УДК 517.95

К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

К. Б. Сабитов, А. Н. Кучкарова

§ 1. Постановка задачи. Краткий обзор основных результатов

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = F(x,y), \tag{1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y)$, $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $F(x,y)$ — заданные функции, в области D, ограниченной простой кривой Жордана Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(a_1,0)$ и $A_2(a_2,0)$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, характеристиками A_1C_1, C_1E, EC_2, C_2A_2 уравнения (1) при $y < 0$, где $E(e,0)$, $a_1 < e < a_2$, $C_1(\frac{a_1+e}{2}, y_{c_1})$, $y_{c_1} < 0$ и $C_2(\frac{a_2+e}{2}, y_{c_2})$, $y_{c_2} < 0$.

Обозначим через $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{y < 0 \wedge x < e\}$ и $D_2 = D \cap \{y < 0 \wedge x > e\}$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$K(y) \in C(\overline{D_0}) \wedge C(\overline{D_i}) \wedge C^2(\overline{D_i} \setminus \overline{EA_i}),$$

$$A(x,y),\ B(x,y) \in C(\overline{D_0}) \wedge C(\overline{D_i}) \wedge C^1(\overline{D_i} \setminus \overline{EA_i}),$$

$$C(x,y) \in C(\overline{D_0}) \wedge C(\overline{D_i}),$$

$$F(x,y) \in C(D_0) \wedge L(D_0) \wedge C(D_i) \wedge L(D_i),\ i = 1,2.$$

Для уравнения (1) в области D рассмотрим задачу Геллерстедта, исследование которой представляется важным в теоретическом и прикладном аспектах [1–13].

Задача G. *Найти функцию u(x,y), удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \tag{3}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Gamma},$$

$$u(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{A_1C_1} \cup \overline{A_2C_2},$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(A_1) = \psi(A_1)$ и $\varphi(A_2) = \psi(A_2)$.

Впервые задача G поставлена С. Геллерстедтом [1, 2] и была изучена для уравнения (1) в случае $K(y) = y^m$, $m > 0$ — нечетное число, $A = B = F = 0$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ, грант № 22, и РФФИ, грант № 02–01–97901

$C(x,y) = \text{const} = \lambda$ при некоторых ограничениях геометрического характера на кривую Γ и параметры m и λ.

При $K(y) = \operatorname{sgn} y$, $A = B = C = F = 0$ задача G подробно исследована А. В. Бицадзе [5]. Причем в этой работе единственность решения задачи G доказана на основании принципа экстремума при произвольной кривой Γ, но при некоторых ограничениях на поведение производных u_x и u_y в малой окрестности точки E.

В случае $K(y) = \operatorname{sgn} y|y|^m$, $m = \text{const} > 0$, $A = B = C = F = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ задача G рассмотрена в [6], где показана единственность решения методом экстремума при произвольной кривой Γ, но при условии, что

$$\nu_+(x) = \nu_-(x),\ -1 < x < 1,$$

где

$$\nu_+(x) = \lim_{y\to 0+0} u_y(x,y),\ \nu_-(x) = \lim_{\substack{y\to 0-0\\ x\neq e}} u_y(x,y),$$

и при условии

$$\lim_{x\to e-0} \nu_-(x) = \lim_{x\to e+0} \nu_-(x).$$

Отметим также работу [9], где на основании принципа экстремума доказывается единственность решения задачи G при произвольной кривой Γ для уравнения

$$L_\alpha u = y u_{yy} + u_{xx} + \alpha u_y = 0,\ \frac{1}{2} \leq \alpha < 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1,$$

при условии, что пределы $\lim\limits_{x\to e-0} \nu_-(x)$, $\lim\limits_{x\to e+0} \nu_-(x)$ существуют, и

$$\nu_+(x) = \nu_-(x),\ -1 < x < e,\ e < x < 1,$$

где

$$\nu_-(x) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^\alpha u_y(x,y),\ \nu_+(x) = \lim_{y\to 0+0} y^\alpha u_y(x,y).$$

В работе [10] для уравнения (1) при $K(y) = \operatorname{sgn} y|y|^m$, $m > 0$, $A = B = C = F = 0$ доказана справедливость принципа экстремума. Из которого следует единственность решения задачи G, когда Γ — произвольная кривая и производные u_x и u_y решения могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в окрестности точек A_1, E и A_2. Следует отметить, что здесь при доказательстве принципа экстремума используется явные формулы решений задач Хольмгрена и Дарбу в областях эллиптичности и гиперболичности соответственно. Существование решения задачи доказано для случая, когда кривая Γ совпадает с нормальной кривой Γ_0 :

$$x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1,\ y \geq 0.$$

Таким образом, из приведенных результатов следует, что принцип экстремума, из которого вытекает единственность решения задачи G для уравнения (1), установлен при $K(y) = \operatorname{sgn} y|y|^m$, $m \geq 0$ и $A = B = C = 0$. Существование в этом случае получено при нормальной кривой Γ_0.

Интерес к доказательству справедливости принципа экстремума для уравнения (1) объясняется тем, что, во-первых, из него сразу же следует единственность решения задачи G без каких-либо ограничений на кривую Γ в довольно широком классе регулярных решений уравнения (1), а в свою очередь теорема единственности играет решающую роль при доказательстве существования решения

задачи G методом интегральных уравнений, во-вторых, он позволяет построить альтернирующий процесс типа Шварца [14] для решения задачи G при довольно общих предположениях относительно кривой Γ при подходе к осям координат ; в-третьих, принцип экстремума находит применение при построении спектральной теории задачи G и исследовании качественных свойств решений уравнения (1).

В данной работе установлены экстремальные свойства решений уравнения (1) в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области D, и приводятся применения этих свойств при исследовании задачи G.

Отметим, что принцип максимума решения задачи G для уравнения (1) здесь устанавливается впервые. Основная трудность заключалась в том, что надо было показать, что максимум решения $u(x,y)$ по замкнутой области $\overline{D}$ не может достигаться в точке E, когда производные u_x и u_y в точках A_1, E, A_2 могут иметь интегрируемую особенность. Этот факт удалось доказать благодаря леммам о знаке производной по нормали решения вырождающихся эллиптических и гиперболических уравнений второго порядка [15, 16].

Во втором параграфе работы в области D_0 доказаны утверждения о знаке $u_y(x,y)$ в точке максимума и вблизи точки максимума решения уравнения (1) на линии вырождения.

В § 3 для уравнения (1) в областях гиперболичности D_1 и D_2 при некоторых условиях показано, что максимум решения $u(x,y)$ по $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ достигается только на отрезке $\overline{A_1E}$ и $\overline{EA_2}$ соответственно.

В § 4 для уравнения (1) в смешанной области D при определенных условиях доказано, что максимум решения $u(x,y)$ по $\overline{D}$ достигается на эллиптической границе Γ. Из этого утверждения следуют единственность решения задачи G при произвольной кривой Γ, положительность решений уравнения (1) в области D и аналог неравенства Чаплыгина.

В § 5 приведены примеры модельных уравнений смешанного типа

$$\operatorname{sgn} y\,|y|^n u_{xx} + u_{yy} + a_0|y|^{\frac{n-1}{2}} u_x = F(x,y),\ n > 0,\ a_0 = \text{const},$$

$$\operatorname{sgn} y\, u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = F(x,y),\ \lambda = \text{const},$$

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y\, u_{yy} - \lambda u = F(x,y),\ \lambda = \text{const},$$

которые был объектом исследования многих авторов [12, 13] при изучении задач Трикоми. На этих примерах показано применение изложенной здесь теории.

§ 2. Экстремальные свойства решений вырождающихся эллиптических уравнений

Лемма 1. *Пусть*
1) *в области* D_0 *коэффициенты уравнения* (1) *ограничены и* $C(x,y) \le 0$;
2) $u(x,y) \in C(\overline{D_0}) \wedge C^1(D_0 \cup A_1E \cup EA_2) \wedge C^2(D_0)$, $Lu \equiv F \ge 0 (\le 0)$ *в* D_0;
3) $\max\limits_{\overline{D_0}} u(x,y) = u(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D_0}} u(x,y) = u(Q) < 0)$.
Тогда, если $Q = (x_0, 0)$, $a_1 < x_0 < a_2$, $x_0 \ne e$, *то*

$$\lim_{y\to 0+0} u_y(x_0, y) < 0\ (> 0).$$

Доказательство этой леммы приведено в [17, 13].

Лемма 2. *Пусть*

1) *выполнены условия* 1)–3) *леммы* 1;

2) *функция* $u(x, y)$ *имеет изолированный положительный максимум (отрицательный минимум)* $u(Q)$ *в точке* E;

3) *в малой окрестности точки* E: а) *функция* $K(y)u_x^2 + u_y^2$ *суммируема;* б) *производные* A_x *и* B_y *непрерывны вплоть до границы;* в) $2C - A_x - B_y \leq 0,\ B(x, 0) \geq 0$.

Тогда в любой выколотой окрестности $\dot{U} \subset \partial D_0$ *точки* E *найдется точка* $Q_1 = (x_1, 0) \in \dot{U}$ *такая, что*

$$\lim_{y \to 0+0} u_y(x_1, y) < 0 \ (> 0). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть точка $Q = E$, т.е. $u(Q) \equiv u(E)$. Допустим, что существует выколотая окрестность $\dot{U}_1$ точки E такая, что для всех $P(x, 0) \in \dot{U}_1 \cap \partial D_0$

$$u_y(x, 0 + 0) \geq 0.$$

Пусть $r \in (0, u(Q))$. Число r возьмем настолько близким к числу $u(Q)$, чтобы кривая γ, составленная из линии уровня $u(x, y) = r$, целиком лежала в U_1 и для всех точек (x, y), принадлежащих области G, ограниченной кривой γ и отрезком A_1A_2, $u(x, y) \geq r$. Существование такой кривой γ следует из того известного факта из теории обобщенных аналитических функций, что решение эллиптического уравнения (1) при $C(x, y) \leq 0$ в рассматриваемой области D_0 может иметь нуль лишь конечного порядка. Подробное доказательство этого факта приведено в статье [18] для эллиптического уравнения (1) при $A = B = C = F = 0$. В случае уравнения (1) аналогично доказывается существование такой кривой γ, так как при $C(x, y) \leq 0$ уравнение (1) введением новой неизвестной функции можно свести к специальному виду, для которого справедлива теорема о представлении решения, полученная в работах [19, гл. 6; 20, гл. 3]. Не теряя общности рассуждений, можно считать кривую γ кусочно–гладкой. Обозначим через B_1 и B_2 точки пересечения кривой γ с отрезком A_1A_2.

В области G рассмотрим функцию $v(x, y) = u(x, y) - r$, которая является решением уравнения

$$Lv = K(y)v_{xx} + v_{yy} + Av_x + Bv_y + Cv = F(x, y) - rC \tag{5}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$v(x, y) = 0,\ (x, y) \in \gamma, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v(x, 0 + 0)}{\partial y} \geq 0, \quad x \in B_1E \cup EB_2. \tag{7}$$

Интегрируя тождество

$$2vLv = \left(2Kvv_x + Av^2\right)_x + \left(2vv_y + Bv^2\right)_y - 2(Kv_x^2 + v_y^2) + v^2\,(2C - A_x - B_y)$$

по области G с учетом условий (5), (6) получим

$$\int\limits_{B_1E} \left[2v(x, 0)v_y(x, 0) + B(x, 0)v^2(x, 0)\right]dx +$$

$$+ \int\limits_{EB_2} \left[2v(x, 0)v_y(x, 0) + B(x, 0)v^2(x, 0)\right]dx +$$

$$+\int\limits_G \left[2(K(y)v_x^2+v_y^2)-(2C-A_x-B_y)\,v^2\right]dxdy+$$

$$+2\int\limits_G [F(x,y)-rC]vdxdy=0. \tag{8}$$

Отметим, что справедливость равенства (8) можно обосновать по другому исходя из работы [14]. Поскольку $v(x,y)\geq 0$ в G, то в силу наложенных условий на коэффициенты и неравенство (7) все интегралы в левой части равенства (8) неотрицательны. Тогда из (8) следует, что $v(x,y)\equiv 0$ в $\overline{G}$, то есть $u(x,y)\equiv$ const в $\overline{G}$, что противоречит условию изолированности максимума в точке E. Следовательно, в любой окрестности $\dot{U}\subset\partial D_0$ точки E существует точка $Q_1\in\dot{U}$ такая, что справедливо неравенство (4).

§ 3. Экстремальные свойства решений в области гиперболичности

В областях D_1 и D_2 перейдем в характеристические координаты (ξ,η) :

$$\xi=x+\int\limits_0^y\sqrt{-K(t)}dt,\quad \eta=x-\int\limits_0^y\sqrt{-K(t)}dt.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$L_0u\equiv u_{\xi\eta}+au_\xi+bu_\eta+cu=f(\xi,\eta), \tag{9}$$

где

$$a(\xi,\eta)=\frac{1}{4K}\left(A+B\sqrt{-K}-\frac{K'}{2\sqrt{-K}}\right),\ c(\xi,\eta)=\frac{C}{4K},$$

$$b(\xi,\eta)=\frac{1}{4K}\left(A-B\sqrt{-K}+\frac{K'}{2\sqrt{-K}}\right),\ f(\xi,\eta)=\frac{F}{4K}.$$

Область D_1 отобразится в область Δ_1, ограниченную отрезками $A_1E(\eta=\xi)$, $EC_1(\eta=e)$ и $C_1A_1(\xi=a_1)$, а область D_2 отобразится в область Δ_2, ограниченную отрезками $EA_2(\eta=\xi)$, $A_2C_2(\eta=a_2)$ и $C_2E(\xi=e)$. При этом за образами точек E, A_1, A_2, C_1 и C_2 оставлены те же обозначения прообразов.

Пусть $\alpha=a\beta$, $\beta=\exp(\int bd\xi)$, $\alpha^*=b\beta^*$, $\beta^*=\exp(\int ad\eta)$. Функции $a(\xi,\eta)$, $a_\xi(\xi,\eta)$, $b(\xi,\eta)$, $c(\xi,\eta)$ непрерывны в $\overline{\Delta}_1$, кроме, быть может, отрезка $\overline{A_1E}$ и удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h=a_\xi+ab-c\geq 0 \\ \alpha(a_1,\eta)+\int\limits_{a_1}^{\xi}\beta(t,\eta)c(t,\eta)dt>0,\ a_1<\xi<\eta\leq e, \end{cases} \tag{A_1}$$

$$\alpha(\xi,\eta)-\int\limits_{a_1}^{\xi}\beta(t,\eta)|h(t,\eta)|dt>0,\ a_1<\xi<\eta\leq e. \tag{B_1}$$

Функции $b(\xi,\eta)$, $b_\eta(\xi,\eta)$, $a(\xi,\eta)$, $c(\xi,\eta)$ непрерывны в $\overline{\Delta}_2$, кроме, быть может, отрезка $\overline{EA_2}$ и удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h^* = b_\eta + ab - c \geq 0 \\ \alpha^*(\xi, a_2) - \int\limits_\eta^{a_2} \beta^*(\xi,t)c(\xi,t)dt < 0, \; e \leq \xi < \eta < a_2, \end{cases} \tag{A_2}$$

$$\alpha^*(\xi,\eta) + \int\limits_\eta^{a_2} \beta^*(\xi,t)|h^*(\xi,t)|dt < 0, \; e \leq \xi < \eta < a_2. \tag{B_2}$$

Замечание 1. Отметим, что в условиях (A_k) и (B_k), $k = 1,2$, интегральные неравенства могут быть нестрогими (т.е. ≥ 0 для условий (A_1) и (B_1) , и ≤ 0 для условий (A_2) и (B_2), но в этом случае на каждом отрезке $[a_1, \xi]$ характеристики $\eta = \mathrm{const}$ и отрезке $[\eta, a_2]$ характеристики $\xi = \mathrm{const}$, множество точек, в которых $h(t,\eta) = 0$ и $h^*(\xi,t) = 0$ соответственно, имеет меру нуль.

Предполагается, что правая часть $f(\xi,\eta)$ непрерывна в $\Delta_i, i = 1,2$, интегрируема по ξ на каждом отрезке $[a_1, \xi_0]$ характеристики $\eta = \eta_0$, $a_1 < \xi_0 < \eta_0 \leq e$ и интегрируема по η на каждом отрезке $[\eta_0, a_2\,]$ характеристики $\xi = \xi_0$, $e \leq \xi_0 < \eta_0 < a_2$.

Определение 1. *Регулярным в* Δ_i, $i = 1,2$, *решением* уравнения (9) назовем функцию $u(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям:
1) $u(\xi,\eta) \in C(\overline{\Delta}_i) \wedge C^1(\Delta_i)$, $u_{\xi\eta} \in C(\Delta_i)$;
2) $L_0 u(\xi,\eta) \equiv f(\xi,\eta)$, $(\xi,\eta) \in \Delta_i$;
3) производная u_η (u_ξ) непрерывна на $\overline{\Delta}_1 \backslash \overline{A_1E}$ $(\overline{\Delta}_2 \backslash \overline{A_2E})$.

Лемма 3. *Пусть*

1) *коэффициенты и правая часть уравнения* (9) *в области* Δ_i, $i = 1,2$, *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (A_i);

2) $f(\xi,\eta) \leq 0$ (≥ 0) *в* Δ_i;

3) $u(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ_i *решение уравнения* (9), *равное нулю на характеристике* A_iC_i;

4) $\max\limits_{\overline{\Delta}_i} u(\xi,\eta) = u(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}_i} u(\xi,\eta) = u(Q) < 0)$.

Тогда максимум (минимум) $u(Q)$ *достигается только на отрезке* $\overline{A_iE} \backslash A_i$.

Доказательство. Пусть для определенности $i = 1$. Рассмотрим в области Δ_1 тождество
$$\beta L_0(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\beta u_\eta + \alpha u) - \beta h u = f\beta$$
и проинтегрируем его по отрезку NM прямой $\eta = \mathrm{const}$, принадлежащему Δ_1. Тогда получим
$$(\beta u_\eta + \alpha u)\Big|_N^M = \int\limits_{NM} \beta h u d\xi + \int\limits_{NM} \beta f d\xi. \tag{10}$$
В равенстве (10) отрезок NM может принадлежать не только области Δ_1, но и $\overline{\Delta}_1 \setminus \overline{A_1E}$. Допустим, что $\max\limits_{\overline{\Delta}_1} u(\xi,\eta) = u(Q) > 0$ достигается в точке $Q \in \Delta_1 \cup C_1E$. Из точки Q проведем отрезок $\eta = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой

A_1C_1 в точке P. В равенстве (10) в качестве отрезка NM возьмем PQ. Тогда будем иметь

$$\beta(Q)u_\eta(Q) = \int\limits_{PQ} \beta hud\xi + \int\limits_{PQ} \beta fd\xi - \alpha(Q)u(Q) =$$

$$= \int\limits_{PQ} \beta fd\xi + \int\limits_{PQ} \beta h\,[u - u(Q)]\,d\xi + u(Q)\int\limits_{PQ} \beta hd\xi - \alpha(Q)u(Q) =$$

$$= \int\limits_{PQ} \beta fd\xi + \int\limits_{PQ} \beta h\,[u - u(Q)]\,d\xi - u(Q)\left[\alpha(P) + \int\limits_{PQ} \beta cd\xi\right].$$

Отсюда в силу условия (A_1), $f \le 0$ в Δ_1 и $u(Q) > 0$ следует, что $u_\eta(Q) < 0$. Но это противоречит тому, что в точке $Q \in \Delta_1 \cup C_1E$ производная $u_\eta(Q) \ge 0$.

Замечание 2. Принцип экстремума в области Δ_1 для уравнения (9) впервые был установлен в [17] при условиях: $u_\eta(a_1,\eta) \le 0$ (≥ 0), $u(\xi,\eta) \in C^1(\overline{\Delta}_1) \wedge C^2(\Delta_1)$, $L_0u \le 0\,(\ge 0)$ в $\overline{\Delta}_1 \backslash \overline{A_1E}$, a, a_ξ, b, $c \in C(\overline{\Delta}_1)$, $a \ge 0$, $h \ge 0$, $c \ge 0$ в $\overline{\Delta}_1$.

Лемма 4. *Пусть*

1) *коэффициенты уравнения* (9) *в области* Δ_i, $i = 1, 2$, *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (B_i);

2) $f(\xi,\eta) \equiv 0$ *в* Δ_i;

3) $u(\xi,\eta)$ *— регулярное в* Δ_i *решение уравнения* (9), *равное нулю на характеристике* A_iC_i;

4) $\max\limits_{\overline{\Delta}_i} |u(\xi,\eta)| = |u(Q)| > 0$.

Тогда максимум $|u(Q)|$ *достигается только на отрезке* $\overline{A_iE} \backslash A_i$.

Доказательство. Пусть здесь $i = 2$. В области Δ_2 рассмотрим тождество

$$\beta^* L_0(u) = \frac{\partial}{\partial\eta}\,(\beta^* u_\xi + \alpha_* u) - \beta^* h^* u \equiv 0$$

и интегрируем его по отрезку NM прямой $\xi = \text{const}$, принадлежащему Δ_2. Тогда получим

$$(\beta^* u_\xi + \alpha^* u)\Big|_N^M = \int\limits_{NM} \beta^* h^* ud\eta. \tag{11}$$

Предположим, что $\max\limits_{\overline{\Delta}_2} |u(\xi,\eta)| = |u(Q)| > 0$ достигается в точке $Q \in \Delta_2 \cup EC_2$. В силу линейности и однородности уравнения (9) (в этом случае $f(\xi,\eta) \equiv 0$), не теряя общности, можно считать, что $u(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{\Delta}_2} u(\xi,\eta) = u(Q) > 0$ и $|u(\xi,\eta)| \le u(Q)$ при всех $(\xi,\eta) \in \overline{\Delta}_2$. Из точки Q проведем отрезок $\xi = \text{const}$ до пересечения с характеристикой A_2C_2 в точке P. Обозначим через E_1 множество точек отрезка QP, в которых $h^* \ge 0$, а через E_2 — множество точек отрезка QP, где $h^* < 0$. Тогда, рассуждая аналогично доказательству леммы 3, из равенства (11), получим

$$-\beta^*(Q)u_\xi(Q) = \int\limits_{QP} \beta^* h^* ud\eta + \alpha^*(Q)u(Q) =$$

$$= \int\limits_{E_1} \beta^* h^*\,[u - u(Q)]\,d\eta + \int\limits_{E_2} \beta^* h^*\,[u + u(Q)]\,d\eta + u(Q)\left[\alpha^*(Q) + \int\limits_{QP} \beta^* |h^*| d\eta\right].$$

Отсюда в силу условия (B_2) и $u(Q) > 0$ следует, что $u_\xi(Q) > 0$. Но это противоречит тому, что в точке $Q \in \Delta_2 \cup EC_2$ производная $u_\xi(Q) \le 0$.

§ 4. Экстремальные свойства решений в смешанной области

Определение 2. *Регулярным в D решением* уравнения (1) назовем функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и для которой, кроме того, производная u_η (u_ξ) непрерывна на множестве $\overline{D}_1 \setminus \overline{A_1E}$ $(\overline{D}_2 \setminus \overline{A_2E})$.

Теорема 1. *Пусть*

1) $C(x, y) \le 0$ *в* D_0, $F(x, y) \ge 0\,(\le 0)$ *в* $D_0 \cup D_1 \cup D_2$;

2) *выполнено условие* 3) *леммы* 2;

3) *коэффициенты уравнения* (1) *в областях* D_1 *и* D_2 *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют, соответственно, условиям* (A_1) *и* (A_2);

4) $u(x, y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (1), *равное нулю на характеристиках* A_1C_1 *и* A_2C_2 ;

5) $\max\limits_{\overline{D}} u(x, y) = u(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}} u(x, y) = u(Q) < 0)$.

Тогда максимум (минимум) $u(Q)$ *достигается только на кривой* Γ.

Теорема 2. *Пусть*

1) $C(x, y) \le 0$ *в* D_0, $F(x, y) \equiv 0$ *в* $D_0 \cup D_1 \cup D_2$;

2) *выполнено условие* 3) *леммы* 2;

3) *коэффициенты уравнения* (1) *в областях* D_1 *и* D_2 *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют, соответственно, условиям* (B_1) *и* (B_2);

4) $u(x, y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (1), *равное нулю на характеристиках* A_1C_1 *и* A_2C_2;

5) $\max\limits_{\overline{D}} |u(x, y)| = |u(Q)| > 0$.

Тогда максимум $|u(Q)|$ *достигается на кривой* Γ.

Доказательство теорем 1 и 2 проводится на основании лемм 1–4. Для примера приведем доказательство теоремы 2.

Пусть $\max\limits_{\overline{D}} |u(x, y)| = |u(Q)| > 0$. В силу линейности и однородности уравнения (1) (в этом случае $F(x, y) \equiv 0$) можно считать, что $u(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{D}} u(x, y) = u(Q) > 0$ и $|u(x, y)| \le u(Q)$. Поскольку выполнены условия леммы 4, то точка $Q \in \overline{D}_0$. В силу внутреннего принципа экстремума для эллиптических уравнений, если $u(x, y) \not\equiv \text{const}$ в D_0, то точка $Q \notin D_0$. Тогда $Q \in \Gamma \cup A_1E \cup EA_2 \cup E$. Пусть $Q \in A_1E$, т.е. $Q = (x_0, 0)$, $a_1 < x_0 < e$. В этой точке из леммы 4 следует, что $u_y(x_0, 0 - 0) \ge 0$. А последнее согласно лемме 1 противоречит неравенству $u_y(x_0, 0 + 0) < 0$. Если точка $Q \in EA_2$, то, рассуждая аналогично, получим противоречие.

Следовательно, $Q \in \Gamma \cup E$. Пусть $Q \notin \Gamma$, тогда $Q \equiv E$. В этом случае E является единственной точкой изолированного глобального положительного максимума функции $u(x, y)$. Линии уровня $u(x, y) = r$ функции $u(x, y)$, где $r \in (0, u(Q))$, в малой окрестности точки E будут располагаться в области D_0 в виде концентрических линий вокруг точки E с концами на $A_1E \cup EA_2$. Докажем это. Допустим, что не все линии уровня $u(x, y) = r$ функции $u(x, y)$ в малой окрестности E будут располагаться в области D_0 в виде концентрических линий вокруг точки E с концами на $A_1E \cup EA_2$, т.е. в малой окрестности точки E на оси $y = 0$ существуют точки x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2 < e$ и $u(x_1, 0) = u(x_2, 0)$. Тогда возможна линия уровня $u(x, y) = u(x_2, 0) = d > 0$. Функция $u(x, 0)$ в некоторой точке $x_0 \in (x_1, x_2)$

имеет положительный максимум $u(x_0, 0) = \max\limits_{x_1 \le x \le x_2} u(x, 0)$. Пусть G_+ — область, ограниченная отрезком E_1E_2 оси $y = 0$, $E_1 = (x_1, 0)$, $E_2 = (x_2, 0)$, и линией уровня $u(x, y) = d$, такая, что при всех $(x, y) \in \overline{G_+} : u(x, y) \ge d$. В силу принципа экстремума для эллиптических уравнений $\max\limits_{\overline{G_+}} u(x, y) = u(x_0, 0)$. Далее из точки E_2 проведем характеристику уравнения (1) до пересечения с характеристикой A_1C_1 в точке C и рассмотрим область G_-, ограниченную линиями A_1C, CE_2, и E_2A_1. По лемме 4 $\max\limits_{\overline{G_-}} u(x, y) > 0$ достигается на отрезке $\overline{A_1E_2}$. Не теряя общности рассуждений можно считать, что этот максимум достигается в точке $(x_0, 0)$. По лемме 1 в точке $(x_0, 0) : u_y(x_0, 0 + 0) < 0$, а с другой стороны на основании леммы 4: $u_y(x_0, 0 - 0) \ge 0$. Получено противоречие. Отсюда следует, что в малой окрестности точки E функция $u(x, 0)$ при $x \to e$ монотонно возрастает к значению $u(Q)$.

Пусть $[b_1, e)$, где $a_1 < b_1 < e$, промежуток оси $y = 0$, где $u(x, 0)$ возрастает при $x \to e - 0$. Покажем, что $u_y(x, 0) \ge 0$ при всех $x \in [b_1, e)$. Пусть ξ — любая точка из $[b_1, e)$. Из точки $K = (\xi, 0)$ опустим перпендикуляр с концом в точке $N \in D_1$, через точку N проведем характеристику уравнения (1) до пересечения с характеристикой A_1C_1 в точке M. Обозначим через H область, ограниченную характеристиками NM, MA_1 и отрезками A_1K, KN. Аналогично лемме 4 можно показать, что $\max\limits_{\overline{H}} u(x, y) > 0$ достигается только на отрезке $\overline{A_1K}$, а именно в точке K [15]. Тогда в этой точке $u_y(\xi, 0 - 0) \ge 0$. Следовательно, в силу произвольности точки $\xi \in [b_1, e)$ $\quad u_y(x, 0 - 0) = u_y(x, 0 + 0) \ge 0$ на $[b_1, e)$. Аналогично показывается, что существует отрезок $(e, b_2]$, где $e < b_2 < a_2$, такой, что $u_y(x, 0 - 0) \ge 0$ при всех $x \in (e, b_2]$. Тогда $u_y(x, 0 + 0) = u_y(x, 0 - 0) \ge 0$ при всех $x \in (b_1, e) \cup (e, b_2)$. С другой стороны, в силу леммы 2 на (b_1, e) или на (e, b_2) найдется точка x_1 такая, что $u_y(x_1, 0) < 0$, что противоречит неравенству $u_y(x, 0) \ge 0$ на $[b_1, e) \cup (e, b_2]$. Следовательно, точка $Q \in \Gamma$.

Следствие 1. а) *Если выполнены условия теоремы* 1 *и* $F(x, y) \equiv 0$, *то для всех* $(x, y) \in \overline{D}$

$$\min_{\overline{\Gamma}} u(x, y) \le u(x, y) \le \max_{\overline{\Gamma}} u(x, y).$$

б) *Если выполнены условия теоремы* 2, *то для любой точки* $(x, y) \in \overline{D}$

$$|u(x, y)| \le \max_{\overline{\Gamma}} |u(x, y)|.$$

в) *Если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *или* 2 *и в классе регулярных в* D *решений уравнения* (1) *существует решение задачи* G, *то оно единственно.*

Следствие 2. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *и функция* $u(x, y)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 (*кроме условия* 5)) *и* $F(x, y) \le 0$ (≥ 0) *на множестве* $D_0 \cup D_1 \cup D_2$. *Тогда*

а) *если* $u \ge 0$ (≤ 0) *на* Γ, *то* $u(x, y) \ge 0$ (≤ 0) *в* D;

б) *если* $u > 0$ (< 0) *на* Γ, *то* $u > 0$ (< 0) *в* D_0.

Доказательство. а) Пусть существует точка $Q_1 \in \overline{D} \setminus \Gamma$ такая, что $u(Q_1) < 0$. Тогда $\min\limits_{\overline{D}} u(x, y) = u(Q) < 0$ и, поэтому выполнены все условия принципа минимума. В силу теоремы 1 точка $Q \in \Gamma$. А это противоречит тому, что $u \ge 0$ на Γ.

б) Допустим, что $\min\limits_{\overline{D_0}} u(x, y) = u(Q) = 0$ и $Q \in D_0$. Тогда в силу принципа Хопфа [21, 22] функция $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_0}$, что противоречит $u > 0$ на Γ.

Следствие 3. (Аналог неравенства Чаплыгина) *Пусть*
1) *коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 1;
2) $Lu \le Lv$ *в области* $D_0 \cup D_1 \cup D_2$;
3) $u = v$ *на* A_1C_1 *и* $u = v$ *на* A_2C_2;
4) $u \ge v$ *на* Γ.
Тогда $u \ge v$ *в области* D.

Доказательство. Обозначим через $z = v - u$. Тогда будем иметь

$$Lz = Lv - Lu \ge 0 \quad \text{в} \quad D_0 \cup D_1 \cup D_2,$$

$$z|_{A_1C_1} = z|_{A_2C_2} = 0,\ z|_\Gamma = (v-u)|_\Gamma \le 0.$$

Тогда в силу следствия 2 а) $z \le 0$ в D или $v \le u$ в области D.

Замечание 3. В работах [23, 24] доказан аналог неравенства Чаплыгина для задачи Трикоми исходя из явных формул решений задач Хольмгрена и Дарбу.

§ 5. Примеры

Пример 1. В области D (см. § 1) рассмотрим уравнение вида

$$\operatorname{sgn} y\,|y|^{\,n} u_{xx} + u_{yy} + a_0|y|^{\frac{n-1}{2}} u_x = F(x,y), \tag{12}$$

где $n > 0$, $a_0 = \text{const}$.

В областях D_1 и D_2 перейдем к характеристическим координатам (ξ, η):

$$\xi = x - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}}.$$

Тогда уравнение (12) примет вид

$$L_1 u \equiv u_{\xi\eta} + \frac{p_1}{\eta-\xi}u_\xi - \frac{p_2}{\eta-\xi}u_\eta = f(\xi,\eta) \tag{13}$$

где

$$f(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{n+2}\Big)^{\frac{2n}{n+2}}(\eta-\xi)^{-\frac{2n}{n+2}}F(x,y),$$

$$p_1 = \frac{n-2a_0}{2(n+2)},\ p_2 = \frac{n+2a_0}{2(n+2)},$$

а области D_1 и D_2 отобразятся в области Δ_1 и Δ_2 соответственно.

Проверим условия теоремы 1 для уравнения (12). Для этого достаточно проверить условия (A_1) и (A_2) для уравнения (13) в областях Δ_1 и Δ_2 соответственно.

Вычислим

$$a(\xi,\eta) = \frac{p_1}{\eta-\xi},\ b(\xi,\eta) = -\frac{p_2}{\eta-\xi},\ c(\xi,\eta) \equiv 0,$$

$$\beta(\xi,\eta) = (\eta-\xi)^{-p_2},\ \alpha = p_1(\eta-\xi)^{p_2-1},\ h = \frac{p_1(1-p_2)}{(\eta-\xi)^2}.$$

Отсюда нетрудно видеть, что функции a, a_ξ и b непрерывны в $\overline{\Delta_1}\backslash\overline{A_1E}$ и при $a_0 < \dfrac{n}{2}$ удовлетворяют условию (A_1).

Вычислим

$$\beta^*(\xi,\eta) = (\eta-\xi)^{p_1},\ \alpha^* = b\beta^* = -p_2(\eta-\xi)^{p_1-1},$$

$$h^* = \frac{p_2(1-p_1)}{(\eta-\xi)^2}.$$

Легко заметить, что функции b, b_η и a непрерывны в $\overline{\Delta_2} \setminus \overline{A_2E}$ и при $a_0 > -\frac{n}{2}$ удовлетворяют условию (A_2). Тем самым доказана следующая

Теорема 3. *Если $n > 0$, $|a_0| < \frac{n}{2}$, $F(x,y) \geq 0\,(\leq 0)$ в $D_0 \cup D_1 \cup D_2$ и $u(x,y)$ — регулярное в D решение уравнения (12), равное нулю на характеристиках A_1C_1 и A_2C_2, то положительный (отрицательный) максимум (минимум) функции $u(x,y)$ достигается только на Γ.*

Пример 2. Рассмотрим уравнение Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y\, u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = F(x,y). \tag{14}$$

В области D перейдем к характеристическим координатам (ξ,η) :

$$\xi = x + y,\ \eta = x - y.$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$[1-\operatorname{sgn}(\eta-\xi)](u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}) - 2[1+\operatorname{sgn}(\eta-\xi)]u_{\xi\eta} - \lambda u = F, \tag{17}$$

а области D, D_0, D_1 и D_2 соответственно отображаются в области Δ, Δ_0, Δ_1 и Δ_2.

Заметим, что коэффициенты уравнения (17) в областях Δ_1 и Δ_2 не удовлетворяют условиям (A_1), (A_2) и (B_1), (B_2) ни при одном значении параметра λ. Однако при некоторых ограничениях на λ справедлива следующая

Теорема 4. *Если*

1) $0 > \lambda > -\lambda_1 = -\pi^2(t_2-t_1)^{-2}$, *где* $t_2 = \max\limits_{\overline{\Delta}}(\xi-\eta) = \max\limits_{\overline{D}} 2y,\ t_1 = \min\limits_{\overline{\Delta}}(\xi-\eta) = \min\limits_{\overline{D}} 2y$;

2) $F(x,y) \geq 0 (\leq 0)$ *на* $D_0 \cup D_1 \cup D_2$;

3) $u(x,y)$ — *регулярное в области D решение уравнения* (14), *равное нулю на характеристиках A_1C_1 и A_2C_2*;

4) $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}} u < 0)$,

то $\max\limits_{\overline{D}} u \exp(-g)$ $\left(\min\limits_{\overline{D}} u \exp(-g)\right)$ *достигается на кривой* Γ.

Если

1) $|\lambda| < \lambda_1$ *и* $F(x,y) \equiv 0$;

2) $u(x,y)$ — *регулярное в D решение уравнения* (14), *равное нулю на A_1C_1 и A_2C_2*;

3) $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| > 0$,

то $\max\limits_{\overline{D}} |u \exp(-g)|$ *достигается на* Γ, *где g — достаточно гладкая функция, которая будет определена ниже.*

Доказательство. Пусть $u(\xi,\eta)$ — регулярное в Δ решение уравнения (15), равное нулю на A_1C_1 и A_2C_2. Введем новую функцию

$$v(\xi,\eta) = u(\xi,\eta)\exp[-g(\xi,\eta)], \tag{16}$$

которая является решением уравнений

$$v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + g_\xi v_\xi + g_\eta v_\eta + v\left(g_{\xi\xi} + g_{\eta\eta} + g_\xi^2 + g_\eta^2 - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{F(x,y)}{2},\ \xi > \eta,$$

$$v_{\xi\eta} + g_\eta v_\xi + g_\xi v_\eta + v\left(g_{\xi\eta} + g_\xi g_\eta + \frac{\lambda}{4}\right) = -\frac{F(x,y)}{4},\ \xi < \eta. \tag{17}$$

Теперь покажем, что при соответствующем подборе функции g для уравнений (17) справедливы теоремы 1 и 2. Для этого достаточно, чтобы функция g удовлетворяла условиям

$$g_{\xi\xi} + g_{\eta\eta} + g_\xi^2 + g_\eta^2 - \frac{\lambda}{2} \le 0 \quad \text{в} \quad \Delta_0, \tag{18}$$

$$g_\eta \exp g - \int\limits_{a_1}^{\xi} |h(t,\eta)| \exp[g(t,\eta)]dt > 0 \quad \text{в} \quad \Delta_1, \tag{19}$$

$$g_\xi \exp g + \int\limits_{\eta}^{a_2} |h^*(\xi,t,)| \exp[g(\xi,t)]dt < 0 \quad \text{в} \quad \Delta_2. \tag{20}$$

Поскольку функции $h(\xi,\eta)$ и $h^*(\xi,\eta)$ являются инвариантами уравнения (15) относительно преобразования (16), то для уравнений (15) и (17) $h(\xi,\eta) = h^*(\xi,\eta) = -\lambda/4$.

Пусть $\lambda < 0$. В этом случае $h(\xi,\eta) > 0$ в $\overline{\Delta}_1$, $h^*(\xi,\eta) > 0$ в $\overline{\Delta}_2$ и, поэтому условия (19), (20) равносильны неравенствам

$$g_\eta(a_1,\eta)\exp[g(a_1,\eta)] + \int\limits_{a_1}^{\xi} \exp[g(t,\eta)]\left(g_{t\eta} + g_t g_\eta + \frac{\lambda}{4}\right)dt > 0, \tag{21}$$

$$g_\xi(\xi,a_2)\exp[g(\xi,a_2)] - \int\limits_{\eta}^{a_2} \exp[g(\xi,t)]\left(g_{\xi t} + g_\xi g_t + \frac{\lambda}{4}\right)dt < 0. \tag{22}$$

Функцию $g(\xi,\eta)$ будем искать в виде $g(\xi,\eta) = \mu(\xi-\eta)$, где μ — функция от $\xi - \eta$.

Тогда соответственно условия (18), (21) и (22) принимают вид

$$\mu'' + \mu'^2 \le \lambda/4, \tag{23}$$

$$-\mu' e^{\mu(a_1-\eta)} - \int\limits_{a_1}^{\xi} (\mu'' + \mu'^2 - \frac{\lambda}{4})e^{\mu(t-\eta)}dt > 0, \tag{24}$$

$$\mu' e^{\mu(\xi-a_2)} + \int\limits_{\eta}^{a_2} (\mu'' + \mu'^2 - \frac{\lambda}{4})e^{\mu(\xi-t)}dt < 0. \tag{25}$$

При $\mu'' + \mu'^2 - \lambda/4 \le 0$ и $\mu' < 0$ неравенства (23), (24) и (25) всегда имеют место.

Таким образом, для неизвестной функции $\mu(t) = \mu(\xi-\eta)$ получим уравнение Риккати

$$\begin{cases} \mu''(t) + \mu'^2(t) = -d^2, t_1 \le t \le t_2, \\ \qquad \mu'(t) < 0,\ d = \sqrt{|\lambda|}/2. \end{cases} \tag{26}$$

Решая систему (26) находим $\mu'(t) = d\,tg[(k-t)d]$, где k — постоянная из промежутка

$$t_2 - \frac{\pi}{2d} < k < t_1.$$

Отсюда ясно, что функция $\mu'(t)$, удовлетворяющая системе (26) существует, если

$$0 < d < \pi/2(t_2 - t_1).$$

Из последнего неравенства находим условие $\lambda > -\lambda_1$ относительно параметра λ, при которых существует функция $g(\xi,\eta)$, удовлетворяющая условиям (18), (21) и (22).

Пусть $\lambda > 0$. Функцию $g(\xi,\eta)$ так же будем искать в виде $g(\xi,\eta) = \mu(\xi-\eta)$. В этом случае условия (18), (19) и (20) соответственно принимают вид

$$\mu'' + \mu'^2 \leq \lambda/4, \quad \text{в} \quad \Delta_0, \tag{27}$$

$$-\mu' e^{\mu(\xi-\eta)} - \frac{\lambda}{4}\int\limits_{a_1}^{\xi} e^{\mu(t-\eta)}dt > 0 \quad \text{в} \quad \Delta_1, \tag{28}$$

$$\mu' e^{\mu(\xi-\eta)} + \frac{\lambda}{4}\int\limits_{\eta}^{a_2} e^{\mu(\xi-t)}dt < 0 \quad \text{в} \quad \Delta_2. \tag{29}$$

Левая часть (28) при фиксированном $\eta \in (a_1, e]$ и $\mu''+\mu'^2+\lambda/4 \leq 0$ возрастает. Поэтому для выполнения (28) достаточно, чтобы

$$\mu'' + \mu'^2 + \lambda/4 \leq 0 \text{ и } \mu'(a_1-\eta) < 0. \tag{30}$$

При фиксированном $\xi \in [e, a_2)$ и $\mu''+\mu'^2+\lambda/4 \leq 0$ левая часть неравенства (29) также возрастает. Тогда для справедливости (29) достаточно, чтобы

$$\mu'' + \mu'^2 + \lambda/4 \leq 0 \text{ и } \mu'(\xi-a_2) < 0. \tag{31}$$

Исходя из (27), (30) и (31) получим аналогичное условие (26) для нахождения функции $\mu(t) = \mu(\xi-\eta)$. Как и выше находим условие $\lambda < \lambda_1$ относительно параметра λ, при которых существует функция $g(\xi,\eta)$, удовлетворяющая условиям (18), (19) и (20).

Тем самым теорема доказана.

Из этой теоремы следует, в частности, теорема единственности решения задачи G для уравнения (14) в классе регулярных в D решений при всех λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| < \lambda_1$.

Пример 3. В области D (см. § 1) рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y\, u_{yy} - \lambda u = F(x,y), \tag{32}$$

где λ — вещественная постоянная.

Теорема 5. *Если*

1) $0 < \lambda < \lambda_1$, $F(x,y) \geq 0$ *в* D_0 *и* $F(x,y) \leq 0$ *в* $D_1 \cup D_2$;

2) $u(x,y)$ *— регулярное решение уравнения* (32) *в области* D, *равное нулю на характеристиках* $A_1C_1 \cup A_2C_2$;

3) $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) > 0$,

то $\max\limits_{\overline{D}}[u \exp(-g)]$ *достигается на* Γ.

Если

1) $|\lambda| < \lambda_1$ *и* $F(x,y) \equiv 0$;

2) $u(x,y)$ *— регулярное в* D *решение уравнения* (32), *равное нулю на* $A_1C_1 \cup A_2C_2$;

3) $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| > 0,$

то $\max\limits_{\overline{D}} |u\ \exp(-g)|$ *достигается на кривой* Γ, *где* λ_1 *и* g *определены в теореме* 4.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte. These pour le doctorat. Uppsala, 1935.

2. *Gellerstedt S.* Quelgues problemes mixtes pour l'equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Ark. Math. Astr. Fysik. 1937. 26 A, N 3.

3. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.

4. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамике. М.: Наука, 1981.

5. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1953. Т. 41.

6. *Волкодавов В. Ф., Лернер М. Е.* К вопросу о единственности решения задачи Геллерстедта // Дифференциальные уравнения: Тр. пед. ин-тов РСФСР. Рязань, 1975. Вып. 6. С. 55–56.

7. *Хе Кан Чер.* О задаче Геллерстедта // Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск, 1976. N 2. С. 139–145.

8. *Хе Кан Чер.* О задаче Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1976. N 26. С. 134–141.

9. *Хе Кан Чер.* О единственности решения задачи Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, N 6. С. 1426–1429.

10. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1985.

11. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа на плоскости и в пространстве. Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1978.

12. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Моск. ун-т, 1988.

13. *Сабитов К. Б.* Некоторые вопросы качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа. Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. М., 1991.

14. *Сабитов К. Б.* Альтернирующий метод типа Шварца в теории уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322, N 3. С. 476–480.

15. *Сабитов К. Б.* Новые экстремальные свойства решений одного класса гиперболических систем // Спектральная теория дифференциальных операторов и смежные вопросы: Тр. междунар. конф. Стерлитамак, 1998. С. 116–122.

16. *Сабитов К. Б., Мукминов Ф. Х.* О знаке производной по конормали вблизи точки максимума решения вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, N 6. С. 844–847.

17. *Agmon S., Nirenberg L., Protter M. N.* A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic–hyperbolic type // Comm. Appl. Math. 1953. V. 6, N 4. P. 455–470.

18. *Сабитов К. Б., Капустин Н. Ю.* О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, N 1. С. 60–68.

19. *Берс Л., Джон Ф.,Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.

20. *Векуа В. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.

21. *Hopf E. A.* A remark on linear elliptic differential equations of second order // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. P. 791–793.

22. *Александров А. Д.* Исследование о принципе максимума // Изв. вузов. Математика. 1958. N 5. С. 126–157.

23. *Майоров И. В.* Распространение теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах на уравнения смешанного типа // Уч. зап. Волгоградского гос. пед. ин-та, Волгоград. 1959. С. 75–80.

24. *Майоров И. В.* К вопросу о принципе максимума и его следствиях для уравнений смешанного типа // Волж. мат. сб. Куйбышев. 1963. Вып. 1. С. 145–155.

Сабитов Камиль Басирович, Кучкарова Айгуль Наилевна
Россия, Стерлитамак,
Стерлитамакский государственный педагогический институт,
Стерлитамакский филиал АН Республики Башкортостан
sabitov@sgpi.bashedu.ru, kuchkarova@mail.rb.ru