УДК 517.956.4

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

С. В. Попов

Введение

В работе устанавливается разрешимость краевых задач для некоторых классов уравнений, простейшее из которых имеет вид

$$g(x)u_t + Lu = f, \quad g(x) = \operatorname{sgn} x, \tag{1}$$

где L — эллиптический оператор $2n$-го порядка.

Большое число работ посвящено изучению линейных уравнений (1) при $n = 1$. Отметим, что общая теория краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольными коэффициентами и многообразием смены типа были предметом исследований многих авторов (см. [1–3] и имеющуюся там библиографию). В монографии С. А. Терсенова [4], в частности, впервые установлено, что гладкие решения этих задач существуют только при условиях выполнения конечного числа связей интегрального характера между данными задачи. Он изучал эти задачи в гельдеровских классах функций $H_{x\ t}^{p,p/2}$, $0 < p - [p] < 1/2$. Разрешимость сводил к разрешимости сингулярного интегрального уравнения и эти связи (условия разрешимости) выписывал в явном виде.

В случае уравнений второго порядка ($n = 1$) в работе автора [5] было замечено, что при $p - [p] \geq \frac{1}{2}$ гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных данных, которое, оказалось, существенно зависит и от условий согласования (склеивания) при $x = 0$.

В случае уравнений четвертого порядка ($n = 2$) (см. [6]) показано, что нецелый показатель $p - [p]$ может существенно влиять на количество условий разрешимости.

Отметим также случай $n \geq 4$, когда количество достаточных условий разрешимости можно уменьшить [7, 8].

Рассматриваются параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции, связанные с применением теории сингулярных интегральных уравнений [9–11], а также систем этих уравнений [12].

Уравнения высокого порядка

В области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} x\, u_t = Lu, \tag{2}$$

Работа поддержана Министерством образования РФ (грант № 9–53 "Университеты России")

© 2002 Попов С. В.

где

$$Lu = (-1)^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(k(x,t)\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) + c(x,t)u,$$

$$k(x,t) \geq \delta > 0, \quad c(x,t) \leq 0 \quad (n \geq 2).$$

Решение уравнения (2) в классе ограниченных функций будет единственным при выполнении начальных условий

$$u(x,0) = u_0(x) \ \ (x \in \Omega^+), \quad u(x,T) = u_T(x) \ \ (x \in \Omega^-) \tag{3}$$

и условий непрерывности производных до $(2n-1)$-го порядка

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=+0}, \ 0 < t < T \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1). \tag{4}$$

Методом параболических потенциалов простого слоя с неизвестными плотностями $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Л. Каттабрига [13, 14], краевая задача (2)–(4) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа

$$K_1\vec{\alpha} \equiv A\vec{\alpha}(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{B(T-t, T-\tau)\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \vec{Q}_1(t), \tag{5}$$

$$K_2\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{B(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \vec{Q}_2(t), \tag{6}$$

где A и B — матрицы n-го порядка, выписываемые в явном виде. Отметим, что данное представление решения единственно. Характеристическая часть операторов K_i опеределяется формулами

$$K_1^0\vec{\alpha} \equiv E\vec{\alpha}(t) + \frac{(-1)^n E}{\pi}\int_0^T \frac{\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau,$$

$$K_2^0\vec{\beta} \equiv E\vec{\beta}(t) + \frac{(-1)^{n+1} E}{\pi}\int_0^T \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau,$$

где E — единичная матрица. Полученные системы сингулярных интегральных уравнений

$$K_1\alpha \equiv K_1^0\alpha + k_1\alpha = \vec{Q}_1, \quad K_2\beta \equiv K_2^0\beta + k_2\beta = \vec{Q}_2$$

решаются в классе функций ограниченных на концах отрезка $(0,T)$ (в классе $h(0,T)$ [10]) с индексом $\theta = -1$ [9]. Регуляризуя полученные уравнения по способу, указанному в [12], получим системы уравнений Фредгольма

$$\vec{\alpha} + K_1^* k_1\alpha = \vec{Q}_1^*, \quad \vec{\beta} + K_2^* k_2\beta = \vec{Q}_2^*,$$

подчиненные дополнительным условиям

$$\frac{1}{\pi}\int_0^T N(T-\tau)\vec{\alpha}(\tau)d\tau = \vec{G}_1, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^T N(\tau)\vec{\beta}(\tau)d\tau = \vec{G}_2.$$

Разрешимость уравнений Фредгольма (5) следует из единственности решения основной задачи (2)–(4) и однозначности представления их через потенциалы.

Если решение уравнения (2) ищется из пространства Гельдера $H_{x\ t}^{p,p/2n}$ (в обозначениях [15], то для разрешимости задачи (2)–(4) должны выполняться условия

$$L_s(u_0,u_T)=0,\quad s=1,\dots,2\left([p]-\frac{[p]}{2n}+1\right), \tag{7}$$

где L_s — интегральные операторы от функций u_0,u_T.

Теорема 1. [7, 8] *Пусть $u_0,u_T\in H^p$. Тогда при выполнении условий (7) существует единственное решение уравнения (2) в $Q^{\pm}$ из пространства $H_{x\ t}^{p,p/2n}(Q^{\pm})$, удовлетворяющее условиям (3), (4).*

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы при $n\ge 4$, то существует единственное решение задачи (2)–(4) из пространства $H_{x\ t}^{p,p/2n}(Q^{\pm})$ при выполнении $\frac{3}{2}[p]-\frac{[p]}{2n}+1$ условий.*

Уравнения четвертого порядка

В области $Q=\Omega\times(0,T)$ рассмотрим параболические уравнения четвертого порядка (2) при $n=2$. Решение уравнения ищется из пространства Гельдера $H_{x\ t}^{p,p/4}$, $p=4l+\gamma$, $0<\gamma<1$, удовлетворяющее начальным условиям (3) и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t)=\sigma_k\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t)\quad (k=0,1,2,3), \tag{8}$$

где σ_k — действительные постоянные.

При выполнении условий $\sigma_0=\sigma_1$, $\sigma_2=\sigma_3$ и $\sigma_0\cdot\sigma_2=1$ получим единственность задачи (2), (3), (8) в классе ограниченных функций. Методом параболических потенциалов простого слоя, как и выше, с неизвестными плотностями $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Б. Пини [16, 17], краевая задача (2), (3), (8) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа (5), (6), где

$$A=\begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\sigma^2+1-\sigma^2 & 1+\sigma^2\\ 1+\sigma^2 & 1-\sigma^2\end{pmatrix},$$

$$B(t,\tau)=\begin{pmatrix} (\frac{t}{\tau})^{5/4}+\sigma^2(\frac{t}{\tau})^{3/4} & (\frac{t}{\tau})^{5/4}-\sigma^2(\frac{t}{\tau})^{3/4}\\ (\frac{t}{\tau})^{5/4}-\sigma^2(\frac{t}{\tau})^{3/4} & (\frac{t}{\tau})^{5/4}+\sigma^2(\frac{t}{\tau})^{3/4}+2\sqrt{2}(\frac{t}{\tau})^{1/2}\end{pmatrix}.$$

Системы сингулярных уравнений (5), (6) можно переписать так

$$K_1\vec{\beta}\equiv A\vec{\beta}(t)-\frac{B}{\pi}\int_0^1\frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^1 K(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)\,d\tau=\vec{Q}_1(t), \tag{9}$$

$$K_2\vec{\alpha}\equiv A\vec{\alpha}(t)+\frac{B}{\pi}\int_0^1\frac{\vec{\alpha}(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^1 K(1-t,1-\tau)\vec{\alpha}(\tau)\,d\tau=\vec{Q}_2(t), \tag{10}$$

где

$$B\equiv B(t,t)=\begin{pmatrix} 1+\sigma^2 & 1-\sigma^2\\ 1-\sigma^2 & 1+\sigma^2+2\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

$$K(t,\tau)=\frac{B-B(t,\tau)}{\tau-t}.$$

Отметим, что определитель матрицы B не равен нулю при всех действительных σ, а определитель матрицы A не равен нулю тогда и только тогда, когда $\sigma^2 \neq 0$, $\sigma^2 \neq 1 + \sqrt{2}$.

Для того чтобы выделить характеристическую часть операторов K_i, перепишем системы сингулярных уравнений (9), (10) в виде

$$CK_1\vec{\beta} = C\vec{Q}_1(t), \quad CK_2\vec{\alpha} = C\vec{Q}_2(t), \tag{11}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+1+\sigma^2 & 1-\sigma^2 \\ 1-\sigma^2 & 1+\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \det C \neq 0,$$

$$CA = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1-2\sigma^2-2\sqrt{2}\sigma^2-\sigma^4 & 1+\sigma^2+\sqrt{2}\sigma^2 \\ \sigma^2+\sqrt{2}\sigma^2-\sigma^4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CB = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1+\sigma^2+\sqrt{2}\sigma^2 & 0 \\ 0 & 1+\sigma^2+\sqrt{2}\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой перестановки Пуанкаре–Бертрана [9, 10, 12], выделим характеристические части K_i^0 операторов CK_i систем уравнений (11)

$$K_1^0\vec{\beta} \equiv aE\vec{\beta}(t) - \frac{bE}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$K_2^0\vec{\alpha} \equiv aE\vec{\alpha}(t) + \frac{bE}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\vec{\alpha}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

где E — единичная матрица, $a = 2\sigma^2(\sqrt{2}+1)+(1-\sigma^4)$, $b = 2\sigma^2(\sqrt{2}+1)-(1-\sigma^4)$. Полученные системы сингулярных интегральных уравнений

$$K_1^0\vec{\beta} = \vec{G}_1, \quad K_2^0\vec{\alpha} = \vec{G}_2,$$

$$\vec{G}_1 = aA^{-1}\Big(\vec{Q}_1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 K(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)\,d\tau\Big),$$

$$\vec{G}_2 = aA^{-1}\Big(\vec{Q}_2 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 K(1-t,1-\tau)\vec{\alpha}(\tau)\,d\tau\Big)$$

решаются в классе функций ограниченных на концах отрезка $(0,T)$, и, как и выше, регуляризуя приходим к системе уравнений Фредгольма

$$\vec{\beta} + K_1^*k_1\vec{\beta} = \vec{Q}_1^*, \quad \vec{\alpha} + K_2^*k_1\vec{\alpha} = \vec{Q}_2^*,$$

где

$$K_1^*k_1\vec{\beta} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 M(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)\,d\tau, \quad K_2^*k_2\vec{\alpha} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 M(1-t,1-\tau)\vec{\alpha}(\tau)\,d\tau.$$

Для разрешимости задачи (3), (4), (8) должны выполняться условия

$$L_s(u_0, u_T) = 0, \quad s = 1, \dots, 6l+2, \tag{12}$$

где L_s — интегральные операторы от функций u_0, u_T.

Теорема 2. [6] *Пусть* $u_0, u_T \in H^p$ $(p = 4l + \gamma)$, $1 - 4\theta < \gamma < 1$. *Тогда при выполнении* $6l + 2$ *условий* (12) *существует единственное решение уравнения* (2) *в* Q *из пространства* $H_{x\ t}^{p,p/4}(Q^{\pm})$, *удовлетворяющее условиям* (3), (8).

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы при* $0 < \gamma \leq 1 - 4\theta$, *то существует единственное решение задачи* (3)), (4)), (8) *из пространства* $H_{x\ t}^{p,p/4}(Q^{\pm})$ *при выполнении* $5l + 1$ *условий вида* (12).

Уравнения второго порядка

1. В области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим уравнение

$$g(x)\, u_t = u_{xx}, \tag{13}$$

где $g(x) = A$ при $x > 0$ и $g(x) = -B$ при $x < 0$.

Решение уравнения (13) ищется из пространства Гельдера $H_{x\ t}^{p,p/2}(Q^{\pm})$, $p = 2l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяющее начальным условиям (3) и условиям склеивания (4) при $n = 1$.

В силу принципа максимума нетрудно видеть, что всякое ограниченное в Q и непрерывно дифференцируемое вплоть до $x = 0$ решение задачи (13), (3), (4) единственно. В самом деле, положительный максимум решения $u(x, t)$ однородной задачи может достигаться на линии $x = 0$. Причем в силу первого из условий склеивания эти максимумы достигаются в одной точке $(0, t)$. Тогда в силу известного свойства нормальной производной в этой точке имеем $u_{1x} - u_{2x} < 0$, что противоречит второму из условий склеивания. Аналогичное противоречие получим в случае отрицательного минимума. Отсюда следует единственость решения.

Для удобства вместо уравнения (13) будем рассматривать систему уравнений

$$Au_t^1 = u_{xx}^1, \quad -Bu_t^2 = u_{xx}^2 \tag{14}$$

в области Q^+. При этом начальные условия и условия склеивания будут иметь вид

$$u^1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x, T) = \varphi_2(x),\ x > 0, \tag{15}$$

$$u^1(0, t) = u^2(0, t), \quad u_x^1(0, t) + u_x^2(0, t) = 0. \tag{16}$$

Будем предполагать, что $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$. Тогда функции

$$\omega_1(x, t) = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(- \frac{A(x - \xi)^2}{4t} \right) \varphi_1(\xi)\, d\xi,$$

$$\omega_2(x, t) = \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{\pi(T - t)}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(- \frac{B(x - \xi)^2}{4(T - t)} \right) \varphi_2(\xi)\, d\xi,$$

являются решениями уравнений (14), удовлетворяющими условиям (15), (16) в $\mathbb{R}$. В силу метода исследования будем пользоваться интегральным представлением

решения для системы уравнений (14):

$$
\begin{aligned}
u^1(x,t) &= \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t x \exp\left(- \frac{Ax^2}{4(t-\tau)}\right)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \alpha(\tau)\, d\tau + \omega_1(x,t), \\
u^2(x,t) &= -\frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_t^T x \exp\left(- \frac{Bx^2}{4(\tau-t)}\right)(\tau-t)^{-\frac{3}{2}} \beta(\tau)\, d\tau + \omega_2(x,t).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Функции, представленные формулами (17), удовлетворяют начальным условиям (15) и уравнениям (14) соответственно.

Покажем, что u^k принадлежат пространству $H^{p,p/2}_{x\ t}$, если введенные нами неизвестные плотности $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{p/2}(0,T)$, причем

$$\alpha^{(s)}(0) = \beta^{(s)}(T) = 0 \quad (s = 0, \dots, l).$$

В самом деле, в силу общих результатов (например, [15]) $u^1(x,t) \in H^{p,p/2}_{x\ t}(Q^+)$, если краевое условие $\Psi(t) = u^1(0,t) \in H^{p/2}(0,T)$ и выполнены условия согласования $\Psi^{(s)}(0) = \varphi_1^{(2s)}(0) \quad (s = 0,\dots,l)$. Из представления u^1 по формуле (17), получим $\Psi(t) = u^1(0,t) = \alpha(t) + \omega_1(0,t)$ и, следовательно, $\Psi^{(s)}(t) = \alpha^{(s)}(t) + \omega_1^{(s)}(0,t) \quad (s=0,\dots,l)$. Отсюда получим, что при выполнении условий $\alpha^{(s)}(0) = 0 \quad (s=0,\dots,l)$ имеем $\Psi^{(s)}(0) = \varphi_1^{(2s)}(0) \quad (s=0,\dots,l)$.

Из условий склеивания (16) получим систему уравнений относительно α, β

$$
\begin{cases}
\alpha(t) + \omega_1(0,t) = -\beta(t) + \omega_2(0,t), \\
-\sqrt{\frac{A}{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \alpha(0) - \sqrt{\frac{A}{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau + \omega_{1x}(0,t) + \\
\qquad + \sqrt{\frac{B}{\pi}} (T-t)^{-\frac{1}{2}} \beta(T) - \sqrt{\frac{B}{\pi}} \int\limits_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau + \omega_{2x}(0,t) = 0,
\end{cases}
$$

или

$$
\begin{cases}
\alpha(t) + \beta(t) = \Phi_0(t), \\
\sqrt{A} \int\limits_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau + \sqrt{B} \int\limits_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau + \\
\qquad + \sqrt{A} t^{-\frac{1}{2}} \alpha(0) - \sqrt{B}(T-t)^{-\frac{1}{2}} \beta(T) = \Phi_1(t),
\end{cases}
\tag{18}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Phi_0(t) &= \omega_2(0,t) - \omega_1(0,t), \\
\Phi_1(t) &= \sqrt{\pi}(\omega_{2x}(0,t) + \omega_{1x}(0,t)).
\end{aligned}
$$

При выполнении условий

$$\beta(0) = \Phi_0(0), \quad \beta(T) = 0 \tag{19}$$

систему уравнений (18) можно переписать так

$$
\begin{cases}
\alpha(t) + \beta(t) = \Phi_0(t), \\
\sqrt{A} \int\limits_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau + \sqrt{B} \int\limits_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}}\, d\tau = \Phi_1(t),
\end{cases}
\tag{20}
$$

Отметим, что первое условие в (19) необходимо и достаточно для того, чтобы было выполнено условие $\alpha(0) = 0$.

Если второе уравнение в (20) обратить при помощи известных формул обращения оператора Абеля, то

$$\begin{cases} \alpha(t)+\beta(t)=\Phi_0(t), \\ \sqrt{A}\alpha'(t)+\frac{\sqrt{B}}{\pi}\int\limits_0^T(\frac{\tau}{t})^{1/2}\frac{\beta'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau. \end{cases} \tag{21}$$

Введем обозначения $F_0^s(t)=\Phi_0^{(s)}(t)-\Phi_0^{(s)}(0)$,

$$F_1^s(t)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{\Phi_1^{(s-1)}(\tau)-\Phi_1^{(s-1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\,d\tau \quad (s=1,\dots,l).$$

Легко видеть, что $F_0^l(t)$, $F_1^l(t)$ принадлежат пространству Гельдера с показателем $\gamma/2$, причем $F_0^l(t)=F_1^l(t)=O(t^{\gamma/2})$ для малых t.

Предположим, что функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{p/2}(0,T)$. Тогда из системы (21) следует, что

$$\sqrt{B}\int\limits_0^T\frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}}\,d\tau=\Phi_1(0). \tag{22}$$

При выполнении (22) систему (21) можно переписать так

$$\begin{cases} \alpha'(t)+\beta'(t)=\Phi_0'(0)+F_0^1(t), \\ \sqrt{A}\alpha'(t)+\frac{\sqrt{B}}{\pi}\int\limits_0^T(\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\beta'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=F_1^1(t). \end{cases} \tag{23}$$

Пусть выполнены условия

$$\beta'(0)=\Phi_0'(0), \quad \beta'(T)=0, \tag{24}$$

введем в системе (23) новые искомые функции $\overline{\beta}'(t)=\beta'(t)-\beta'(0)\frac{T-t}{T}$. Тогда систему (23), воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\tau^{\rho-1}(T-\tau)^{\sigma-1}}{\tau-t}\,d\tau=t^{\rho-1}(T-t)^{\sigma-1}\cot(\sigma\pi)-$$

$$-\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma-1)}{\pi\Gamma(\rho+\sigma-1)}T^{\rho+\sigma-2}F\biggl(2-\rho-\sigma,1,2-\sigma;\frac{T-t}{T}\biggr),$$

представим в виде

$$\begin{cases} \alpha'(t)+\overline{\beta}'(t)=\beta'(0)\frac{t}{T}+F_0^1(t), \\ \sqrt{A}\alpha'(t)+\frac{\sqrt{B}}{\pi}\int\limits_0^T(\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\overline{\beta}'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{4}{\pi}\beta'(0)\sqrt{B}F(-\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};\frac{t}{T})(\frac{t}{T})^{\frac{1}{2}}+F_1^1(t), \end{cases} \tag{25}$$

где

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{T-\tau}{T(\tau-t)}\,d\tau=-\frac{4}{\pi}F\biggl(-\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};\frac{t}{T}\biggr)\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, если $l>1$, то возьмем первые производные в полученной системе уравнений (25). Имея в виду формулу

$$\frac{d}{dt}[F(a,b,c;t)t^{c-1}]=(c-1)t^{c-2}F(a,b,c-1;t),$$

получим

$$\begin{cases} \alpha''(t) + \overline{\beta}''(t) = \Phi_0''(t), \\ \sqrt{A}\alpha''(t) + \frac{\sqrt{B}}{2\pi}\left(t^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^T \frac{\overline{\beta}'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau - t)}\, d\tau + t^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \int\limits_0^T \frac{\overline{\beta}'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)}\, d\tau \right) = \\ \qquad = \frac{2}{T\pi}\beta'(0)\sqrt{B}F(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; \frac{t}{T})(\frac{t}{T})^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\Phi_1'(0)t^{-\frac{1}{2}} + F_1^2(t). \end{cases} \tag{26}$$

Из этой системы следует, что

$$\frac{\sqrt{B}}{2} \int\limits_0^T \frac{\overline{\beta}'(\tau)}{\tau^{3/2}}\, d\tau = 2\sqrt{\frac{B}{T}}\beta'(0) + \Phi_1'(0). \tag{27}$$

В силу формулы [18, с. 254]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^T \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = -\frac{\varphi(0)}{T} - \frac{\varphi(T)}{T-t} + \int\limits_0^T \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$$

систему (26) при выполнении условия (27) и того, что $\beta'(T) = 0$, можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha''(t) + \beta''(t) = \Phi_0''(0) + F_0^2(t), \\ \sqrt{A}\alpha''(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi}\int\limits_0^T (\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\beta''(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = F_1^2(t). \end{cases} \tag{28}$$

Таким образом, мы получили уравнения (28), имеющие точно такой же вид, как и уравнения (23). Легко видеть, что при выполнении условий

$$\begin{cases} \beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0), \quad \beta^{(s)}(T) = 0, \\ \frac{\sqrt{B}}{2}\int\limits_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau) - \beta^{(s)}(0)\frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}}\, d\tau = 2\sqrt{\frac{B}{T}}\beta^{(s)}(0) + \Phi_1^{(s)}(0), \\ s = 2, \ldots, l-1, \end{cases} \tag{29}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^{(l)}(t) + \beta^{(l)}(t) = \Phi_0^{(l)}(0) + F_0^l(t), \\ \sqrt{A}\alpha^{(l)}(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi}\int\limits_0^T (\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\beta^{(l)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = F_1^l(t). \end{cases} \tag{30}$$

Потребуем выполнения условий

$$\beta^{(l)}(0) = \Phi_0^{(l)}(0), \quad \beta^{(l)}(T) = 0 \tag{31}$$

и введем новую искомую функцию $\widetilde{\beta}^{(l)}(t) = \beta^{(l)}(t) - \beta^{(l)}(0)\frac{T-t}{T}$. Тогда систему (30) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha^{(l)}(t) + \widetilde{\beta}^{(l)}(t) = \overline{F}_0^{\,l}(t), \\ \sqrt{A}\alpha^{(l)}(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi}\int\limits_0^T (\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\widetilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \overline{F}_1^{\,l}(t), \end{cases} \tag{32}$$

где $\overline{F}_0^{\,l}(t) = \beta^{(l)}(0)\frac{t}{T} + F_0^l(t)$, $\overline{F}_1^{\,l}(t) = \frac{4}{\pi}\beta^{(l)}(0)\sqrt{B}F(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T})(\frac{t}{T})^{\frac{1}{2}} + F_1^l(t)$ принадлежат пространству $H^{\gamma/2}(0, T)$, причем $\overline{F}_0^{\,l}(t) = \overline{F}_1^{\,l}(t) = O(t^{\gamma/2})$ для малых t.

Исключая $\alpha^{(l)}(t)$ в системе (32), получим сингулярное уравнение относительно $\widetilde{\beta}^{(l)}(t)$

$$\sqrt{A}\widetilde{\beta}^{(l)}(t) - \frac{\sqrt{B}}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\widetilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = Q(t), \tag{33}$$

где

$$Q(t) = \sqrt{A}\overline{F}_0^{\,l}(t) - \overline{F}_1^{\,l}(t).$$

Сингулярное интегральное уравнение (33) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_0(t) = \widetilde{\beta}^{(l)}t^{-\frac{1}{2}}$. Найдем решения $\beta_0(t)$, неограниченные при $t = 0$ (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при $t = T$. Для этого введем кусочно–голоморфную функцию (см. [9, 10])

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{\beta_0(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Тогда на основании формул Сохоцкого–Племеля уравнение (33) эквивалентно задаче сопряжения

$$\Psi^+(t) = \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}\,i}{\sqrt{A}-\sqrt{B}\,i}\Psi^-(t) + \frac{Q(t)}{t^{\frac{1}{2}}(\sqrt{A}-\sqrt{B}\,i)}, \quad t \in (0,T),$$

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(t), \quad t \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty),$$

при дополнительном условии $\Psi(\infty) = 0$. Так как $G = \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}\,i}{\sqrt{A}-\sqrt{B}\,i}$ и

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{\ln G}{\tau - z}\,d\tau\right) = (z-T)^{\theta}z^{-\theta}, \quad \theta = \frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{B}{A}},$$

то в указанном выше классе каноническая функция равна $\chi(z) = (z-T)^{\theta}z^{-\theta}$, индекс $\varkappa = 0$.

Согласно общей теории [9, 10]

$$\Psi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{t^{\frac{1}{2}}(\sqrt{A}-\sqrt{B}\,i)\chi^+(\tau)(\tau - z)}\,d\tau.$$

Тогда

$$\widetilde{\beta}^{(l)}(t) = t^{\frac{1}{2}}(\Psi^+(t) - \Psi^-(t)) =$$

$$= \frac{\sqrt{A}}{B+A}Q(t) + \frac{\sqrt{B}}{\pi(B+A)}(T-t)^{\theta}t^{\frac{1}{2}-\theta}\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{\theta}\tau^{\frac{1}{2}-\theta}(\tau - t)}\,d\tau. \tag{34}$$

Так как $Q(t)$ принадлежит пространству $H^{\gamma/2}(0,T)$, то функция $\widetilde{\beta}^{(l)}(t)$, представленная формулой (34) удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ во всех точках контура $(0,T)$, отличных от концов. Рассмотрим его поведение на

концах. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [10, с. 76], легко видеть, что $\widetilde{\beta}^{(l)}(0)=\widetilde{\beta}^{(l)}(T)=0$. Для дальнейшего исследования поведения их на концах контура воспользуемся следующей леммой.

Лемма. [10, сс. 82–86; 4, сс. 14–17] *Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем λ вблизи c (c обозначает 0 или T), $0<\lambda<1$ и $0<\mu<1$. Тогда для точек контура $(0,T)$ интеграл типа Коши*

$$\Psi(t)=\frac{(t-c)^{\mu}}{2\pi i}\int\limits_0^T\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-c)^{\mu}(\tau-t)}\,d\tau$$

удовлетворяет условию Гельдера вблизи c, включая c, с показателем $\min\{\lambda,\mu\}$ *при $\lambda\neq\mu$ и условию Гельдера с показателем $\lambda-\varepsilon$ при $\lambda=\mu$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.*

В силу этой леммы получаем, что, если $B\geq A$, то в формуле (34) функция $\widetilde{\beta}^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ при $0<\gamma<1-2\theta$, условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2}-\theta$ при $1-2\theta<\gamma<1$ и условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2}-\theta-\varepsilon$ при $\gamma=1-2\theta$. Кроме того, заметим, что, если $B\leq A$, то функция $\widetilde{\beta}^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ при $0<\gamma<2\theta$, условию Гельдера с показателем θ при $2\theta<\gamma<1$ и условию Гельдера с показателем $\theta-\varepsilon$ при $\gamma=2\theta$.

Таким образом, при выполнении условий (19), (22), (24), (27), (29), (31), которые имеют вид

$$\begin{cases}\sqrt{B}\int\limits_0^T\frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}}\,d\tau=\Phi_1(0),\\ \frac{\sqrt{B}}{2}\int\limits_0^T\frac{\beta^{(s)}(\tau)-\Phi_0^{(s)}(0)\frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}}\,d\tau=2\sqrt{\frac{B}{T}}\Phi_0^{(s)}(0)+\Phi_1^{(s)}(0),\\ s=1,\dots,l-1,\\ \beta^{(k)}(T)=0,\quad k=0,1,\dots,l-1,\end{cases}\tag{35}$$

мы получили функцию $\beta(t)$ из искомого пространства $H^{p/2}(0,T)$, удовлетворяющую условиям

$$\beta^{(s)}(0)=\Phi_0^{(s)}(0),\quad s=0,1,\dots,l-1,\quad \beta^{(l)}(T)=0.$$

Значения $\beta^{(s)}(t)$ определяются по формуле Тейлора

$$\beta^{(s)}(t)=\sum_{k=s}^{l-1}\frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!}t^{k-s}+\frac{1}{(l-1-s)!}\int\limits_0^t(t-\tau)^{l-1-s}\beta^{(l)}(\tau)\,d\tau,$$
$$s=0,1,\dots,l-1.$$

Тогда для выполнения условий $\beta^{(k)}(T)=0$ при $k=0,1,\dots,l-1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$0=\sum_{k=s}^{l-1}\frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!}T^{k-s}+\frac{1}{(l-1-s)!}\int\limits_0^T(T-\tau)^{l-1-s}\beta^{(l)}(\tau)\,d\tau,\tag{36}$$
$$s=0,1,\dots,l-1.$$

Подставив найденные значения функций $\beta^{(s)}(t)$ в первые l условий (35), получим

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\sqrt{B}}{2(l-1-s)!}\int\limits_0^T \tau^{l-s-3/2}\,d\tau\int\limits_0^1(1-\sigma)^{l-1-s}\beta^{(l)}(\sigma\tau)\,d\sigma = \\ -\frac{\sqrt{B}}{2}\sum\limits_{k=s+1}^{l-1}\frac{\Phi_0^{(k)}(0)T^{k-s-1/2}}{(k-s)!(k-s-1/2)}+\sqrt{\frac{B}{T}}\Phi_0^{(s)}(0)+\Phi_1^{(s)}(0), \\ s=0,\ldots,l-1. \end{array}\right. \tag{37}$$

Отметим, что функция $\beta^{(l)}(t)$ дана формулой (34) Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3. [5] *Пусть* $\varphi_1,\varphi_2\in H^p$, $p=2l+\gamma$. *Тогда при выполнении* $2l$ *условий* (36), (37) *существует единственное решение уравнения* (13), *удовлетворяющее условиям* (3), (4), *из пространства*

1) $H_{x\ t}^{p,p/2}$, *если* $0<\gamma<\min\{2\theta,1-2\theta\}$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/2}$, $q=2l+\min\{2\theta,1-2\theta\}$, *если* $\min\{2\theta,1-2\theta\}<\gamma<1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/2}$, *если* $\gamma=\min\{2\theta,1-2\theta\}$, *где* ε *— сколь угодно малая положительная постоянная.*

2. Для уравнения (13) и начальных условий (3), рассмотрим следующие условия склеивания

$$u(-0,t)=u(+0,t),\quad u_x(-0,t)=-u_x(+0,t). \tag{38}$$

В этом случае сингулярное уравнение относительно $\widetilde{\beta}^{(l)}(t)$ будет иметь вид

$$\sqrt{A}\widetilde{\beta}^{(l)}(t)+\frac{\sqrt{B}}{\pi}\int\limits_0^T\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\frac{\widetilde{\beta}^{(l)}}{\tau-t}\,d\tau=Q(t). \tag{39}$$

где

$$Q(t)=\overline{F}_1^{\,l}(t)-\sqrt{A}\overline{F}_0^{\,l}(t).$$

Сингулярное интегральное уравнение (39) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_1(t)=\widetilde{\beta}^{(l)}t^{-\frac{1}{2}}$ и найдем решения $\beta_1(t)$, неограниченные при $t=0$ (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при $t=T$. В этом случае $G=\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}\ i}{\sqrt{A}+\sqrt{B}\ i}$ и

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T\frac{\ln G}{\tau-z}\,d\tau\right)=(z-T)^{-\theta}z^{\theta},\quad \theta=\frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{B}{A}},$$

то в указанном выше классе каноническая функция равна $\chi(z)=(z-T)^{1-\theta}z^{-1+\theta}$, индекс $\varkappa=0$.

Имеем

$$\widetilde{\beta}^{(l)}(t)=\frac{\sqrt{A}}{B+A}Q(t)-\frac{\sqrt{B}}{\pi(B+A)}(T-t)^{1-\theta}t^{-\frac{1}{2}+\theta}\int\limits_0^T\frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1-\theta}\tau^{-\frac{1}{2}+\theta}(\tau-t)}d\tau. \tag{40}$$

Из формулы (40) следует, что $\widetilde{\beta}^{(l)}(0)=0$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^T\frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1-\theta}\tau^{\frac{1}{2}+\theta}}\,d\tau=0. \tag{41}$$

При выполнении (41) формула (40) примет вид

$$\widetilde{\beta}^{(l)}(t) = \frac{\sqrt{A}}{B+A}Q(t) - \frac{\sqrt{B}}{\pi(B+A)}(T-t)^{1-\theta}t^{\frac{1}{2}+\theta}\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1-\theta}\tau^{\frac{1}{2}+\theta}(\tau-t)}d\tau. \quad (42)$$

Так как $Q(t)$ принадлежит пространству $H^{\gamma/2}(0,T)$, то функция $\widetilde{\beta}^{(l)}(t)$, представленная формулой (42) удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ во всех точках контура $(0,T)$, отличных от концов. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [10, с. 76], как и выше, легко видеть, что $\widetilde{\beta}^{(l)}(0) = \widetilde{\beta}^{(l)}(T) = 0$. Далее, в силу леммы и в силу неравенства $\frac{\gamma}{2} < \min\{1-\theta, \frac{1}{2}+\theta\}$ при $0 < \gamma < 1$ получим, что в формуле (42) функция $\widetilde{\beta}^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$.

Таким образом, при выполнении условий, аналогичных (19), (22), (24), (27), (29), (31) и (41), получим функцию $\beta(t)$ из искомого пространства $H^{p/2}(0,T)$, удовлетворяющую условиям $\beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0)$ $s = 0, 1, \ldots, l-1$, $\beta^{(l)}(T) = 0$.

Теорема 4. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$. Тогда при выполнении $2l+1$ условий вида* (36), (37) *и* (41) *существует хотя бы одно решение уравнения* (13) *из пространства $H_{x\ t}^{p,p/2}$, удовлетворяющее условиям* (3), (38).

Замечание 1. В теореме 3 показано, что при $p-[p] \geq \frac{1}{2}$ гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных данных, которое, в случае теоремы 4 не выполняется. Таким образом, гладкость решения существенно зависит от условий склеивания при $x = 0$.

3. Для решения уравнения (13), удовлетворяющего начальным условиям (3), рассмотрим следующие условия склеивания

$$u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \quad u_{xx}(-0,t) = u_{xx}(+0,t), \quad (43)$$

Решение поставленной задачи разыскивается в виде параболических потенциалов простого слоя с неизвестными плотностями $\alpha(t)$, $\beta(t)$, которые удовлетворяют начальным условиям (3).

Согласно общим результатам [17], плотности $\alpha(t)$, $\beta(t)$ нужно найти из пространства $H^{(p-1)/2}(0,T)$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha^{(s)}(0) = \beta^{(s)}(T) = 0 \quad (s = 0, \ldots, l-1).$$

Удовлетворив условиям склеивания (43), получаем систему уравнений, в котором интегральное уравнение с операторами Абеля при помощи формулы обращения эквивалентно редуцируется к сингулярному уравнению нормального типа. Далее выписываются необходимые и достаточные условия на входные данные φ_1, φ_2 для выполнения условий (14) и для принадлежности плотностей α, β искомым пространствам. Они будут иметь вид

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad (s = 0, \ldots, 2l), \quad (44)$$

где L_s — определенные линейные интегральные операторы, выписываемые в явной форме.

Теорема 5. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$. Тогда при выполнении $2l$ условий* (44) *существует единственное решение уравнения* (13) *из пространства $H_{x\ t}^{p,p/2}$, удовлетворяющее условиям* (3), (43).

Замечание 2. При выполнении $2l-2$ условий вида (44) решение, найденное в теореме 5, будет принадлежать пространству $H_{x\ t}^{q,q/2}$, $q=2l+\min\{2\theta,1-2\theta\}$, где $\theta=\frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{\frac{B}{A}}$.

4. Для решения уравнения (13), удовлетворяющего начальным условиям (3), рассмотрим следующие условия склеивания

$$u_x(-0,t)=u_x(+0,t),\quad u_{xx}(-0,t)=-u_{xx}(+0,t). \tag{45}$$

Теорема 6. *Пусть* $\varphi_1,\varphi_2\in H^p$, $p=2l+\gamma$. *Тогда при выполнении* $2l-1$ *условий вида* (44) *существует хотя бы одно решение уравнения* (13), *удовлетворяющее условиям* (3), (45), *из пространства*

1) $H_{x\ t}^{p,p/2}$, *если* $0<\gamma<\min\{2\theta,1-2\theta\}$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/2}$, $q=2l+\min\{2\theta,1-2\theta\}$, *если* $\min\{2\theta,1-2\theta\}<\gamma<1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/2}$, *если* $\gamma=\min\{2\theta,1-2\theta\}$, *где* ε — *сколь угодно малая положительная постоянная.*

Замечание 3. В теореме 6 показано, что, как и в теореме 3, при $p-[p]\geq\frac{1}{2}$ гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных данных, которое в случае теоремы 5 не выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Врагов В. Н.* О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно–составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.
2. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Вычмслит. центр СО РАН, 1995.
3. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально–операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
4. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
5. *Попов С. В.* О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1991. Вып. 102. С. 100–113.
6. *Popov S. V.* Parabolic equations of the fourth order with varying evolution direction // Мат. заметки ЯГУ. 2001. Т. 8, N 2. С. 112–133.
7. *Попов С. В.* Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени высокого порядка / Ред. журн. "Сиб. мат. журн.". Новосибирск, 1988. 56 с. Деп. в ВИНИТИ 07.12.88, № 8646–Б88.
8. *Попов С. В.* Параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, N 2. С. 93–112.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
11. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
12. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1968.
13. *Cattabriga L.* Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine $2n$ // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1958. V. 28, N 2. P. 376–401.
14. *Cattabriga L.* Equazioni paraboliche in due variabili. I // Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari. 1961. V. 31, N 1–2. P. 48–79; II // Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari. 1962. V. 32, N 3–4. P. 254–267.
15. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

16. *Pini B.* Sul probleme fondamentale di valori contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1957. V. 43. P. 261–297.

17. *Pini B.* Su una equazione paraboliche non lineare del quarto ordine // Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari. 1957. V. 27, N 3–4. P. 136–168.

18. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Наука, 1979.

Попов Сергей Вячеславович
Россия, Якутск, Якутский государственный университет
madu@sitc.ru