УДК 517.95

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. Г. Пятков

Мы рассматриваем уравнение

$$Mu = g(x,t)u_t + L(t,x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T) \ \ (T \leq \infty), \qquad (1)$$

где G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ, а L — эллиптический оператор второго порядка:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(t,x)u_{x_i}) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \delta\|\xi\|^2$$

для $\xi \in \mathbb{R}^n$, где постоянная $\delta > 0$ не зависит от t и ξ и $a_{i,j} = a_{j,i}$. Положим

$$B_1u|_\Gamma = u(t,x)|_\Gamma \ \ \text{или} \ \ B_1u|_\Gamma = \frac{\partial}{\partial N}u(t,x) + \sigma(t,x)u|_\Gamma,$$

где $\frac{\partial}{\partial N}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}u_{x_i}n_j$ и n_j — компоненты внешней единичной нормали к $S = \Gamma \times (0,T)$. Гладкости функции $g(x,t)$ по переменной x и ее знакоопределенности в области Q мы не предполагаем. Мы требуем существования открытых подмножеств $G^+(0)$, $G^+(T)$, $G^-(0)$ и $G^-(T)$ области G таких, что $\mu(\overline{G^\pm(0)} \setminus G^\pm(0)) = 0$ ($\mu(\overline{G^\pm(T)} \setminus G^\pm(T)) = 0$), $g(0,x) > 0$ п.в. (почти всюду) в $G^+(0)$ ($g(T,x) > 0$ п.в. в $G^+(T)$), $g(0,x) < 0$ п.в. в $G^-(0)$ ($g(T,x) < 0$ п.в. в $G^-(T)$) и $g(x,0) = 0$ п.в. в $G^0(0) = G \setminus (\overline{G^+(0)} \cup \overline{G^-(0)})$ ($g(T,x) = 0$ п.в. в $G^0(T) = G \setminus (\overline{G^+(T)} \cup \overline{G^-(T)})$). Ищем решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$B_1u|_\Gamma = 0, \ u(0,x) = u_0(x) \ (x \in G^+(0)), \ u(T,x) = u_T(x) \ (x \in G^-(T)) \qquad (2)$$

при $T < \infty$ и

$$B_1u|_\Gamma = 0, \ u(0,x) = u_0(x) \ (x \in G^+(0)), \ \lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0 \qquad (3)$$

при $T = \infty$. Предполагаем, что все функциональные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ и соответствующие коэффициенты граничного оператора и оператора L вещественны.

Среди работ, посвященных уравнению (1) и, в частности, краевой задаче (1)–(3), отметим работы [1–12]. В этих работах рассматривались вопросы существования и единственности решений для некоторых модельных уравнений входящих в

Работа поддержана грантом РФФИ № 01–01–00796 и грантом МО РФ в области фундаментального естествознания № Е00–1.0–79

класс (1). Данная работа является продолжением работы [12]. Мы ослабим условия на функцию $g(x,t)$ и коэффициенты уравнения. В частности, в [12] мы предполагали в ряде случаев, что коэффициенты оператора L не зависят от t. Здесь это условие опущено. Отметим, что гладкость решений задачи (1)–(3) вплоть до точек $t=0$ и $t=T$ места не имеет, даже если все данные задачи бесконечно дифференцируемы (см. [1, 6, 11]). Именно поэтому в работе рассматриваются весовые пространства. Определения функциональных пространств стандартные и могут быть найдены в [13, 14].

Обозначим через X_1 пространство, совпадающее с $W_2^1(G)$ в случае третьей краевой задачи и с $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ в случае задачи Дирихле. Приведем необходимые условия на коэффициенты уравнения, считая, что $l \geq 0$ — фиксированное целое число:

(a) $a_{i,j} \in C^l([0,T]C(\overline{G}))$ $(i,j=1,2,\dots,n)$; $\sigma(x,t) \in C^l([0,T];C(\Gamma))$; $\Gamma \in C^2$; $b_i \in W_\infty^l(0,T;W_\infty^1(G))$ $(i=1,2,\dots,n)$;

(b) $c(x,t) \in W_\infty^l(0,T;L_p(G))$ и $g(x,t) \in W_\infty^{\max(l,1)}(0,T;L_p(G))$, *где* $p \geq n/2$ *при* $n>2$, $p=1$ *при* $n<2$, $p>1$ *при* $n=2$; *при* $n>2$ $g_t, c \in L_\infty(0,T;L_q(G))$ *с* $q>n/2$;

(c) $g(x,t), c(x,t) \in W_\infty^{l-1}(0,T;L_p(G))$, *где* $p \geq n/2$ *при* $n>4$, $p>2$ *при* $n=4$, $p=2$ *при* $n<4$; *при* $n>4$ $g_t, c \in L_\infty(0,T;L_p(G))$ *с* $p>n/2$; $g^{(l-1)}, c^{(l-1)} \in W_\infty^1(0,T;L_p(G))$ *с параметром* p, *удовлетворяющим условиям из* (2); $g \in L_\infty(0,T;L_p(G))$ *с* $p \geq n$ *при* $n>2$, $p=2$ *при* $n<2$, $p>2$ *при* $n=2$;

(d) *справедливы неравенства*

$$c(t,x)+ig_t \geq \delta > 0,\ c^* = c(t,x) - \sum_{i=1}^n b_{ix_i} + (i-1)g_t(t,x) \geq \delta > 0,\ i=0,1,\dots,l,$$

$$\sigma(t,x) \geq 0,\ \sigma^*(t,x) = \sigma - \sum_{i=1}^n b_i n_i \geq 0$$

почти всюду в Q *и на* S.

Отметим, что из условий (b) вытекает $g(t,x) \in C([0,T];L_p(G))$ (после может быть исправления функции g на множестве меры ноль). Положим $(u,v) = \int\limits_G u(x)v(x)\,dx$ и $<u,v>= \int\limits_Q u(x,t)v(x,t)\,dQ$.

Положим $\varphi_i(t) = t^{2i}(T-t)^{2i}$ при $T<\infty$ и $i \in \mathbb{N}$ и при $T=\infty$ считаем, что $\varphi_i(t) \in C^\infty([0,\infty))$, $\varphi_i(t) = t^{2i}$ при $t \leq 1$ $\varphi_i(t)=1$ при $t \geq 2$, $1/2 \leq \varphi_i(t) < 2$ при $t \in [1,2]$. Положим $\varphi_0(t) \equiv 1$, при $r<0$ $\varphi_r = 1/\varphi_{-r}$. Теоремы вложения (см. [13, 15]) и условия (2) гарантируют, что оператор умножения на функцию g непрерывен как оператор из $L_2(0,T;X_1)$ в $L_2(0,T;X_1')$, где X_1' — негативное пространство, построенное по паре $X_1, L_2(G)$ (см. определение негативных пространств в [15]). При этом действие соответствующих функционалов определятся равенством $<gu,v>= \int\limits_0^T (gu,v)\,dt$, причем все интегралы существуют в обычном смысле $(g(x,t)u(x,t)v(x,t) \in L_1(Q)$, если $u,v \in L_2(0,T;X_1))$. Норму в пространстве $L_2(0,T;X_1)$, совпадающую с нормой пространства $L_2(0,T;W_2^1(G))$, обозначаем через $\|\cdot\|_{0,1}$. Соответственно, норму в пространстве $L_2(0,T;X_1')$ обозначаем через $\|\cdot\|_{0,-1}$. Нормы в пространствах $L_2(G)$, $L_2(Q)$ обозначаем символами $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_0$. Норму в пространствах X_1, X_1' обозначаем через $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{-1}$. Класс $C^\infty([0,T];X_1)$ далее обозначаем через H. Введем также пространство

$$W^m = \{u \in L_2(0,T;X_1):\ \sqrt{\varphi_i}u^{(i)} \in L_2(0,T;X_1)\ (i \leq m),$$

$$\sqrt{\varphi_m}\frac{d}{dt}gu^{(m)} \in L_2(0,T;X_1')\} \quad (m\in\mathbb{N}),$$

где $u^{(i)} = \frac{d^i}{dt^i}u$ и обобщенные производные понимаются в смысле теории распределений. Пространство W^0 обозначаем через W. Норма в пространстве W^m определяется равенством

$$\|u\|^2_{W^m} = \sum_{i=0}^{m} \|\sqrt{\varphi_i}u^{(i)}\|^2_{L_2(0,T;X_1)} + \left\|\sqrt{\varphi_m}\frac{d}{dt}g(t,x)u^{(m)}\right\|^2_{L_2(0,T;X_1')}.$$

Обозначим также через F_0 и G_0 весовые пространства $L_{2,g(0,x)}(G\setminus G^0(0))$ и $L_{2,g(T,x)}(G\setminus G^0(T))$ состоящие из измеримых функций $u(x)$ в $G\setminus G^0(0)$ и $G\setminus G^0(T)$ таких, что $\sqrt{|g(0,x)|}u(x)\in L_2(G\setminus G^0(0))$, соответственно $\sqrt{|g(T,x)|}u(x)\in L_2(G\setminus G^0(T))$. Аналогично определяем $L_{2,g(0,x)}(G^\pm(0))$ и $L_{2,g(T,x)}(G^\pm(T))$.

Далее мы приведем теорему существования обобщенного решения.

Теорема 1. *Предположим, что* $f\in L_2(0,T;X_1')$, $u_0\in L_{2,g(0,x)}(G^+(0))$, $u_T\in L_{2,g(T,x)}(G^-(T))$ *(это условие отсутствует, если* $T=\infty$*) и условия* (a), (b), (d) *с* $l=0$ *выполнены. Тогда существует единственное обобщенное решение* $u(t,x)\in W$ *задачи* (1)–(3) *такое, что* $u(0,x)\in F_0$, $u(T,x)\in G_0$, *и существует последовательность* $u_n\in C^\infty([0,T];X_1)$ *такая, что*

$$\|u_n-u\|_W + \|gu_{nt}-Lu_n-f\|_{0,-1}+$$

$$+\|u_n(0,x)-u(0,x)\|_{F_0} + \|u_n(T,x)-u(T,x)\|_{G_0}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Доказательство. Доказательство полностью совпадает с доказательством соответствующей теоремы 1 в [12]. Единственное изменение в доказательстве состоит в том, что первое слагаемое в форме $E_\varepsilon(u,v)$, введенной в лемме 3 в [12], заменяется на $\int\limits_Q \varepsilon(1+|g(x,0)|+|g(x,T)|)u_t(x,t)v_t(x,t)\,dQ$. Соответствующим образом меняются и вспомогательные функциональные пространства. В остальном рассуждения проходят без изменений.

Под обобщенным решением задачи (1)–(3) (см. [12]) понимаем функцию $u\in W$ такую, что для всех $v\in L_2(0,T;X_1)$

$$\int_0^T a(u,v)\,dt + \int_Q (u(x,t)g(x,t))_t v(x,t) - u(x,t)g_t(t,x)v(t,x)\,dQ =$$

$$= \int_Q f(t,x)v(t,x)\,dQ,$$

$$a(u,v) = \int_G \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}v + cuv(x,t)\,dx + \int_\Gamma \sigma(t,x)uv(t,x)\,d\Gamma,$$

или другими словами можно сказать, что уравнение (1) выполнено в пространстве $L_2(0,T;X_1')$.

Отметим (см. [12]), что для функции $u\in W$ существуют единственные функции (следы) $u(x,0)$, $u(x,T)$ такие, что для каждой $\varphi(x)\in C_0^\infty(G^+(0)\cup G^-(0))$ $(\varphi(x)\in C_0^\infty(G^+(T)\cup G^-(T))$ $\sqrt{|\varphi|}u(x,0)\in F_0$ $(\sqrt{|\varphi|}u(x,T)\in G_0)$ и для любой

последовательности $u_n \to u$ в W, $u_n \in H$, (такие последовательности существуют (см. лемму 1 в [12]))

$$\|(u(x,0)-u_n(x,0))\varphi\|_{F_0} \to 0 \ \ (\|(u(x,T)-u_n(x,T))\varphi\|_{G_0} \to 0) \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Пусть X — некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Через $W^{l,s}(X)$ обозначим пространство функций $v(t) \in L_2(0,T;X)$, имеющих обобщенные производные до порядка l включительно (в смысле теории распределений) такие, что

$$\|v\|^2_{W^{l,s}(X)} = \sum_{i=0}^{l} \|\sqrt{\varphi_{i-s}}v^{(i)}\|^2_{L_2(0,T;X)} < \infty.$$

Полагаем $[u,v] = \int\limits_0^T (u(t),v(t))\,dt$. Рассмотрим оператор

$$L^l v = v + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left[(-1)^i \frac{\partial^i}{\partial t^i}(\varphi_i v^{(i)}) + (-1)^{i-1}\frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}}\left(\frac{\varphi_{it}}{2}v^{(i)}\right)\right] \ (\lambda_i > 0),$$

где постоянные λ_i удовлетворяют некоторому условию вида

$$\lambda_i \le r_1\lambda_{i-1} \ \ (r_1 \le 1, \ \lambda_0 = 1, \ i = 1,\dots,l). \tag{4}$$

Лемма. *При подходящем выборе постоянной r_1 в (4) и $s \ge 0$, оператор L^l осуществляет изоморфизм пространства $W^{2l+k,s}(X)$ на $W^{k,s}(X)$ при всех целых $k, s \ge 0$. Класс $C_0^\infty(0,T;X)$ плотен в $W^{l,s}(X)$ при всех целых l, s. При $T < \infty$ и $s \le 0$ все функции из класса $C^\infty([0,T];X)$ принадлежат $W^{l,s}(X)$, а при $T = \infty$ этим же свойством обладают все функции из $C^\infty([0,\infty);X)$ с ограниченным носителем.*

Доказательство. Утверждение о плотности проверяется следующим образом. Пусть $T \ne \infty$. Введем функцию $\psi_\delta = P_\rho\chi_\delta$, где χ_δ — характеристическая функция интервала $(\delta, T-\delta)$ и $\rho = \delta/4$, а оператор P_ρ — оператор усреднения по переменной t:

$$P_\rho u = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\frac{\xi - t}{\rho})u(\xi)\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta)u(t+\rho\eta)\,d\eta,$$

где функция $u(t)$ определена на интервале $(-\infty,\infty)$, функция $\omega(\eta) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \omega(\eta)\,d\eta = 1$, $\omega(\xi) \ge 0$ и $\operatorname{supp}\omega \subset (-1,1)$. Функция ψ_δ обладает свойствами: $\psi_\delta = 0$ $(t \in (0,\delta/2)\cup(T-\delta/2,T))$, $\psi_\delta^{(k)} = 0$ $(t \in (0,T)\setminus(\delta/2,3\delta/2)\cup(T-3\delta/2,T-\delta/2)$,

$$|\psi_\delta^{(k)}| \le c_k/\delta^k \ (t \in (\delta/2,3\delta/2)\cup(T-3\delta/2,T-\delta/2), k = 0,1,\dots), \tag{5}$$

где постоянная c не зависит от δ. Как непосредственное следствие (5), определения нормы в $W^{l,s}(X)$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем, что $\|\psi_\delta u - u\|_{W^{l,s}(X)} \to 0$. Аналогичные рассуждения справедливы и при $T = \infty$. Возьмем $T = 2$, построим функцию ψ_δ, и далее найдем $\widetilde{\psi}_\delta \in C_0^\infty(0,\infty)$ такую, что $\widetilde{\psi}_\delta(t) = \psi_\delta(t)$ при $t \le 1$, $\widetilde{\psi}_\delta(t) = 1$ при $t \in [1,R_\delta]$ $(R_\delta \to \infty$ при $\delta \to 0)$, $0 \le \widetilde{\psi}_\delta \le 1$ при $t \in (R_\delta, 2R_\delta)$, $\widetilde{\psi}_\delta(t) = 0$ при $t \ge 2R_\delta$, причем $|\widetilde{\psi}_\delta^{(k)}| \le c(k)$ при $t \ge 1$ (постоянная $c(k)$ не зависит от δ). Искомые приближающие последовательности строятся

с помощью операторов усреднения, в случае $T < \infty$ используем оператор $P_\rho \psi_\delta v$ с $\rho \le \delta/8$.

При подходящем выборе постоянных λ_i имеем, что

$$|[L^l v, u]| \le c\|u\|_{W^{l,0}(X)} \|v\|_{W^{l,0}(X)}, \quad [L^l u, u] \ge \delta \|u\|^2_{W^{l,0}(X)} \ (u, v \in W^{2l,0}).$$

Отсюда вытекает, что соответствующая полуторалинейная форма удовлетворяет условиям теоремы Лакса–Мильграма (теорема 8.1 в [15]) и задача

$$[L^l v, u] = [f, u] \quad \forall u \in W^{l,0}(X) \tag{6}$$

имеет единственное решение $v \in W^{l,0}(X)$. Далее считаем, что $T < \infty$. При $T = \infty$ рассуждения аналогичны. Приблизим v последовательностью $v_n \in C_0^\infty(0, T; X)$ в норме $W^{l,0}(X)$. При этом соответствующая последовательность f_n будет сходиться к f в пространстве $(W^{l,0}(X))'$. Возьмем в (6) (где $v = v_n$, $f = f_n$) $u = \varphi_\varepsilon v_n$, $\varphi_\varepsilon = 1/((t+\varepsilon)^{2s}(T-t+\varepsilon)^{2s}$. Интегрируя по частям, если постоянная r_1 достаточно мала, получим оценку

$$\sum_{i=0}^{l} \|v_n^{(i)} \sqrt{\varphi_i \varphi_\varepsilon}\|^2_{L_2(0,T;X)} \le c|[f_n, \varphi_\varepsilon v_n]|,$$

где постоянная c не зависит от ε. Переходя к пределу по n получим, что это неравенство выполнено и для предельной функции v, откуда

$$\sum_{i=0}^{l} \|v^{(i)} \sqrt{\varphi_i \varphi_\varepsilon}\|^2_{L_2(0,T;X)} \le c\|f\sqrt{\varphi_\varepsilon}\|^2_{L_2(0,T;X)}.$$

Используя теорему Леви, заключаем, что $v \in W^{l,s}(X)$. Далее, используя стандартные рассуждения с помощью метода конечных разностей, устанавливаем, что $v \in W^{2l+k,s}_{loc}(X)$ (т.е. $\varphi(t)v \in W^{2l+k,s}(X)$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$). Берем в (6) $u = \varphi_{1-s}\psi_\delta v''$ (функция ψ_δ заменяется на $\widetilde{\psi}_\delta$ при $T = \infty$). Интегрируя по частям, используя полученные неравенства и неравенство $|\sqrt{\varphi_i}\psi_\delta^{(k)}| \le c(k, i)\sqrt{\varphi_{i-k}}$, получим оценку

$$\int_0^T \psi_\delta \varphi_{l+1-s} \|u^{(l+1)}\|^2_X \, dt \le c\|f\sqrt{\varphi_{-s}}\|^2_{L_2(0,T;X)}.$$

Используя теорему Леви заключаем, что $u^{(l+1)}\sqrt{\varphi_{l+1-s}} \in L_2(0, T; X)$. Далее повторяем рассуждения последовательно выбирая $u = \varphi_{2-s}\psi_\delta v^{(4)}$, $u = \varphi_{3-s}\psi_\delta v^{(6)}$ и т.д. В конце концов получим искомое утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (a), (b), (d) *при некотором* $l \ge 1$. *Тогда для каждых* $f \in W^{l,0}(X_1')$, $u_0 \in L_{2,g}(G^+(0))$, $u_T \in L_{2,g}(G^-(T))$ *(если* $T < \infty$*) существует обобщенное решение* $u(x, t)$ *задачи* (1)–(3) *из пространства* $W^{l,0}(X_1)$, *причем такое, что* $gu_t \in W^{l,0}(X_1')$, $u(x, 0) \in F_0$, $u(x, T) \in G_0$. *При этом уравнение* (1) *и краевые условия выполняются в смысле, указанном в теореме* 1. *В частности, имеем* $\sqrt{\varphi_i}u^{(i)} \in L_2(0, T; W_2^1(G))$ $(i \le l)$.

Доказательство. Для функций $u, v \in H$ рассмотрим форму $E(v, u) = E_0(v, u) + E_1(v, u)$,

$$E_0(v, u) = \int_0^T a(u, L^l v)\, dt + < L^l v - v, gu_t > - < v_t g, u > - < g_t v, u >,$$

$$E_1(v,u)=\int\limits_{G^+(T)} g(x,T)v(x,T)u(x,T)\,dx-\int\limits_{G^-(0)} g(x,0)v(x,0)u(x,0)\,dx$$

при $T<\infty$,

$$E_1(v,u)=-\int\limits_{G^-(0)} g(x,0)v(x,0)u(x,0)\,dx$$

при $T=\infty$. Рассмотрим также функционал

$$l(\vec{v})=<L^l v,f>+\int\limits_{G^+(0)} v(x,0)g(x,0)u_0(x)\,dx-\int\limits_{G^-(T)} v(x,T)g(x,T)u_T(x)\,dx,$$

где $\vec{v}=(v(x,t),v(x,0),v(x,T))$. Проверим, что при подходящем выборе постоянных λ_i (выполнено подходящее условие типа (4)) формы $E_0(v,u)$, $E(v,u)$ обладают свойствами:

$$E_0(v,u)\le c(v)\|u\|_{W^{l,0}(X_1)}\quad (u,v\in C^\infty([0,T];X_1)),\tag{7}$$

$$E(u,u)\ge\delta(\|u\|^2_{W^{l,0}(X_1)}+\|u(x,0)\|^2_{F_0}+\|u(x,T)\|^2_{G_0})\quad (u\in C^\infty([0,T];X_1)).\tag{8}$$

где δ,c — некоторые положительные постоянные, не зависящие от параметра $t\in(0,T)$.

Оценка (7) получается просто, если мы используем интегрирование по частям, неравенство Гельдера и теоремы вложения. Получим оценку (8). Интегрируя по частям, придем к равенству

$$-<u_t,gu>-<u,g_tu>+\int\limits_0^T a(u,u)\,dt+E_1(u,u)==\int\limits_0^T\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dQ+$$

$$+<u,\Big(c-\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n b_{ix_i}+g_t\Big)\Big)u>+\frac{1}{2}(\|u(x,0)\|^2_{F_0}+\|u(x,T)\|^2_{G_0}).$$

Из (d) вытекает неравенство

$$-<u_t,gu>-<u,g_tu>+\int\limits_0^T a(u,u)\,dt+E_1(u,u)\ge$$

$$\ge\delta\|u\|^2_{0,1}+\frac{1}{2}(\|u(x,0)\|^2_{F_0}+\|u(x,T)\|^2_{G_0}).\tag{9}$$

Далее рассмотрим i-е слагаемое входящее в форму E_0. Туда входит слагаемое $I_1^i=<\varphi_iu^{(i)},(gu_t)^{(i)}>+<\frac{\varphi_{it}}{2}u^{(i)},(gu_t)^{(i-1)}>$. Интегрируя по частям, мы получим

$$I_1^i=<\varphi_iu^{(i)},g_t(i-\frac{1}{2})u^{(i)}>+\sum_{k=2}^{i}c_i^k<\varphi_iu^{(i)},g^{(k)}u^{(i-k+1)}>+$$

$$+\sum_{k=1}^{i-1}c_{i-1}^k<\frac{\varphi_{it}}{2}u^{(i)},g^{(k)}u^{(i-k)}>,$$

где c_i^k — число сочетаний из i по k. Слагаемые, входящие во вторую и третью сумму оцениваются одинаково. Например, используя неравенства

$$|\varphi_{it}|\le c\sqrt{\varphi_i\varphi_{i-1}},\quad ab\le\delta_0|a|^p/p+(\delta_0)^{-q/p}|b|^q/q\quad(1/p+1/q=1),\tag{10}$$

получим

$$\Big| < \frac{\varphi_{it}}{2} u^{(i)}, g^{(k)} u^{(i-k)} > \Big| \leq c \|\sqrt{\varphi_i} u^{(i)}\|_{0,1} \|g^{(k)} \sqrt{\varphi_{i-1}} u^{(i-k)}\|_{0,-1} \leq$$

$$c_1 \|\sqrt{\varphi_i} u^{(i)}\|_{0,1} \|\sqrt{\varphi_{i-1}} u^{(i-k)}\|_{0,1} \leq \delta_0 \|\sqrt{\varphi_i} u^{(i)}\|^2_{0,1} + c(\delta_0) \|u\|^2_{W^{i-1,0}(X_1)},$$

где постоянная $\delta_0 \in (0,1)$ может быть выбрана произвольной и $c(\delta_0) \to \infty$ при $\delta_0 \to 0$. Тогда имеем

$$I_1^i \geq < \varphi_i u^{(i)}, g_t (i - \frac{1}{2}) u^{(i)} > - c_1 \delta_0 \|\sqrt{\varphi_i} u^{(i)}\|^2_{0,1} - c(\delta_0) \|u\|^2_{W^{i-1,0}(X_1)}, \qquad (11)$$

где c_1 — некоторая фиксированная постоянная, а постоянная $\delta_0 \in (0,1)$ может быть выбрана произвольной. Рассмотрим слагаемое $I_2^i = (-1)^i \int\limits_0^T a(u, (\varphi_i u^{(i)})^{(i)})\, dt$. Имеем

$$I_2^i = \int\limits_0^T \sum_{k,s=1}^n ((a_{k,s} u_{x_s})^{(i)}, \varphi_i u^{(i)}_{x_k}) + \sum_{k=1}^n ((b_{x_k} u_{x_k})^{(i)}, \varphi_i u^{(i)})\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Gamma (\sigma(x,t) u)^{(i)} \varphi_i u^{(i)}\, d\Gamma dt + \int\limits_0^T ((c(x,t) u)^{(i)}, \varphi_i u^{(i)})\, dt.$$

Это выражение может быть записано в виде $I_2^i = \int\limits_0^T \varphi_i a(u^{(i)}, u^{(i)})\, dt + J(u)$, где слагаемое $J(u)$ допускает оценку

$$|J(u)| \leq c \|u\|_{W^{i-1,0}(X_1)} \|u\|_{W^{i,0}(X_1)} \leq c_1 \delta_1 \|u\|^2_{W^{i,0}(X_1)} + c(\delta_1) \|u\|^2_{W^{i-1,0}(X_1)}.$$

Выбирая достаточно малую постоянную δ_1, отсюда получим неравенство

$$I_2^i \geq \delta \int\limits_0^T \varphi_i (\|u^{(i)}\|_1^2\, dt + \int\limits_Q (c - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} b_{kx_k}) |u^{(i)}|^2\, dQ - c_2 \|u\|^2_{W^{i-1,0}(X_1)}.$$

Это неравенство также может быть записано в виде

$$I_2^i \geq \delta \|u\|^2_{W^{i,0}(X_1)} + \int\limits_Q (c - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} b_{kx_k}) |u^{(i)}|^2\, dQ - c_3 \|u\|^2_{W^{i-1,0}(X_1)}. \qquad (12)$$

Рассмотрим слагаемые $I_3^i = \frac{(-1)^{(i-1)}}{2} \int\limits_0^T a(u, (\varphi_{it} u^{(i)})^{(i-1)})\, dt$. Используя (10), аналогично предыдущему получим

$$|I_3^i| \leq c \|u\|_{W^{i-1,0}(X_1)} \|u\|_{W^{i,0}(X_1)} \leq c_1 \delta_2 \|u\|^2_{W^{i,0}(X_1)} + c(\delta_2) \|u\|^2_{W^{i-1,0}(X_1)}, \qquad (13)$$

где постоянная $\delta_2 \in (0,1)$ может быть выбрана произвольной. Используя (9), (11)–(13) и выбирая достаточно малые постоянные δ_i, а также используя условие (d), мы придем к неравенству

$$E(u,u) \geq \sum_{i=0}^l \lambda_i \delta \|u\|^2_{W^{i,0}(X_1)} - c \sum_{i=1}^l \|u\|^2_{W^{i-1,0}(X_1)} + \frac{1}{2} (\|u(x,0)\|^2_{F_0} + \|u(x,T)\|^2_{G_0}),$$

которое может быть записано в виде

$$E(u,u) \geq \sum_{i=0}^{l} \|u\|^2_{W^{i,0}(X_1)}(\lambda_i\delta - c\lambda_{i+1}) + \frac{1}{2}(\|u(x,0)\|^2_{F_0} + \|u(x,T)\|^2_{G_0}),$$

Выбирая постоянную r_1 в (4) такой, что $r_1 \leq \delta/(2c)$, мы придем к неравенству (8).

Из неравенства (7) вытекает, что при фиксированной v форма E_0 определяет антилинейный непрерывный функционал над пространством $W^{l,0}(X_1)$ и следовательно, найдется элемент $Tv \in (W^{l,0}(X_1))'$ такой, что $E_0(v,u) =< Tv, u >$. Тогда форму $E(v,u)$ можно записать в виде

$$E(v,u) =< Tv, u > + E_1(v,u) \ \ (u, v \in H),$$

где $T : H \to (W^{l,0}(X_1))'$ — линейный оператор. Для $u \in H$ положим $\vec{u} = (u(x,t), u(x,0), u(x,T)) \in W^{l,0}(X_1) \times F_0 \times G_0 = X^l$ (считаем, что $T < \infty$, в случае $T = \infty$ естественно имеем, что $\vec{u} = (u(x,t), u(x,0)) \in W^{l,0}(X_1) \times F_0$). Линеал $\{\vec{u},\ u \in H\}$ обозначим через $\mathcal{L}^l$. На линеале $\mathcal{L}^l$ определим оператор $S\vec{v} = (Tv, \chi_0^-(x)v(0), \chi_T^+(x)v(T))$, где $\chi_0^\pm, \chi_T^\pm$ — характеристические функции множеств $G^+(0), G^-(0), G^+(T), G^-(T)$, соответственно. Имеем $S : \mathcal{L}^l \to (W^{l,0}(X_1))' \times F_0 \times G_0 = (X^l)'$ (негативные к F_0, G_0 отождествляем с F_0 и G_0). Тогда форму $E(v,u)$ можно записать в виде

$$E_l(v,u) =< Tv, u > + (\chi^- v(x,0), u(x,0))_{F_0} + (\chi^+ v(x,T), u(x,T))_{G_0} =< S\vec{v}, \vec{u} >_0,$$

где $< \vec{v}, \vec{u} >_0$ — скалярное произведение в $L_2(Q) \times F_0 \times G_0 = E_0$. Из этого представления и неравенства Шварца вытекает неравенство

$$|E(u,u)| \leq (\|Tu\|^2_{(W^{l,0}(X_1))'} + \|\chi^- u(0)\|^2_{F_0} + \|\chi^+ u(T)\|^2_{G_0})^{1/2} \times$$

$$\times(\|u\|^2_{W^{l,0}(X_1)} + \|u(0)\|^2_{F_0} + \|u(T)\|^2_{G_0})^{1/2} \qquad (14)$$

Из (8), (14) имеем, что

$$\|S\vec{u}\|_{(X^l)'} \geq \delta(\|u\|^2_{W^l} + \|u(0)\|^2_{F_0} + \|u(T)\|^2_{G_0})^{1/2} = \|\vec{u}\|_{X^l}, \qquad (15)$$

справедливую для всех $u \in H$. Рассмотрим функционал $l(\vec{v})$ ($\vec{v} \in \mathcal{L}^l$). Из определения функционала получим неравенство

$$|l(\vec{v})| \leq c\|\vec{v}\|_{X^l}(\|f\|^2_{W^{l,0}(X_1')} + \|u_0\|^2_{L_{2,g}(G^+(0))} + \|u_T\|^2_{L_{2,g}(G^-(T))})^{1/2} \qquad (16)$$

Рассмотрим задачу о нахождении функции $\vec{u} \in X^l$ такой, что

$$< S\vec{v}, \vec{u} >_0 = l(\vec{v}) \ \ \forall \vec{v} \in \mathcal{L}^l. \qquad (17)$$

Для любого $\vec{g} \in R(S) \subset (X^l)'$ имеем

$$< \vec{g}, \vec{u} >_0 = l(S^{-1}\vec{g}) \qquad (18)$$

Из (15), (16) вытекает неравенство

$$|l(S^{-1}\vec{g})| \leq c_1\|\vec{g}\|_{(X^l)'}, \qquad (19)$$

где постоянная c_1 не зависит от $\vec{g} \in \{S\vec{v},\ \vec{v} \in \mathcal{L}^l\}$ и

$$c_1 = c(\|L^{-1}f\|^2_{W^l} + \|u_0\|^2_{L_{2,g}(G^+(0))} + \|u_T\|^2_{L_{2,g}(G^-(T))})^{1/2}.$$

Таким образом, правая часть в (18) представляет собой линейный непрерывный функционал, заданный на линеале $M_0 = \{S\vec{v},\ \vec{v} \in \mathcal{L}\} \subset (X_l)'$ и, следовательно, в силу (19) на его замыкании в пространстве $(X^l)'$. По теореме Хана–Банаха его можно продолжить на все пространство $(X^l)'$ с сохранением нормы. Тогда найдется вектор $\vec{u} = (u(x,t), \widetilde{u}_0, \widetilde{u}_T) \in X^l$ такой, что

$$< \vec{g}, \vec{u} >= l(S^{-1}\vec{g}) \ \ (\vec{g} \in M_0),$$

причем

$$(\|u\|^2_{W^l} + \|\widetilde{u}_0\|^2_{F_0} + \|\widetilde{u}_T\|^2_{G_0}) \leq$$
$$\leq c^2(\|f\|^2_{W^{l,0}(X_1')} + \|u_0\|^2_{L_{2,g}(G^+(0))} + \|u_T\|^2_{L_{2,g}(G^-(T))}). \tag{20}$$

Таким образом, найдется вектор $\vec{u} \in X^l$ такой, что выполнено (18). Покажем, что $Mu = f$. Интегрируя по частям в (17) где $v \in C_0^\infty(0,T;X_1)$, мы придем к равенству

$$< gu_t, L^l v > + \int_0^T a(u, L^l v)\, dt =< f, L^l v >$$

Возьмем $\psi \in C_0^\infty(0,T;X_1)$ и воспользуемся леммой. Найдем функцию $v_0 \in W^{2l,2l}(X_1)$ такую, что $L^l v_0 = \psi$. Воспользовавшись плотностью класса $C_0^\infty(0,T;X_1)$ в $W^{2l,2l}(X_1)$, мы можем перейти к пределу и заключить, что

$$< gu_t, \psi > + \int_0^T a(u,\psi)\, dt =< f, \psi >, \ \ \forall \psi \in C_0^\infty(0,T;X_1).$$

Из этого равенства вытекает, что $gu_t \in W^{l,0}(X_1')$, поскольку оставшиеся слагаемые оцениваются через $c(\|u\|_{W^{l,0}(X_1)} + \|f\|_{W^{l,0}(X_1')})\|\psi\|_{W^{l,0}(X_1)}$. Отсюда уже легко заключить, что $u \in W^l$. Возьмем в (17) $v \in H$ $(\vec{v} = (v, v(x,0), v(x,T)))$. В силу равенства $Mu = f$ (в пространстве $L_2(0,T;X_1')$) и определения формы $E(v,u)$, получим

$$- < v_t, gu > - < v, g_t u > + < v, Lu > +(v(x,T), \widetilde{u}_T)_{G_0} + (v(x,0), \widetilde{u}_0)_{F_0} =$$
$$=< v, f > + \int_{G^+(0)} v(x,0) g(x,0) u_0(x)\, dx - \int_{G^-(T)} v(x,T) g(x,T) u_T(x)\, dx \tag{21}$$

при $T < \infty$ и

$$- < v_t, gu > - < v, g_t u > + < v, Lu > - \int_{G^-(0)} g(x,0) v(x,0) \widetilde{u}_0(x)\, dx =$$
$$=< v, f > + \int_{G^+(0)} v(x,0) g(x,0) u_0(x)\, dx \tag{22}$$

при $T = \infty$. Возьмем в качестве функции v функцию из $C^\infty(\overline{Q})$ такую, что $v(x,0) = \varphi(x) \in C_0^\infty(G)$, $\operatorname{supp}\varphi \in G^+(0) \cup G^-(0)$, $v(x,T) = \psi(x) \in C_0^\infty(G)$, $\operatorname{supp}\psi \in G^+(T) \cup G^-(T)$. Интегрируя по частям в (21) ((22)) (интегрирование проводим на гладких функциях из класса H (см. леммы 1, 2 в [12]) и затем осуществляем предельный переход), получим

$$\int_G g(x,T)\psi(x)(u(x,T) - \chi_T^+(x)\widetilde{u}_T(x) - \chi_T^-(x) u_T(x))\, dx -$$

$$-\int\limits_G g(x,0)\varphi(x)(u(x,0)-\chi_0^-(x)\widetilde{u}_0(x)-\chi_0^+(x)u_0(x))\,dx=0$$

Отсюда имеем равенства

$$u(x,T)=\chi_T^+(x)\widetilde{u}_T(x)+\chi_T^-(x)u_T(x),\ u(x,0)=\chi_0^-(x)\widetilde{u}_0(x)+\chi_0^+(x)u_0(x),$$

т.е. функция u удовлетворяет (2).

Замечание. Полученное решение удовлетворяет оценке (20), где $\widetilde{u}_0=u(x,0)$, $\widetilde{u}_T=u(x,T)$.

Рассмотрим вопрос о существовании более гладких решений задачи (1)–(3).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (a)–(d) *при некотором* $l\geq 1$ *и дополнительно коэффициенты* $a_{i,j}\in C^l([0,T];C^1(\overline{G}))$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ *и функция* $\sigma(x,t)\in C^l([0,T];C^1(\Gamma))$. *Тогда для каждых* $f\in W^{l,0}(X_1')\cap W^{l-1,-1}(L_2(G))$, $u_0\in L_{2,g}(G^+(0))$, $u_T\in L_{2,g}(G^-(T))$ *(если* $T<\infty$*) существует решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)–(3) *из пространства* W^l*, причем такое, что*

$$\sqrt{\varphi_i}u^{(i-1)}\in L_2(0,T;W_2^2(G))\ (i\leq l),\quad \sqrt{\varphi_i}u^{(i)}\in L_2(0,T;W_2^1(G))\ (i\leq l),$$

$$\sqrt{\varphi_l}gu^{(l)}\in L_2(Q),\quad \sqrt{\varphi_l}(gu^{(l)})_t\in L_2(0,T;X_1'),$$

$u(x,0)\in F_0$, $u(x,T)\in G_0$. *При этом уравнение* (1) *выполняется п.в. в* Q*, а краевые условия при* $t=0,t=T$ *принимаются в том же смысле, что и в теореме* 1.

Доказательство. Доказательство состоит в изучении свойств обобщенных решений, полученных в теореме 2. Действительно, пусть u — обобщенное решение, полученное в теореме 2. Тогда из теорем вложения, получим что функция $\sqrt{\varphi_1}gu_t\in L_2(Q)$. Таким образом, функция u будет обобщенным решением эллиптической задачи $Lu=f-gu_t=f_1$, $\sqrt{\varphi_1}f_1\in L_2(Q)$, $B_1u|_\Gamma=0$. Из предположений вытекает, что обобщенное решение совпадает с регулярным, т.е. $\sqrt{\varphi_1}u\in L_2(0,T;W_2^2(G))$ (см. [14, 16]). Следовательно, уравнение (1) выполняется п.в. в Q. Далее, доказательство можно провести по индукции. Приведем его идею. Имеем, что

$$\int\limits_0^T a(u,v)\,dt=<f-gu_t,v>,\quad v\in C_0^\infty(0,T;X_1).$$

Взяв в этом равенстве в качестве функции v функцию v_t и проинтегрировав по частям, мы придем к равенству

$$\int\limits_0^T a(u_t-\Phi,v)\,dt=<(f-gu_t)_t,v>-<L\Phi,v>-<L_tu,v>,$$

где $\sqrt{\varphi_1}\Phi\in L_2(0,T;W_2^2(G))$, $B_1\Phi|_\Gamma=-B_{1t}u|_\Gamma$, символы B_{1t},L_t обозначают дифференциальные операторы B_1 и L, коэффициенты которого продифференцированы по t (в случае условий Дирихле $B_{1t}\equiv 0$). Функция Φ строится с использованием обычных теорем о продолжении граничных данных внутрь области (см. [17]). Получим, что функция $u_t-\Phi$ есть решение обобщенное решение эллиптической задачи $L(u_t-\Phi)+g_t(u_t-\Phi)=f_t-gu_{tt}-g_t\Phi-L\Phi-L_tu=f_2$, $B_1(u_t-\Phi)|_\Gamma=0$, причем $\sqrt{\varphi_2}f_2\in L_2(Q)$. В силу условий на коэффициенты заключаем, что $\sqrt{\varphi_2}(u_t-\Phi)\in L_2(0,T;W_2^2(G))$. Таким образом, $\sqrt{\varphi_2}u_t\in L_2(0,T;W_2^2(G))$. Повторяя рассуждения, мы придем к тому, что функция $\sqrt{\varphi_i}u^{(i-1)}\in L_2(0,T;W_2^2(G))$ при $i\leq l$.

Перейдем к вопросам регулярности обобщенных решений.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $u(x,t)$ — *обобщенное решение задачи* (1)–(3). *Предположим, что условия теоремы* 2 *или теоремы* 3 *выполнены на некотором интервале* $(\delta, R) \subset (0,T)$. *Тогда для любой функции* $\psi(t) \in C_0^\infty(\delta, R)$ *функция* $u\psi$ *принадлежит указанным в этих теоремах классам гладкости.*

Доказательство Утверждение вытекает из того факта, что мы можем продолжить коэффициенты оператора L и граничного оператора B_1 на весь интервал $(0,T)$ с сохранением гладкости и с выполнением всех необходимых условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Popov S. V.* Smoothness of solutions to the boundary value problems for a high–order operator differential equations // Мат. заметки ЯГУ. 1998. Т. 5, N 1. С. 106–112.
2. *Popov S. V.* On a boundary value problem for a singular parabolic equation with changing time direction // Мат. заметки ЯГУ. 1994. Т. 1, N 1. С. 113–128.
3. *Попов С. В.* О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1991. Вып. 102. С. 100–113.
4. *Egorov I. E.* On strong solvability of a nonlocal boundary value problem for an equation with variable time direction // Мат. заметки ЯГУ. 1994. Т. 1, N 2. С. 70–74.
5. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1982.
6. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
7. *Керефов А. А.* Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, N 1. С. 74–78.
8. *Baouendi M. S., Grisvard P.* Sur une equation d'evolution changeante de type // J. Funct. Anal. 1968. V. 2, N 3. P. 352–367.
9. *Pagani C. D.* On the parabolic equation $\mathrm{sgn}(x)|x|^p u_y - u_{xx} = 0$ // Ann. Mat. Pure ed Appl. 1974. V. 99. P. 333–399.
10. *Pagani C. D. and Talenti G.* On a forward-backward parabolic equation // Ann. Mat. Pure ed Appl. 1971. V. 90. P. 1–58.
11. *Пятков С. Г.* О разрешимости одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, N 6. С. 1322–1327.
12. *Пятков С. Г.* О некоторых свойствах решений параболических уравнений с меняющимся направлением времени // Неклассические уравнения математической физики: Тр. Четвертого Сиб. конгр. по индустр. и прикладной математике. 2000. С. 97–106.
13. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
14. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
15. *Yosida K.* Functional analysis // Matematischen Wissenschaften, 1965. V. 123. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer–Verlag.
16. *Agmon S.* Lectures on elliptic boundary value problems. Princeton, New Jersey, New York, Toronto, London: D. Van Nostrand Company, Inc. 1965.
17. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, Физматлит. 1996.

Пятков Сергей Григорьевич

Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

pyatkov@math.nsc.ru