УДК 517.958

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В. Г. Романов

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Обратные задачи электродинамики рассматривались многими авторами, начиная с работ А. Н. Тихонова и Л. Каньяра (см., например, [1–9] и литературу в них). Многие из этих задач изучались в частотной области, с периодическими по времени источниками внешнего тока. Практически до 80-х годов прошлого века все рассматриваемые обратные задачи ограничивались слоистыми средами, для которых электродинамические параметры зависели только от одной координаты. Первые многомерные постановки обратных задач для уравнений Максвелла были исследованы в линейном приближении, основанном на предположении близости среды к слоистой [3, 4]. Ряд теорем единственности решения многомерных обратных задач получен в работах [4, 6–9]. Основным результатом настоящей статьи является получение оценки условной устойчивости решения задачи об определении коэффициента проводимости в системе Максвелла. При этом существенно используется метод развитый автором в работе [10] (см. также [11]).

Пусть совокупность векторов H, E является решением задачи Коши для системы уравнений Максвелла с нулевыми начальными данными:

$$\nabla \times H = \varepsilon(E_t + \sigma E) + j, \quad \nabla \times E = -\mu H_t, \qquad (E, H)_{t<0} \equiv 0. \tag{1.1}$$

Здесь $j = j(x,t)$ — заданная функция, характеризующая плотность внешнего тока. В дальнейшем предполагается, что $j(x,t)$ соответствует точечному импульсному источнику

$$j = j^0 \delta(x - y)\, \delta(t),$$

причем $y = (y_1, y_2, y_3)$ — точка его приложения, а единичный вектор j^0 задаёт направление тока, $\delta(t)$ — дельта–функция Дирака.

Пусть ε, μ — положительные постоянные. Предположим, что $\sigma = 0$ всюду вне некоторой компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, строго содержащейся внутри шара $B := B(x^0, R)$ радиуса $R > 0$ с центром в точке x^0, и $\sigma(x)$ является гладкой функцией точки во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ (класса $\mathbf{H}^{11}(\mathbb{R}^3)$). Обозначим через $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ скорость распространения электромагнитных волн и через $\tau(x,y) := |x - y|/c$ время пробега сигнала между точками y и x. В дальнейшем предполагается, что y — фиксированная точка, расположенная вне B, а вектор j^0 направлен ортогонально линии, соединяющей точки y, x^0.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00818)

Определим множества $G = \{(x,t)|\, x \in B,\, \tau(x,y) < t < \tau(x,y)+T\}$, $\partial B = \{x|\, |x-x^0| = R\}$, $S = \{(x,t)|\, x \in \partial B,\, \tau(x,y) < t < \tau(x,y)+T\}$, $S' = \{(x,t)|\, x \in \partial B,\, -\infty < t < \tau(x,y)+T\}$, где $T > 0$, а также освещенную $\partial_- B = \{x \in \partial B|\, (x-y)\cdot n < 0\}$ и теневую $\partial_+ B = \{x \in \partial B|\, (x-y)\cdot n > 0\}$, по отношению к источнику, части ∂B. Здесь $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали на ∂B.

Пусть функции (H,E) являются решением задачи (1.1). Рассмотрим обратную задачу об определении коэффициента $\sigma(x)$ по заданной на S' функции H и её нормальной производной, т.е. по заданным функциям

$$H(x,t) = F(x,t), \quad \frac{\partial H}{\partial n} = G(x,t), \quad (x,t) \in S'. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\Lambda(\sigma_0)$ множество неотрицательных функций $\sigma(x)$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $\operatorname{supp} \sigma(x) \subset \Omega \subset B$,

2) $\|\sigma(x)\|_{\mathbf{H}^{11}(\mathbb{R}^3)} \le \sigma_0$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\sigma \in \Lambda(\sigma_0)$.

Заметим, что высокие требования на гладкость $\sigma(x)$ связаны с используемым при доказательстве методом энергетических оценок и могут быть существенно ослаблены.

Ниже будет показано, что функции $H(x,t)$, $E(x,t)$ являются обобщенными функциями, состоящими из сингулярной и регулярной частей. В частности, функция $H(x,t)$ имеет следующую структуру

$$H(x,t) = \alpha_H(x)\,\delta'(t-\tau(x,y)) + \beta_H(x)\,\delta(t-\tau(x,y)) + \overline{H}(x,t)\,\theta_0(t-\tau(x,y)),$$

где $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ для $t \ge 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$.

Задание информации (1.2) определяет функции α_H, β_H на ∂B и регулярные части функций F, G на S.

Основным содержанием настоящей работы является следующая теорема устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 1.1. *Пусть $\sigma_j(x)$, $j = 1,2$, — любые две функции принадлежащие $\Lambda(\sigma_0)$ и $\{\alpha_H^{(j)}, \beta_H^{(j)}, F^{(j)}, G^{(j)}\}$ соответствуют решению задачи (1.1) с $\sigma = \sigma_j(x)$. Тогда при фиксированных T, x^0, y найдутся положительные числа R^* ($R^* < cT/4$) и C, зависящие только от T, σ_0 и $\rho := |y-x^0|$, такие, что для всех $R \le R^*$ имеет место неравенство*

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\|^2_{\mathbf{H}^1(B(x^0,R))} \le C\Big\{\|(\alpha_H^{(1)} - \alpha_H^{(2)})\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial_+ B)} +$$
$$+\|(\beta_H^{(1)} - \beta_H^{(2)})\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial_+ B)} + \|F^{(1)} - F^{(2)}\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|G^{(1)} - G^{(2)}\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\Big\}.$$

Из теоремы 1.1, очевидно, следует теорема единственности.

Теорема 1.2. *При выполнении условий теоремы* 1.1 *существует число $R^* > 0$ такое, что всех $R \le R^*$, если отвечающие функциям $\sigma_1 \in \Lambda(\sigma_0)$, $\sigma_2 \in \Lambda(\sigma_0)$ данные обратной задачи совпадают:*

$$f^{(1)}(x,t) = f^{(2)}(x,t), \quad g^{(1)}(x,t) = g^{(2)}(x,t), \quad (x,t) \in S',$$

то $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$.

§ 2. Доказательство основной теоремы

Заменим систему уравнений (1.1) новой системой, состоящей из уравнений второго и первого порядков. Эта система является дифференциальным следствием предыдущей и имеет вид

$$\begin{gathered} c^{-2}(H_{tt}+\sigma H_t)-\Delta H-\varepsilon\nabla\sigma\times E-\nabla\times j=0,\\ \varepsilon(E_t+\sigma E)-\nabla\times H+j=0,\quad (H,E)_{t<0}\equiv 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Если $\sigma(x)=0$ для всех $x\in\mathbb{R}^3$, то решение задачи (2.1) имеет вид

$$\begin{gathered} H(x,t)=\nabla\times\left(j^0\,\frac{\delta(t-\tau(x,y))}{4\pi|x-y|}\right)=\\ =\alpha_H(x)\,\delta'(t-\tau(x,y))+\beta_H(x)\,\delta(t-\tau(x,y))+\gamma_H(x)\,\theta_0(t-\tau(x,y)), \end{gathered}$$

$$E(x,t)=\alpha_E(x)\,\delta'(t-\tau(x,y))+\beta_E(x)\,\delta(t-\tau(x,y))+\gamma_E(x)\,\theta_0(t-\tau(x,y)), \tag{2.2}$$

в котором $\alpha_H(x)$, $\beta_H(x)$, $\gamma_H(x)$ и $\alpha_E(x)$, $\beta_E(x)$, $\gamma_E(x)$ вычисляются по формулам

$$\alpha_H(x)=\frac{j^0\times\nu}{4\pi c|x-y|},\quad \beta_H(x)=\frac{j^0\times\nu}{4\pi|x-y|^2},\quad \gamma_H(x)=0,\quad \nu=\frac{x-y}{|x-y|}\,, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \alpha_E(x)=-\nabla\tau\times\alpha_H/\varepsilon,\quad \beta_E(x)=(\nabla\times\alpha_H-\nabla\tau\times\beta_H)/\varepsilon,\\ \gamma_E(x)=(\nabla\times\beta_H-\nabla\tau\times\gamma_H)/\varepsilon. \end{gathered} \tag{2.4}$$

В силу предположения, что $\sigma(x)=0$ в окрестности точки y, представление (2.2), вместе с формулами (2.3), (2.4) выполняется для $\{(x,t)\in\mathbb{R}^4|\,|x-y|<\rho-R,\ t<(2\rho-2R-|x-y|)/c\}$.

В случае, когда коэффициент проводимости отличен от тождественного нуля, представление для решения задачи (2.1) в окрестности волнового фронта $t=\tau(x,y)$ имеет более общий вид

$$\begin{gathered} H(x,t)=\alpha_H(x)\,\delta'(t-\tau(x,y))+\beta_H(x)\,\delta(t-\tau(x,y))+\overline{H}(x,t)\,\theta_0(t-\tau(x,y)),\\ E(x,t)=\alpha_E(x)\,\delta'(t-\tau(x,y))+\beta_E(x)\,\delta(t-\tau(x,y))+\overline{E}(x,t)\,\theta_0(t-\tau(x,y)). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь $\overline{H}(x,t)$, $\overline{E}(x,t)$ — регулярные функции, причем $\overline{H}(x,t)=\gamma_H(x)$ и $\overline{E}(x,t)=\gamma_E(x)$ при $t=\tau(x,y)+0$.

Уравнения для коэффициентов α, β и γ со значками H и E, входящих в это представление, получаются в результате подстановки выражений для H и E из равенств (2.5) в уравнения (2.1) и приравнивания коэффициентов при $\delta''(t-\tau(x,y))$, $\delta'(t-\tau(x,y))$ и $\delta(t-\tau(x,y))$. Они имеют вид

$$\begin{gathered} (2\nabla\tau\cdot\nabla+\Delta\tau+c^{-2}\sigma)\,\alpha_H=0,\\ \alpha_E=-\nabla\tau\times\alpha_H/\varepsilon\\ (2\nabla\tau\cdot\nabla+\Delta\tau+c^{-2}\sigma)\,\beta_H=\Delta\alpha_H+\varepsilon\nabla\sigma\times\alpha_E,\\ \beta_E=(\nabla\times\alpha_H-\nabla\tau\times\beta_H)/\varepsilon-\sigma\alpha_E,\\ (2\nabla\tau\cdot\nabla+\Delta\tau+c^{-2}\sigma)\,\gamma_H=\Delta\beta_H+\varepsilon\nabla\sigma\times\beta_E,\\ \gamma_E=(\nabla\times\beta_H-\nabla\tau\times\gamma_H)/\varepsilon-\sigma\beta_E. \end{gathered} \tag{2.6}$$

В области $t>\tau(x,y)$ функции $H(x,t)$, $E(x,t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} c^{-2}(H_{tt}+\sigma H_t)-\Delta H-\varepsilon\nabla\sigma\times E=0,\quad H|_{t=\tau(x,y)+0}=\gamma_H(x),\\ \varepsilon(E_t+\sigma E)-\nabla\times H=0,\quad E|_{t=\tau(x,y)+0}=\gamma_E(x). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Заметим, что для $x \in V(y, \rho - R) := \{x \in \mathbf{R}^3 | \, |x - y| < \rho - R\}$ функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ определяются формулами (2.3), (2.4). Достаточно очевидно, что, при сделанных предположениях о множестве $\Lambda(\sigma_0)$, функции $\alpha_H(x)$, $\beta_H(x)$, $\gamma_H(x)$, $\alpha_E(x)$, $\beta_E(x)$, $\gamma_E(x)$ являются гладкими в области G и удовлетворяют в ней оценкам

$$\|\alpha_H(x)\|_{\mathbf{H}^{11}(G)} < C, \quad \|\beta_H(x)\|_{\mathbf{H}^{9}(G)} < C, \quad \|\gamma_H(x)\|_{\mathbf{H}^{7}(G)} < C,$$
$$\|\alpha_E(x)\|_{\mathbf{H}^{11}(G)} < C, \quad \|\beta_E(x)\|_{\mathbf{H}^{9}(G)} < C, \quad \|\gamma_E(x)\|_{\mathbf{H}^{7}(G)} < C$$

с некоторой положительной постоянной $C = C(R, \sigma_0, \rho)$.

Используя метод энергетических оценок для области $t > \tau(x, y)$, аналогично работе [12], нетрудно показать, что функции $H(x, t)$, $E(x, t)$ принадлежат классам $\mathbf{H}^4(G)$ и $\mathbf{H}^3(G)$, соответственно, а следовательно, для них выполняются неравенства

$$\|H\|_{\mathbf{C}^1(G)} < C, \quad \|E\|_{\mathbf{C}(G)} < C \tag{2.8}$$

с некоторой новой положительной постоянной C.

Пусть $\sigma_j(x)$, $j = 1, 2$, — любые две функции принадлежащие $\Lambda(\sigma_0)$. Отвечающие им вектор-функции H, E, α, β, γ, F, G пометим индексом j вверху, т. е. примем для них обозначения $H^{(j)}$, $E^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$, $F^{(j)}$, $G^{(j)}$, и введём разности:

$$\widetilde{\sigma} = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \widetilde{H} = H^{(1)} - H^{(2)}, \quad \widetilde{E} = E^{(1)} - E^{(2)},$$
$$\widetilde{F} = F^{(1)} - F^{(2)}, \quad \widetilde{G} = G^{(1)} - G^{(2)},$$
$$\widetilde{\alpha} = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}, \quad \widetilde{\beta} = \beta^{(1)} - \beta^{(2)}, \quad \widetilde{\gamma} = \gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}.$$

Из равенств (2.7), (1.2) вытекают следующие соотношения для разностей

$$c^{-2}\widetilde{H}_{tt} - \Delta\widetilde{H} = P(\widetilde{H}, \widetilde{E}, \widetilde{\sigma}), \quad \widetilde{H}|_{t=\tau(x,y)+0} = \widetilde{\gamma}_H(x), \tag{2.9}$$
$$\varepsilon(\widetilde{E}_t + \sigma_1\widetilde{E}) - \nabla \times \widetilde{H} + \varepsilon\widetilde{\sigma}E^{(2)} = 0, \quad \widetilde{E}|_{t=\tau(x,y)+0} = \widetilde{\gamma}_E(x), \tag{2.10}$$
$$\widetilde{H}(x, t) = \widetilde{F}(x, t), \quad \frac{\partial\widetilde{H}}{\partial n} = \widetilde{G}(x, t), \quad (x, t) \in S.$$

в которых через $P(\widetilde{H}, \widetilde{E}, \widetilde{\sigma})$ обозначено выражение

$$P = -c^{-2}\sigma_1\widetilde{H}_t + \nabla\sigma_1 \times \widetilde{E} + \varepsilon\nabla\widetilde{\sigma} \times E^{(2)}. \tag{2.11}$$

Воспользуемся следующем следствием леммы 4.4.4 из монографии [11] (см. также лемму 1.2 работы [10]).

Лемма. *Пусть $v(x, t) \in \mathbf{H}^2(G)$ — скалярная функция и выполнены условия $\rho > R\sqrt{2}$, $\chi := 4R/(cT) < 1$. Тогда существует такая положительная постоянная C, зависящая только от R, T, что имеет место неравенство*

$$\int\limits_G \Big(v_t^2 + |\nabla v|^2 + v^2/R^2\Big)\, dx\, dt + R \int\limits_{\Sigma_0 \cup \Sigma_T} \Big((c^{-1}v_t + \nabla v \cdot \nu)^2 + |\nabla' v|^2 + v^2/R^2\Big)\, dx \le$$
$$\le \left(\frac{16R}{1 - \chi}\right)^2 \left[\int\limits_G (c^{-2}v_{tt} - \Delta v)^2\, dx\, dt + C \int\limits_S \Big(v_t^2 + |\nabla v|^2 + v^2\Big)\, dS\, dt\right],$$

в котором $\nabla' v \equiv \nabla v - (\nabla v \cdot \nu)\nu$, dS — элемент площади, $\Sigma_0 = \{(x, t) | \, x \in B, t = \tau(x, y)\}$, $\Sigma_T = \{(x, t) | \, x \in B, t = \tau(x, y) + T\}$.

Применяя эту лемму к функции $\widetilde{H}$, получаем неравенство

$$\int\limits_G \Big(|\widetilde{H}_t|^2 + |\widetilde{H}_x|^2 + |\widetilde{H}|^2/R^2\Big)\,dx\,dt + R\int\limits_B \Big(|(\widetilde{\gamma}_H)_x|^2 + |\widetilde{\gamma}_H|^2/R^2\Big)\,dx \leq$$
$$\leq \left(\frac{16R}{1-\chi}\right)^2 \left[\int\limits_G |c^{-2}\widetilde{H}_{tt} - \Delta\widetilde{H}|^2\,dx\,dt + C\int\limits_S \Big(|\widetilde{H}_t|^2 + |\widetilde{H}_x|^2 + |\widetilde{H}|^2\Big)\,dS\,dt\right], \tag{2.12}$$

в котором для $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3)$ через $|\widetilde{H}_x|^2$ обозначено выражение $\sum\limits_{i,j=1}^{3} \big((\widetilde{H}_i)_{x_j}\big)^2$.

Из теорем вложения следует, что $\|\sigma_j\|_{\mathbf{C}^1(B)} \leq C\sigma_0$, где C — некоторая постоянная, зависящая лишь от R. В силу этого, из равенств (2.9), (2.11) вытекает соотношение

$$|c^{-2}\widetilde{H}_{tt} - \Delta\widetilde{H}|^2 \leq C\sigma_0^2(|\widetilde{H}_t|^2 + |\widetilde{E}|^2) + \varepsilon^2|\nabla\widetilde{\sigma}|^2|E^{(2)}|^2$$

с постоянной C зависящей лишь от R. В дальнейшем тем же символом C часто будут обозначаться различные постоянные зависящие от R, T, σ_0 и не возрастающие при уменьшении параметра R.

Так как для функции $E^{(2)}$ имеет место оценка такого же типа (2.8) как и для E, то отсюда следует, что

$$|c^{-2}\widetilde{H}_{tt} - \Delta\widetilde{H}|^2 \leq C(|\widetilde{H}_t|^2 + |\widetilde{E}|^2 + |\nabla\widetilde{\sigma}|^2) \tag{2.13}$$

с некоторой новой постоянной C.

Интегрируя неравенство (2.13) по области G, получаем следующее неравенство

$$\int\limits_G |c^{-2}\widetilde{H}_{tt} - \Delta\widetilde{H}|^2\,dx\,dt \leq C\int\limits_G (|\widetilde{H}_t|^2 + |\widetilde{E}|^2 + |\nabla\widetilde{\sigma}|^2)\,dx\,dt. \tag{2.14}$$

В то же время из соотношений (2.10) следует, для $t > \tau(x,y)$, представление $\widetilde{E}$ через функцию $\widetilde{H}$ в виде формулы

$$\widetilde{E}(x,t) = \widetilde{\gamma}_E(x)\exp\big((\tau(x,y) - t)\,\sigma_1\big) + \int\limits_{\tau(x,y)}^{t} (\varepsilon^{-1}\nabla\times\widetilde{H} - \widetilde{\sigma}E^{(2)})\exp\big((z-t)\,\sigma_1\big)\,dz,$$

из которой вытекает, что

$$\int\limits_G |\widetilde{E}|^2\,dx\,dt \leq C\left[\int\limits_B (|\widetilde{\gamma}_E|^2 + \widetilde{\sigma}^2)\,dx + \int\limits_G |\widetilde{H}_x|^2\,dx\,dt\right].$$

Поэтому неравенство (2.14) можно переписать в виде

$$\int\limits_G |c^{-2}\widetilde{H}_{tt} - \Delta\widetilde{H}|^2\,dx\,dt \leq$$
$$\leq C\left[\int\limits_B (|\widetilde{\gamma}_E|^2 + \widetilde{\sigma}^2 + |\nabla\widetilde{\sigma}|^2)\,dx + \int\limits_G (|\widetilde{H}_t|^2 + |\widetilde{H}_x|^2)\,dx\,dt\right]. \tag{2.15}$$

При достаточно малом значении R из неравенств (2.12), (2.15) следует соотношение

$$\int\limits_B \Big(|(\widetilde{\gamma}_H)_x|^2 + |\widetilde{\gamma}_H|^2\Big)\,dx \le C\Bigg[\,R\int\limits_B (|\widetilde{\gamma}_E|^2 + \widetilde{\sigma}^2 + |\nabla\widetilde{\sigma}|^2)\,dx + \\ + \int\limits_S \Big(|\widetilde{H}_t|^2 + |\widetilde{H}_x|^2 + |\widetilde{H}|^2\Big)\,dS\,dt\Bigg], \tag{2.16}$$

в котором постоянная C зависит лишь от R, T. Последний интеграл в этой формуле вычисляется через данные обратной задачи

$$\int\limits_S \Big(|\widetilde{H}_t|^2 + |\widetilde{H}_x|^2 + |\widetilde{H}|^2\Big)\,dS\,dt = \|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}.$$

Поэтому неравенство (2.16) можно записать в виде

$$\|\widetilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\Big[\,R\big(\|\widetilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\widetilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big) + \|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\Big]. \tag{2.17}$$

Воспользуемся соотношениями, вытекающими из равенств (2.6):

$$\widetilde{\alpha}_E = -\nabla\tau \times \widetilde{\alpha}_H/\varepsilon, \quad \widetilde{\beta}_E = (\nabla \times \widetilde{\alpha}_H - \nabla\tau \times \widetilde{\beta}_H)/\varepsilon - \sigma_1\widetilde{\alpha}_E - \widetilde{\sigma}\alpha_E^{(2)}, \\ \widetilde{\gamma}_E = (\nabla \times \widetilde{\beta}_H - \nabla\tau \times \widetilde{\gamma}_H)/\varepsilon - \sigma_1\widetilde{\beta}_E - \widetilde{\sigma}\beta_E^{(2)}.$$

Из них следует, что

$$\|\widetilde{\alpha}_E\|_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\|\widetilde{\alpha}_H\|_{\mathbf{L}^2(B)}, \\ \|\widetilde{\beta}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\big(\,\|\widetilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\widetilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}\big), \\ \|\widetilde{\gamma}_E\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\big(\,\|\widetilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|\widetilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}\big). \tag{2.18}$$

Исключая $\mathbf{L}^2$-норму функции $\widetilde{\gamma}_E$ из неравенства (2.17), находим, что для достаточно малых R, справедливо неравенство

$$\|\widetilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\Big[\,R\big(\,\|\widetilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\big) + \\ + \|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\Big]. \tag{2.19}$$

Получим теперь соотношения между α_H, β_H и σ, из которых в дальнейшем выведем замыкающие неравенства. Введем в точке y полярную систему координат r, θ, φ, полагая $x = y + r\nu$, $\nu = \nu(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. Для определенности примем, что ось x_3 проходит через точки y, x^0 и вектор j^0 направлен по оси x_1, т.е. $j^0 = (1,0,0)$. Первое из равенств (2.6) приводят к соотношению

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\sigma}{2c}\right)\alpha_H = 0,$$

из которого, с учетом (2.3), легко следует формула для вычисления α_H:

$$\alpha_H(r,\theta,\varphi) = \alpha_H^0 \exp\left[-q(r,\theta,\varphi)\right], \tag{2.20}$$

в которой

$$\alpha_H^0 = \alpha_H^0(r,\theta,\varphi) = \frac{j^0 \times \nu}{4\pi c r}, \quad q(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2c}\int\limits_0^r \sigma(y + r'\nu)\,dr'.$$

Очевидно, что $\sigma(x) = 2c\, q_r$. Заметим, кроме того, что вектор α_H^0 не обращается в нуль в точках области B, так как при сделанных выше предположениях о расположении точек y, x^0 и вектора j^0 имеет место неравенство $|j^0 \times \nu| \ge \sqrt{\rho^2 - R^2}/\rho$ для всех точек области B. Уравнение для нахождения β_H можно записать в виде

$$\frac{2}{c}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\sigma}{2c}\right)\beta_H = \Delta\alpha_H - \nabla\sigma \times (\nu \times \alpha_H)/c. \tag{2.21}$$

Вычислим правую часть этого равенства, используя представление (2.20). Прежде всего, имеем

$$\Delta\alpha_H = \exp(-q(r,\theta,\varphi))\big[\Delta\alpha_H^0 - 2(\nabla q \cdot \nabla)\alpha_H^0 + \big(|\nabla q|^2 - \Delta q\big)\alpha_H^0\big],$$
$$-\nabla\sigma \times (\nu \times \alpha_H) = \exp(-q(r,\theta,\varphi))\big[(\nu \cdot \nabla\sigma)\alpha_H^0 - (\alpha_H^0 \cdot \nabla\sigma)\nu\big].$$

Для вычисления оператора Лапласа, воспользуемся его представлением в сферических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}, \quad \Delta_{\theta,\varphi} = \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Непосредственные вычисления приводят к равенствам

$$\Delta\alpha_H^0 = -\frac{2}{r^2}\,\alpha_H^0, \quad \nu \cdot \nabla\sigma = 2c\, q_{rr}.$$

Умножим левую и правую части равенства (2.21) скалярно на вектор α_H^0. Учитывая выписанные формулы, а также ортогональность векторов ν, α_H^0, тогда получим равенство

$$\begin{aligned} q_{rr} - \frac{2}{r}\, q_r - \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} q + |\nabla q|^2 - (\nabla q \cdot \nabla)\ln|\alpha_H^0|^2 - \frac{2}{r^2} = \\ = \frac{2}{c\,|\alpha_H^0|^2}\left[\alpha_H^0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + q_r\right)\beta_H\right]\exp(q(r,\theta,\varphi)). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Пусть q_j соответствует σ_j, $j = 1, 2$, и $\widetilde{q} = q_1 - q_2$. Из равенства (2.22) вытекает следующее соотношение для функции $\widetilde{q}$

$$\begin{aligned} \widetilde{q}_{rr} - \frac{2}{r}\,\widetilde{q}_r - \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\widetilde{q} + \nabla\widetilde{q} \cdot (\nabla q_1 + \nabla q_2) - (\nabla\widetilde{q} \cdot \nabla)\ln|\alpha_H^0|^2 = \\ = \frac{2}{c\,|\alpha_H^0|^2}\left\{\left[\alpha_H^0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + (q_1)_r\right)\widetilde{\beta}_H + \widetilde{q}_r(\alpha_H^0 \cdot \beta_H^{(2)})\right]\exp(q_1(r,\theta,\varphi)) + \right. \\ \left. + \widetilde{q}\, Q\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + (q_1)_r\right)\beta_H^{(2)}\right\}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

в котором

$$Q = \int_0^1 \exp[q_2(1-s) + q_1 s]\, ds.$$

Пусть $r > \rho - R$. Обозначим через S_r пересечение сферы радиуса r с центром в точке y с областью B, а через B_r часть области B, заключенную внутри этой сферы. Заметим, что $\widetilde{q} = 0$ для $x \in \partial_- B$ и $\widetilde{q}_r = 0$ для $x \in \partial B$.

Пусть

$$J_r(\widetilde{q}) = \int\limits_{S(r)} \left[\Big(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial\theta}\Big)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Big(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial\varphi}\Big)^2\right] r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$2\widetilde{q}_r r^2 \sin\theta \left(\widetilde{q}_{rr} - \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\widetilde{q}\right) \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial}{\partial r}\left\{\left[\left(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial\varphi}\right)^2\right] r^2\sin\theta\right\} -$$
$$-2\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial\theta}\right)\sin\theta\right] - \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\widetilde{q}}{\partial\varphi}\right)\right] - 2\widetilde{q}_r r\sin\theta.$$

Умножая уравнение (2.23) на $2\widetilde{q}_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, интегрируя его по области B и используя, что $\widetilde{q}_r = 0$ для $x \in \partial B$, нетрудно установить оценку

$$J_r(\widetilde{q}) \le C\|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B_r)}, \quad r \in [\rho - R, \rho + R] \tag{2.24}$$

в которой постоянная C зависит только от ρ, R, σ_0.

Из формулы (2.20) следует, что

$$\widetilde{\alpha}_H = \widetilde{q}\, Q_1 \alpha_H^0, \quad Q_1 = \int_0^1 \exp[q_2(s-1) - q_1 s]\, ds.$$

Отсюда находим, что

$$\|\widetilde{\alpha}_H\|_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\|\widetilde{q}\|_{\mathbf{H}^1(B)}. \tag{2.25}$$

Из полученных неравенств (2.25), (2.24) вытекает оценка:

$$\|\widetilde{\alpha}_H\|_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\|\widetilde{\beta}_H\|_{\mathbf{H}^1(B)}. \tag{2.26}$$

Дифференцируя равенство (2.23) по r и используя, что $\widetilde{q}_{rr} = 0$ для $x \in \partial B$, получим аналогичную оценку для функции $\widetilde{\sigma} = 2c\,\widetilde{q}_r$

$$J_r(\widetilde{\sigma}) \le C\|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(B_r)}, \quad r \in [\rho - R, \rho + R]$$

с некоторой новой постоянной C, зависящей от тех же параметров. Из полученной оценки вытекает неравенство:

$$\|\widetilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le RC\|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}. \tag{2.27}$$

Подчеркнем, что постоянная C не возрастает при уменьшении R.

Оценим теперь $\|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(B)}$ через $\mathbf{L}^2(B)$-норму оператора Лапласа от $\widetilde{\beta}_H$. Воспользуемся для этого приемом книги [13]. Для $\mathbf{C}^2(B)$-гладкой скалярной функции $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, справедливо равенство

$$(\Delta u)^2 = \sum_{i,j=1}^3 u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} = \sum_{i,j=1}^3 \left[(u_{x_i} u_{x_j x_j})_{x_i} - (u_{x_i} u_{x_i x_j})_{x_j} + u^2_{x_i x_j}\right],$$

из которого интегрированием по B следует неравенство

$$\int_B \sum_{i,j=1}^3 u^2_{x_i x_j}\, dx = \int_B (\Delta u)^2\, dx - \int_{\partial B} \left[(\Delta u)(\nabla u \cdot n) - (\nabla |\nabla u|^2 \cdot n)/2\right] dS.$$

Из этого неравенства легко вытекает оценка

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C[\|\Delta u\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \|u\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} + \|u_x\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)} + \|u_{xx}\|^2_{\mathbf{L}^2(\partial B)}],$$

в которой постоянная C зависит лишь от R. Применяя последнее неравенство к функции $\widetilde{\beta}_H$, находим, что

$$\|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C\biggl[\|\Delta\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} + \int\limits_{\partial B} \bigl(|\widetilde{\beta}_H|^2 + |(\widetilde{\beta}_H)_x|^2 + |(\widetilde{\beta}_H)_{xx}|^2\bigr)\,dS\biggr]. \tag{2.28}$$

Оценим каждое из слагаемых, стоящих в правой части этого неравенства. Предпоследнее из равенств (2.6) приводит к соотношению

$$(2\nabla\tau\cdot\nabla + \Delta\tau + c^{-2}\sigma_1)\,\widetilde{\gamma}_H + c^{-2}\widetilde{\sigma}\gamma_H^{(2)} = \Delta\widetilde{\beta}_H + \varepsilon\nabla\sigma_1\times\widetilde{\beta}_E + \varepsilon\nabla\widetilde{\sigma}\times\widetilde{\beta}_E^{(2)},$$

из которого, с учетом оценки (2.18) для $\widetilde{\beta}_E$, следует неравенство

$$\|\Delta\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} \le C\bigl(\|\widetilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)}\bigr). \tag{2.29}$$

Во втором слагаемом правой части неравенства (2.28), интегрирование по ∂B фактически вырождается в интегрирование по $\partial_+ B$, так как $\widetilde{\beta}_H = 0$ на $\partial_- B$ вместе с производными первого и второго порядков. Покажем, что последний интеграл может быть оценен через некоторые нормы функций α_H, β_H на $\partial_+ B$. Из равенств (2.6) следует, что вне области B имеют место соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\widetilde{\alpha}_H = 0, \quad \frac{2}{c}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\widetilde{\beta}_H = \Delta\widetilde{\alpha}_H. \tag{2.30}$$

Уравнение $\partial_+ B$ имеет вид $r = r(\theta) = \rho\cos\theta + \sqrt{R^2 - \rho^2\sin^2\theta}$. Обозначим граничные значения $\widetilde{\alpha}_H$, $\widetilde{\beta}_H$ через $\widetilde{\alpha}_H(r(\theta),\theta,\varphi)$, $\widetilde{\beta}_H(r(\theta),\theta,\varphi)$. Интегрируя уравнения (2.30) находим, что в конической области $K = \{(r,\theta,\varphi)\,|\, r \ge r(\theta), \sin\theta \le R/\rho\}$ функции $\widetilde{\alpha}_H$, $\widetilde{\beta}_H$ имеют вид

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_H(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{r}\bigl(r(\theta)\,\widetilde{\alpha}_H(r(\theta),\theta,\varphi)\bigr),\\ \widetilde{\beta}_H(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{r}\bigl(r(\theta)\,\widetilde{\beta}_H(r(\theta),\theta,\varphi)\bigr) -\\ -\frac{c}{2r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r(\theta)}\right)&\Delta_{\theta,\varphi}\bigl(r(\theta)\,\widetilde{\alpha}_H(r(\theta),\theta,\varphi)\bigr).\end{aligned} \tag{2.31}$$

Введем новую систему сферических координат r', θ', φ равенством $x = x^0 + r'\nu(\theta',\varphi)$ и перейдем в равенствах (2.31) от координат r, θ к новым координатам r', θ'. Тогда из найденных формул нетрудно вывести оценку

$$\int\limits_{\partial B} \bigl(|\widetilde{\beta}_H|^2 + |(\widetilde{\beta}_H)_x|^2 + |(\widetilde{\beta}_H)_{xx}|^2\bigr)\,dS \le C\bigl(\|\widetilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial_+ B)} + \|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial_+ B)}\bigr). \tag{2.32}$$

Из оценок (2.29), (2.32) следует, что неравенство (2.28) может быть переписано в следующем виде

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C\bigl(&\|\widetilde{\gamma}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{L}^2(B)} +\\ &+\|\widetilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial_+ B)} + \|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial_+ B)}\bigr).\end{aligned}$$

Воспользуемся теперь неравенствами (2.19), (2.26). Тогда при достаточно малых значениях параметра R, предыдущее неравенство приводит к следующей оценке

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(B)} \le C\bigl(&\|\widetilde{\sigma}\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} + \|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S)} +\\ &+\|\widetilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial_+ B)} + \|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial_+ B)}\bigr),\end{aligned}$$

комбинируя которую с оценкой (2.27), находим, что для достаточно малых R справедливо неравенство

$$\|\sigma\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \le C\big(\|\widetilde{F}\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|\widetilde{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(S)} + \|\widetilde{\alpha}_H\|^2_{\mathbf{H}^3(\partial_+ B)} + \|\widetilde{\beta}_H\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial_+ B)}\big).$$

Последнее неравенство и доказывает справедливость теоремы.

Настоящая статья была написана во время визита в Университет г. Киото. Автор благодарит пригласившего его профессора Ю. Исо (Yuusuke Iso) за предоставленные комфортные условия для научной работы, способствовавшие быстрейшему завершению этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* О единственности решения задачи электроразведки // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69, N 6. С. 797–800.
2. *Cagniard L.* Basic theory of magneto–telluric method of geophysical prospecting // Geophysics. 1953. V. 37. P. 605–635.
3. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
4. *Романов В. Г., Кабанихин С. И.* Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
5. *Рамм А. Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
6. *Ola P., Päivärinta L., Somersalo E.* An inverse boundary value problem in electrodynamics // Duke Math. J. 1993. V. 70. P. 617–653.
7. *Ola P., Somersalo E.* Electromagnetic inverse problems and generalized Sömmerfeld potential // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 560. P. 1129–1145.
8. *Yakhno V. G.* Multidimensional inverse problems in ray formulation for hyperbolic equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. V. 6, N 4. P. 373–386.
9. *Белишев М. И., Гласман А. К.* Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 2. С. 131–187.
10. *Романов В. Г.* Об оценке устойчивости решения обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, N 2. С. 436–449.
11. *Romanov V. G.* Investigation Methods for Inverse Problems. Utrecht: VSP, 2002.
12. *Romanov V. G. and Yamamoto M.* Multidimensional inverse hyperbolic problem with impulse input and single boundary measurement // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1999. V. 7, N 6. P. 573–588.
13. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Романов Владимир Гаврилович
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
romanov@math.nsc.ru