УДК 517.95

# СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Л. С. Пулькина**

## Постановка задачи

Математическое моделирование некоторых процессов физики,химии, биологии часто приводит к нелокальным задачам для дифференциальных уравнений в частных производных [1–3]. Нелокальными принято называть такие задачи, в которых вместо граничных условий, или наряду с ними, задаются некоторые соотношения, связывающие значения искомой функции на некоторых внутренних многообразиях [3, 4].

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

в области

$$\mathcal{D} = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$$

и поставим для него задачу с начальными данными Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

граничным условием Дирихле

$$u(0,t) = 0, \tag{3}$$

и нелокальным условием

$$\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = s(t), \tag{4}$$

где функции $\varphi(x),\ \psi(x),\ K(x),\ s(t)$ заданы и удовлетворяют условиям согласования

$$\int\limits_0^l K(x)\varphi(x)dx = s(0), \quad \int\limits_0^l K(x)\psi(x)dx = s'(0), \ \varphi(0) = 0.$$

К настоящему времени опубликовано довольно значительное число работ, посвященных изучению нелокальных задач, в частности, задач с интегральными условиями. Упомянем здесь лишь те, которые наиболее близки к теме настоящей заметки. Это работы Д. Г. Гордезиани и Г. А. Авалишвили [5], А. Бузиани [6] и С. А. Бейлина [7]. В [5] изучена смешанная задача для однородного уравнения колебаний струны с классическими начальными данными и нелокальными условиями, содержащими как интегралы от искомого решения, так и его граничные

значения. В [7] получено представление решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с граничным условием Дирихле и интегральным условием (4) в случае $K(x) \equiv 1$. В [6] рассмотрена смешанная задача для уравнения (1) с условиями (2)–(4), но для случая $c(x,t) \equiv 0,\ K(x) \equiv 1$. Заметим, что в этом случае, а также если $c_x(x,t) \equiv 0$, задачу (1)–(4) можно свести к смешанной задаче с локальными граничными условиями. Действительно, интегрируя (1) по $x$ от 0 до $l$, считая $u(x,t)$ решением поставленной задачи, получим, в силу условий (3), (4)

$$a(l,t)u_x(l,t) = -\int\limits_0^l f(x,t)dx.$$

В предлагаемой работе условие (4) задается в виде интеграла Лебега, не содержащего атомарную меру концов отрезка $(0,1)$. Это обстоятельство приводит к тому, что оператор, порождаемый поставленной задачей, имеет не плотную в $L_2(\mathcal{D})$ область определения, что затрудняет применение стандартных методов исследования. Для простоты будем считать $s(t) = 0$, что не нарушает общности, так как с помощью функции $w(x,t) = (xs(t)/(\int\limits_0^l xK(x)dx)$ поставленную задачу легко удается свести к задаче с однородным интегральным условием, не нарушая при этом однородность условия Дирихле, относительно функции $\overline{u} = u - w$.

## Единственность решения

Обозначим $\widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D}),\ \ \widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{D})$ соответственно замыкания пространств

$$\widetilde{C}_0^2(\mathcal{D}) = \{u(x,t): \ \ u \in C^2(\overline{\mathcal{D}}),\ u(0,t) = 0, \ \ \int\limits_0^l u(x,t)dx = 0\}$$

$$\widetilde{C}_T^2(\mathcal{D}) = \{v(x,t): \ \ v \in C^2(\overline{\mathcal{D}}),\ v(x,T) = 0, \ \ \int\limits_0^l v(x,t)dx = 0\}$$

по норме

$$||u||^2_{\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})} = \int\limits_0^T \int\limits_0^l [u^2 + (\int\limits_x^l u(\xi,t)d\xi)^2 + (\int\limits_x^l u_t(\xi,t)d\xi)^2]dxdt.$$

Введем понятие обобщенного решения. Рассмотрим оператор

$$\ell v = \int\limits_x^l [K(\xi) - K(x)]v(\xi,t)d\xi, \ \ v(x,t) \in \widetilde{C}_T^2(\mathcal{D}).$$

Пусть $u(x,t)-$ классическое решение задачи (1)–(4). Умножим обе части (1) на $\ell v$ и проинтегрируем по области $\mathcal{D}$. После преобразования левой части интегриро-

ванием по частям с учетом свойств функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$, получим тождество

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l K'(x)[auv - \int\limits_x^l u_t d\xi\int\limits_x^l v_t d\xi + c\int\limits_x^l ud\xi\int\limits_x^l vd\xi]dxdt+$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^l [(aK')_x u\int\limits_x^l vd\xi - c_x\int\limits_x^l ud\xi \ell v]dxdt =$$
$$=\int\limits_0^l K'(x)\int\limits_x^l \psi(\xi)d\xi\int\limits_x^l v(\xi,0)d\xi dx - \int\limits_0^T\int\limits_0^l f\ell v dxdt, \qquad (5)$$

которое положим в основу определения обобщенного решения. Заметим, что (5) имеет смысл и для функций $u\in\widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D}),\ \ v\in\widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{D})$, но в связи с тем, что понятие следа в $\widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$ не определено, возникает вопрос, как понимать первое из условий Коши. Решим его следующим образом: если $u\in\widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$, то $\int\limits_x^l u_t d\xi\in L_2(\mathcal{D})$, но тогда $\int\limits_x^l ud\xi\in W_2^1(\mathcal{D})$, а функции из $W_2^1(\mathcal{D})$ имеют след, принадлежащий $L_2$. Поэтому первое из условий Коши будем понимать так

$$\int\limits_x^l u(\xi,0)d\xi = \int\limits_x^l \varphi(\xi)d\xi, \quad x\in[0,l]. \qquad (6)$$

Определение. *Обобщенным решением* задачи (1)–(4) будем называть функцию $u\in\widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$, удовлетворяющую для любой $v\in\widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{D})$ тождеству (5) и условию (6).

**Теорема 1.** *Если* $a_0 < a(x,t)\le A_0,\ \ 0\le c_0\le c(x,t)\le C_0,\ |a_x,a_t|\le A_1,\ \ |c_x,c_t|\le C_1,\ \ 0<k_0\le K'(x)\le k_1,\ (a(x,t)K(x))_{xx}\in L_2(0,l), t\in[0,T],$ $K(0)=0,\ a_x(0,t)K'(0)+a(0,t)K''(0)=0$, *то существует не более одного обобщенного решения задачи* (1)–(4).

Доказательство. Пусть $u(x,t)\in\widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})-$ обобщенное решение задачи (1)–(4) с $f=\varphi=\psi=0$. Покажем, что тогда $u(x,t)=0,\ x,t\in\mathcal{D}$. Возьмем произвольное $\tau\in[0,T]$ и рассмотрим функцию

$$v(x,t)=\begin{cases}\int\limits_t^\tau u(x,\eta)d\eta, & 0\le t\le\tau\\ 0, & \tau\le t\le T.\end{cases}$$

Определенная таким образом функция принадлежит $\widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{D})$. Подставим ее в (5), где $f=\varphi=\psi=0$ и проделаем некоторые преобразования, используя тот факт, что $v_t(x,t)=-u(x,t)$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l K'(x)\int\limits_x^l u_t d\xi\int\limits_x^l v_t d\xi dxdt = -\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l K'(x)\int\limits_x^l u_t d\xi\int\limits_x^l ud\xi dxdt =$$
$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^l K'(x)\Big(\int\limits_x^l u(\xi,\tau)d\xi\Big)^2 dx;$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l K'(x)auvdxdt=-\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l K'(x)av_tvdxdt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^l K'(x)a(x,0)v^2(x,0)dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l K'(x)a_t(x,t)v^2(x,t)dxdt;$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l K'(x)c(x,t)\int\limits_x^l ud\xi\int\limits_x^l vd\xi dxdt=-\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l K'(x)c(x,t)\int\limits_x^l v_td\xi\int\limits_x^l vd\xi dxdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^l K'(x)c(x,t)(\int\limits_x^l v(\xi,0)d\xi)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l K'(x)c_t(x,t)(\int\limits_x^l v(\xi,t)d\xi)^2dxdt;$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(aK')_xu\int\limits_x^l vd\xi dxdt=\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l(aK')_{xx}\int\limits_x^l ud\xi\int\limits_x^l vd\xi dxdt-\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l(aK')_xv\int\limits_x^l ud\xi dxdt.$$

Получим

$$\int\limits_0^l K'(x)\Big[\Big(\int\limits_x^l ud\xi\Big)^2+a(x,0)v^2(x,0)+c(x,0)\Big(\int\limits_x^l v(\xi,0)d\xi\Big)^2\Big]dx=$$

$$=2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\Big[(aK')_{xx}\int\limits_x^l ud\xi\int\limits_x^l vd\xi-(aK')_xv\int\limits_x^l ud\xi+c_x\int\limits_x^l ud\xi\ell v\Big]dxdt-$$

$$-\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l K'(x)\Big[c_t\Big(\int\limits_x^l vd\xi\Big)^2+a_tv^2\Big]dxdt. \qquad (7)$$

Теперь оценим первый интеграл в правой части (7), применяя неравенство Коши, но прежде заметим, что

$$\ell v=\int\limits_x^l[K(\xi)-K(x)]vd\xi=\int\limits_x^l K'(\xi)\int\limits_\xi^l v(\xi',t)d\xi'd\xi,$$

и в силу неравенства Коши–Буняковского

$$(\ell v)^2\le\int\limits_0^l(K'(\xi))^2d\xi\int\limits_0^l\Big(\int\limits_x^l vd\xi\Big)^2dx.$$

Из условий теоремы следует, что существуют такие числа $M_i$, что $([aK']_{xx})^2+c_x^2+1\le M_1$, $\quad 1+l\int\limits_0^l(K')^2d\xi+K'|c_t|\le M_2, [(aK')_{xx}]^2+|a_t|\le M_3$. Обозначим $\frac{M}{2}=\max\{M_1,M_2,M_3\}$, и мы получаем следующее неравенство

$$k_0\int\limits_0^l\Big[\Big(\int\limits_x^l ud\xi\Big)^2+a_0v^2(x,0)+c_0\Big(\int\limits_x^l v(\xi,0)d\xi\Big)^2\Big]dx\le$$

$$\le\frac{M}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\Big[\Big(\int\limits_0^l ud\xi\Big)^2+v^2(x,t)+\Big(\int\limits_x^l vd\xi\Big)^2\Big]dxdt \qquad (8)$$

Введем функцию $w(x,t)=\int\limits_0^t u(x,\eta)d\eta$. Тогда $v(x,t)=w(x,\tau)-w(x,t)$; $v(x,0)=w(x,\tau)$; $v^2(x,t)\le 2w^2(x,\tau)+2w^2(x,t)$ и неравенство (8) примет вид

$$k_0\int\limits_0^l\left[\left(\int\limits_x^l ud\xi\right)^2+a_0w^2(x,\tau)+c_0\left(\int\limits_x^l w(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx\le$$
$$\le M\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\left[\left(\int\limits_x^l ud\xi\right)^2+w^2(x,t)+\left(\int\limits_x^l w(\xi,t)d\xi\right)^2\right]dxdt+$$
$$+M\tau\int\limits_0^l\left[\left(\int\limits_x^l w(\xi,\tau)d\xi\right)^2+w^2(x,\tau)\right]dx.$$

Воспользуемся теперь произволом выбора $\tau$. Обозначим $\nu=k_0\min\{a_0,c_0\}$. Если $\tau\in[0,\frac{\nu}{2M}]$, то $\nu-M\tau\ge\frac{\nu}{2}$. Обозначим $m=\min\{1,\frac{\nu}{2}\}$. Тогда

$$m\int\limits_0^l\left[\left(\int\limits_x^l u(\xi,\tau)d\xi\right)^2+w^2(x,\tau)+\left(\int\limits_x^l w(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx\le$$
$$\le M\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l\left[\left(\int\limits_x^l u(\xi,t)d\xi\right)^2+w^2(x,t)+\left(\int\limits_x^l w(\xi,t)d\xi\right)^2\right]dxdt$$

и из леммы 7.1 [8] следует, что

$$m\int\limits_0^l\left[\left(\int\limits_x^l u(\xi,\tau)d\xi\right)^2+w^2(x,\tau)+\left(\int\limits_x^l w(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx=0$$

для $\tau\in[0,\frac{\nu}{2M}]$. Но тогда для этих значений $\tau$ $\int\limits_x^l u(\xi,\tau)d\xi=0$ для всех $x\in[0,l]$, поэтому и $u(x,\tau)=0,\ x\in[0,l],\quad \tau\in[0,\frac{\nu}{2M}]$. Повторяя рассуждения для $t\in[\frac{\nu}{2M},\frac{\nu}{M}]$, убедимся, что $u(x,t)=0$ и на этом промежутке, а через конечное число шагов, что $u(x,t)=0$ в $\mathcal{D}$.

## Существование решения

Для доказательства существования решения применим метод Галеркина. Предварительно получим неравенство, которое используем при доказательстве основной теоремы.

**Лемма.** *Пусть* $f(x,t)\in L_2(\mathcal{D})$, $\varphi(x),\psi(x)\in L_2(0,l)$, $0<a_0\le A_0$, $|a_t|\le A_1$, $|c(x,t)|\le C_1$, $0<K'(x)\le k_1$, $|(a(x,t)K'(x))_x|\le p$. *Тогда существует постоянная* $C>0$ *такая, что*

$$\int\limits_0^l\left[u^2(x,\tau)+\left(\int\limits_x^l u_t(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx\le C[||f||^2_{L_2}+||\varphi||^2_{L_2}+||\psi||^2_{L_2}]. \qquad (9)$$

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\ell(u_t) = \int_x^l [K(\xi) - K(x)] u_t d\xi$$

и преобразуем скалярное произведение $-2(\mathcal{L}u, \ell(u_t))_{L_2(\mathcal{D}_\tau)}$, где $\mathcal{D}_\tau = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ \ 0 < t < \tau, \ \tau \in [0,T]\}:$

$$-(\mathcal{L}u, \ell(u_t)) = -2\int_0^\tau \int_0^l (u_{tt} - (au_x)_x + cu)\ell u_t dxdt = \sum_{i=1}^3 I_i. \qquad (10)$$

Преобразуем $I_1$ и $I_2$, интегрируя по частям, не забывая при этом, что $u_t(x,0) = \psi(x), \ \ \int_0^l K(\xi)ud\xi = 0$. Получим

$$I_1 = 2\int_0^\tau \int_0^l u_{tt} \int_x^l [K(x) - K(\xi)] u_t d\xi dxdt =$$

$$\int_0^l \left(\int_x^l u_t(\xi,\tau)d\xi\right)^2 dx - \int_0^l \left(\int_x^l \psi(\xi)d\xi\right)^2 dx;$$

$$I_2 = 2\int_0^\tau \int_0^l (au_x)_x \int_x^l [K(\xi) - K(x)] u_t d\xi dxdt == -2\int_0^\tau \int_0^l (aK')_x u \int_0^l u_t d\xi dxdt -$$

$$-\int_0^\tau \int_0^l K' a_t u^2 dxdt + \int_0^l a(x,\tau)K'(x)u^2(x,\tau)dx - \int_0^l a(x,t)K'(x)\varphi^2(x)dx.$$

После этих преобразований (10), где к тому же $\mathcal{L}u = f$, приобретает вид

$$\int_0^l K'(x)\left[a(x,\tau)u^2(x,\tau) + \left(\int_x^l u_t(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx =$$

$$= \int_0^l K'(x)\left[a(x)\varphi^2(x) + \left(\int_x^l \psi(\xi)d\xi\right)^2\right]dx + \int_0^\tau \int_0^l K'(x)a_t u^2(x,t)dxdt +$$

$$+2\int_0^\tau \int_0^l (aK')_x u(x,t) \int_x^l u_t(\xi,t)d\xi dxdt +$$

$$+2\int_0^\tau \int_0^l c(x,t)u(x,t)\ell(u_t)dxdt - 2\int_0^\tau \int_0^l f(x,t)\ell(u_t)dxdt.$$

Для оценки последних трех интегралов правой части используем неравенство Коши и оценку

$$(\ell u_t)^2 \le \int_0^l (K'(\xi))^2 d\xi \int_0^l \left(\int_x^l u_t d\xi\right)^2 dx,$$

полученную так же, как и в доказательстве теоремы 1. Тогда

$$m\int\limits_0^l \left[u^2(x,\tau)+\left(\int\limits_x^l u_t(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right]dx \le M\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l \left[u^2(x,t)+\left(\int\limits_x^l u_t(\xi,t)d\xi\right)^2\right]dxdt+$$

$$+k_1\int\limits_0^l (a_0\varphi^2(x)+l\psi^2(x))dx+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f^2(x,t)dxdt,$$

где $m=\min\{k_0,k_0a_0\}$, $M=\max\{p^2+k_1A_1+c_1^2, 1+2l^2k_1\}$. Применив лемму 7.1 [8], получим неравенство (9), где $C=\frac{1}{m}\max\{k_1A_0,k_1C_0,1\}\exp\{\frac{MT}{m}\}$.

**Теорема 2.** *Если $f(x,t)\in L_2(\mathcal{D})$, $\varphi(x),\psi(x)\in L_2(0,l)$ и выполняются условия леммы, то обобщенное решение задачи (1)–(4) существует. Если к тому же выполняются условия теоремы 1, то это решение единственно.*

Доказательство. Обозначим $\widetilde{\mathcal{H}}_0(0,l)$ замыкание множества

$$\widetilde{C}_0^2[0,l]=\{w(x)\in C^2[0,l],\ w(0)=0,\ \int\limits_0^l K(x)w(x)dx=0\}$$

по норме

$$||w||^2_{\widetilde{\mathcal{H}}(0,l)}=\int\limits_0^l \left[w^2+\left(\int\limits_x^l wd\xi\right)^2\right]dx.$$

Так как по определению $\widetilde{\mathcal{H}}_0(0,l)$ в нем всюду плотно множество $\widetilde{C}_0^2[0,l]$, которое является подпространством сепарабельного пространства $C^2[0,l]$, то можно выбрать систему линейно независимых функций $\{w_k(x)\}$ из $\widetilde{C}_0^2[0,l]$, полную в $\widetilde{\mathcal{H}}_0(0,l)$. Обозначим $\widetilde{\mathcal{H}}_0^m(0,l)$ конечномерное подпространство пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_0(0,l)$ с базисом $\{w_k(x)\}_{k=1}^m$. Приближенное решение задачи (1)–(4), удовлетворяющее начальным условиям (2) с

$$\varphi^m(x)=\sum_{k=1}^m\varphi_k w_k(x),\quad \psi^m(x)=\sum_{k=1}^m\psi_k w_k(x) \tag{11}$$

будем искать в виде

$$u_m(x,t)=\sum_{k=1}^m d_k(t)w_k(x)$$

из соотношений

$$\int\limits_0^l (u_{mtt}-(au_{mx})_x+cu_m)\,\ell(w_k)dx=\int\limits_0^l f\ell(w_k)dx, \tag{12}$$

кроме того, $d_k(0)=\varphi_k$, $d_k'(0)=\psi_k$, где $\varphi_k,\ \psi_k-$ коэффициенты сумм (11), аппроксимирующих при $m\to\infty$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно в норме $L_2(0,l)$.

Интегрированием по частям преобразуем левую часть (12). Получим

$$\sum_{k=1}^{m} d_k''(t)\Big(\sqrt{K'(x)}\int_x^l w_k(\xi)d\xi, \sqrt{K'(x)}\int_x^l w_l(\xi)d\xi\Big)_{L_2(0,l)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m} d_k(t)\int_0^l \Big[a(x,t)K'(x)w_l(x)-(aK')_x\int_x^l w_l(\xi)d\xi\Big]w_k(x)dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{m} d_k(t)\int_0^l c(x,t)w_k(x)\ell(w_l)dx = f_k(t), \tag{13}$$

где $f_k(t) = -\int\limits_0^l f(x,t)\ell w_k(x)dx$. Мы получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $d_k(t)$. Заметим, что из линейной независимости системы функций $w_k(x)$ следует линейная независимость функций $\sqrt{K'(x)}\int\limits_x^l w_k(\xi)d\xi$. Действительно, если бы это было не так, то нашлись бы такие $\alpha_k$, что

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\sqrt{K'(x)}\int_x^l w_k(\xi)d\xi = 0, \quad \sum_{k=1}^{m}\alpha_k^2 \neq 0.$$

Но для любого $m$

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\sqrt{K'(x)}\int_x^l w_k(\xi)d\xi = \sqrt{K'(x)}\int_x^l \sum_{k=1}^{m}\alpha_k w_k(\xi)d\xi = 0.$$

Так как последнее равенство выполняется для всех $x \in (0,l)$, то $\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k w_k(\xi) = 0$, что противоречит линейной независимости функций $w_k(x)$. Отсюда следует,что определитель матрицы с элементами

$$\Big(\sqrt{K'(x)}\int_x^l w_k(\xi)d\xi, \sqrt{K'(x)}\int_x^l w_l(\xi)d\xi\Big)$$

отличен от нуля и система (13) может быть разрешена относительно старших производных и, стало быть, задача Коши для нее с данными $d_k(0)=\varphi_k,\ \ d_k'(0)=\psi_k$ имеет единственное решение. Таким образом, для любого $m$ существует единственная функция $u_m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{m} d_k(t)w_k(x)$. Докажем теперь, что построенная последовательность $\{u_m(x,t)\}$ сходится и ее предел является искомым обобщенным решением задачи (1)–(4). Умножим (12) на $d_k'(t)$ и просуммируем от 1 до $m$. Получим

$$\int_0^l (u_{mtt}-(au_{mx})_x+cu_m)\,\ell u_{mt}dx = \int_0^l f(x,t)\ell u_{mt}dx.$$

Проинтегрируем теперь полученное тождество по $t$ от 0 до $\tau$ и, используя вычисления, проделанные при доказательстве леммы, получим оценку

$$\int_0^l u_m^2(x,\tau)dx + \int_0^l\Big(\int_x^l u_{mt}(\xi,\tau)d\xi\Big)^2 dx \leq$$

$$\leq \widetilde{C}(||f||^2_{L_2(\mathcal{D})} + ||\varphi^m||^2_{L_2(0,l)} + ||\psi^m||^2_{L_2(0,l)}).$$

Интегрируя теперь обе части этого неравенства по $t$ от 0 до $T$, получим

$$||u_m||^2_{\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})} \leq C(||f||^2_{L_2(\mathcal{D})} + ||\varphi||^2_{L_2(0,l)} + ||\psi||^2_{L_2(0,l)}), \tag{14}$$

где $C = \widetilde{C}T$. Из (14) следует ограниченность последовательности $u_m(x,t)$, и, следовательно, возможность выделить из нее слабо сходящуюся подпоследовательность, за которой мы сохраним прежнее обозначение, к некоторому элементу $u(x,t) \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$. Теперь, пользуясь стандартным приемом, (см., например, [9, с. 329–331]) можно легко показать, что эта функция и есть искомое обобщенное решение задачи (1)–(4). Доказательство утверждения о его единственности содержится в теореме 1.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, N 11. С. 1925–1935.
2. *Cannon J. R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. P. 155–160.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
4. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, N 4. С. 739–740
5. *Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, N 1. С. 94–103.
6. *Bouziani A.* Solution forte d'un probleme mixte avec coditions non locales pour une classe d'equations hyperboliques // Bull. CI. Sci. Acad. Roy. Belg. 1997. V. 8. P. 53–70.
7. *Beilin S.* Existence of solutions for one–dimensional wave equations with nonlocal conditions // Electronic Journal of Differential Equations. V. 2001, N 76. P. 1–8
8. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: ИЛ, 1961.
9. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.



*Пулькина Людмила Степановна*
*Россия, Самара, Самарский государственный университет*
louise@valhalla.sama.ru