$. Тогда из (3) имеем для $i=1,2$

$$\int_{D_t} u_iF_k dx \to \int_{D_0} u_0(x)F_k(x,0)dx$$

при $t \to 0$, т.е.

$$\int_{D_t} u_1F_k dx \xrightarrow{t\to 0} \left(\int_{D_t} u_1F_k dx\right)\Big|_{t=0} = \int_{D_0} u_0(x)F_k(x,0)dx \xrightarrow{k\to\infty} \left(\int_{D_t} u_1F dx\right)\Big|_{t=0},$$

$$\int_{D_t} u_2F_k dx \xrightarrow{t\to 0} (\int_{D_t} u_2F_k dx)|_{t=0} = \int_{D_0} u_0(x)F_k(x,0)dx \xrightarrow{k\to\infty} (\int_{D_t} u_2F dx)|_{t=0}.$$

Отсюда в силу единственности предела $\left(\int_{D_t}(u_1-u_2)F dx\right)\Big|_{t=0} = 0.$

Как упоминалось выше, в [2] установлена плотность F_k в $H(Q_T)$. Поэтому можно взять $F = u_1 - u_2$. Получим, что $(\int_{D_t}(u_1-u_2)^2dx)|_{t=0} = 0$.

Из (5) имеем: $\langle u_{1t} - u_{2t}, u_1\rangle + \langle A(t)u_1 - A(t)u_2, u_1\rangle = 0$ или, используя (4),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{D_t} u_1^2 dx - \langle u_{2t}, u_1\rangle + \langle A(t)u_1 - A(t)u_2, u_1\rangle = 0.$$

Аналогично, положив в (5) $F = u_2$, имеем

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{D_t} u_2^2 dx + \langle u_{1t}, u_2\rangle + \langle A(t)u_1 - A(t)u_2, u_2\rangle = 0.$$

Вычтем последние два тождества. Отсюда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{D_t}(u_1^2+u_2^2)dx - \frac{d}{dt}\int_{D_t} u_2u_1 dx + \langle A(t)u_1 - A(t)u_2, u_1-u_2\rangle = 0.$$

Из монотонности $A(t)$ и равенства

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D_t}(u_1^2+u_2^2)dx-2\frac{d}{dt}\int\limits_{D_t}u_2u_1dx=\frac{d}{dt}\int\limits_{D_t}(u_1-u_2)^2dx$$

получим $\frac{d}{dt}\int\limits_{D_t}(u_1-u_2)^2dx\le 0$. Проинтегрируем это неравенство от 0 до t

$$\left(\int\limits_{D_t}(u_1-u_2)^2dx\right)\Bigg|_{t=t}\le\left(\int\limits_{D_t}(u_1-u_2)^2dx)\right)\Bigg|_{t=0}=0.$$

Используя непрерывность по t интеграла слева, получим, что это неравенство выполнено для всех t. В силу неотрицательности подынтегральной функции $u_1-u_2=0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов В. П.* О задаче Дирихле и первой смешанной задаче для параболического уравнения //Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, N 2. С. 303–306.
2. *Михайлов В. П.* О задаче Дирихле для параболического уравнения // Мат. сб. 1963. Т. 61(103), N 1. С. 40–64.
3. *Истомина Н. Е., Подгаев А. Г.* О разрешимости задачи для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения в области с нецилиндрической границей // Дальневосточный мат. журн. 2000. Т. 1, N 1. С. 63–73.
4. *Истомина Н. Е.* Развитие метода монотонности на случай параболического уравнения в нецилиндрической области. Владивосток: Дальнаука, 2001. (Препринт N 6 ИПМ ДВО РАН).

Подгаев Александр Григорьевич

Россия, Хабаровск, Хабаровский государственный технический университет

podgaev@mail.khstu.ru