УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ

А. П. Солдатов

Рассмотрим уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$(\mathrm{sgn}\ y)\, u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в смешанной области D комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченной при $y \geq 0$ ($y \leq 0$) ляпуновскими дугами σ (γ) с общими концами в точках $z = k$, $k = 0, 1$. Эллиптическую и гиперболическую части D обозначим соответственно через D^+ и D^-. Пусть θ_k означает внутренний угол области D^+ в точке $z = k$, а q_k — тангенс угла наклона касательной γ в этой точке к характеристике $x + y = 0$. Предполагается, что эти углы положительны, а кривая γ некасательна к семейству характеристик $x \pm y = \mathrm{const}$. В частности, $0 < \theta_k \leq \pi,\ 0 < q_0 < 1 < q_1$ и область D^- лежит внутри характеристического треугольника с основанием $J = \ \{0 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$.

Под решением уравнения в области D^- класса $C^n,\ \ n \geq 0$, понимается функция, представимая формулой Даламбера

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y) \tag{2}$$

с некоторыми $f, g \in C^n(0, 1)$. Ясно, что это решение лежит в $C^n\left(\overline{D^-} \setminus \{0, 1\}\right)$. При $n = 1$ функции f и g могут быть определены через данные Коши $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0)$ из соотношений $f + g = \tau,\ f' - g' = \nu$. В случае $f, g \in C^2(0, 1)$ формула (2) дает классическое решение уравнения (1) в области D^-.

Пусть $n = (n_1, n_2)$ означает единичную внешнюю нормаль к границе D. Под конормалью условимся понимать вектор $\tilde{n}$ с компонентами $\tilde{n}_1 = (\mathrm{sgn}\, y) n_1, \quad \tilde{n}_2 = n_2$. По условию кривая γ не имеет характеристических направлений, так что функции $n_1 \pm n_2$ всюду отличны от нуля на γ.

Рассмотрим для уравнения (1) в области D четыре «канонических» задачи K, отвечающих различным комбинациям краевых условий Дирихле и Неймана на дугах σ и γ — задачу Дирихле D, задачу Неймана N и две смешанные задачи DN и ND :

$$\begin{array}{ll} u\big|_{\sigma\cup\gamma} = f, & K = D, \\ u\big|_{\gamma} = f, \ \ \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{n}}\Big|_{\gamma} = g, & K = DN, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sigma} = g, \ \ u\big|_{\gamma} = f, & K = ND, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{n}}\Big|_{\sigma\cup\gamma} = g & K = N. \end{array} \tag{3}$$

Решение $u(x, y)$ ищется в классе $C(\overline{D} \setminus \{0, 1\}) \cap C^1(D)$ в случае задачи Дирихле и в классе $C^1(\overline{D} \setminus \{0, 1\})$ в остальных случаях. Кроме того, вблизи угловых точек

Работа поддержана грантом РФФИ № 02-01-00623

$z = 0$ и $z = 1$ области D функция $u(z) = u(x,y)$, $z = x + iy$, подчиняется дополнительному требованию

$$u(z) = O(1)|z|^{\lambda_0}|1-z|^{\lambda_1}, \quad \lambda_0\lambda_1 < 0. \tag{4}$$

Каждую из этих задач можно переформулировать по отношению к системе Лаврентьева–Бицадзе

$$(\operatorname{sgn} y)u_x = v_y, \quad -u_y = v_x. \tag{5}$$

Обозначим через $U(D)$ и $V(D)$ классы функций $u \in C^1(D)$ и $v \in C(D) \cap \{v_x, (\operatorname{sgn} y)v_y \in C(D)\}$, удовлетворяющих уравнению (1) в $D^{\pm}$, соответственно. Если $u \in U(D)$, то функция

$$v_0(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y dx + (\operatorname{sgn} y)u_x dy \in V(D)$$

и, наоборот, $v \in V(D)$ влечет

$$u_0(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\operatorname{sgn} y)v_y dx - v_x dy \in U(D).$$

В обоих случаях $u + iv$ есть решение системы (4).

Функции v_0 и u_0 естественно назвать сопряженными к соответственно u и v. Операцию сопряжения $u \to v_0$ и $v \to u_0$ можно также строить следующим образом.

Пусть, например, $u \in U(D)$ и $v(x,y)$, $(x,y) \in D^+$, означает сопряженную гармоническую функцию, которая в силу условий Коши–Римана принадлежит классу $C^1\left(D^+ \cup J\right)$. Продолжим ее в D до функции v_0, решая в D^- задачу Коши с данными $\tau(x) = v(x,0)$ и $\nu(x) = -v_y(x,+0)$. В результате получим функцию $v = v_0 \in V(D)$, сопряженную к u в смешанной области D.

В силу (5) производная $\partial u/\partial\tilde{n}$ по конормали $\tilde{n} = (\pm n_1, n_2)$ на границе совпадает с касательной производной $v' = v'_s$ по длине дуги от сопряженной функции v. В соответствии с условием (4) предположим, что функция $g(s)$ ведет себя как $O(1)|z|^{\lambda_0-1}|1-z|^{\lambda_1-1}$. Тогда в силу неравенства $\lambda_0\lambda_1 < 0$ можно выбрать первообразную функции g (обозначим ее также f), удовлетворяющую аналогичной (4) оценке на границе. В результате по отношению к решению $u + iv$ системы (5) из класса $u \in U(D)$, $v \in V(D)$, все четыре задачи можем переписать в единой форме соответствующего краевого условия Римана–Гильберта

$$\begin{gathered} u\big|_{\sigma\cup\gamma} = f, \\ u\big|_{\sigma} = f, \quad v\big|_{\gamma} = f, \\ v\big|_{\sigma} = f, \quad u\big|_{\gamma} = f, \\ v\big|_{\sigma\cup\gamma} = f. \end{gathered} \tag{6}$$

Данные канонические случаи общей задачи Римана–Гильберта были подробно изучены в [1]. На этом пути для исходных задач получаются в определенном смысле окончательные результаты. По отношению к задаче Дирихле эти результаты были ранее анонсированы в [2, 3].

Отметим попутно, что каждую из задач K можно ставить и в классе $V(D)$. Однако эти постановки не вносят принципиально ничего нового: при переходе от $V(D)$ к $U(D)$ по указанной выше формуле (6) краевые условия Дирихле и Неймана меняются местами, так что задачи $K = D,\ DN,\ ND, N,$ переходят соответственно в задачи $K = N,\ ND,\ DN,\ D$.

Рассмотрения для всех четырех задач K будем вести параллельно при дополнительном предположении гладкости $\sigma, \gamma \in C^{1,\mu+0}$ дуг, составляющих границу ∂D смешанной области. Решение $u(x,y)$ задачи K будем искать в весовом классе Гельдера $C^{1,\mu}_{\lambda}(\overline{D};\ 0,1)$ (относительно обозначений см. [4]).

Для двух решений $u \in C^{1,\mu}_{\lambda}$, $\tilde u \in C^{1,\mu}_{-\lambda+0}$ уравнения (1) справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\sigma\cup\gamma} \left(u\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde n} - \tilde u \frac{\partial u}{\partial \tilde n}\right) ds = 0.$$

Отсюда следует, что функции $f \in C^{1,\mu}_{\lambda}$ и $g \in C^{0,\mu}_{\lambda-1}$ на соответствующих дугах, составляющие правую часть неоднородной задачи K, должны удовлетворять необходимым условиям ортогональности

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\sigma\cup\gamma} f\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde n} ds = 0, && K = D,\\
&\int_{\sigma} f\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde n} ds - \int\limits_{\gamma} g\tilde u ds = 0, && K = DN,\\
&\int\limits_{\sigma} g\tilde u ds - \int\limits_{\gamma} f\frac{\partial \tilde u}{\partial \tilde n} ds = 0, && K = ND,\\
&\int\limits_{\sigma\cup\gamma} g\tilde u ds = 0, && K = N,
\end{aligned} \tag{7}$$

к решениям $\tilde u$ однородной задачи K в классе $C^{1,\mu}_{-\lambda+0}$.

Для формулировки основного результата рассмотрим на прямой множество $\Delta_k,\ \ k = 0,1$, составленное из корней уравнения

$$\sin(2\theta\delta) = e\,\mathrm{th}\,(|\ln q|\delta), \quad e\varepsilon\cos 2\theta\delta > 0, \tag{8}$$

где индекс k в обозначениях опущен и знаки e, ε принимают значения $e = \varepsilon = -1$; $e = -1,\ \varepsilon = 1$; $\ e = 1,\ \varepsilon = -1$; $\ e = \varepsilon = 1$ соответственно $K = D$, DN, ND, N. Для единообразия к Δ присоединяется и точка $\delta = 0$.

Очевидно, множество Δ_k симметрично относительно $\delta = 0$ и на полуоси $\delta > 0$ состоит из последовательности точек $0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots$ вида

$$2\theta\delta_n = 2\pi n + \begin{cases} -\pi/2 + \alpha_n, & e = \varepsilon = -1,\\ -\pi/2 - \alpha_n, & e = -1, \varepsilon = 1,\\ -3\pi/2 + \alpha_n, & e = 1, \varepsilon = -1,\\ -3\pi/2 - \alpha_n, & e = \varepsilon = 1,\end{cases}$$

где $0 < \alpha_n < \pi/2$ и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Конкретное значение α_n зависит, конечно, от выбора e и ε. В особом случае $e = \varepsilon = 1, \quad |\ln q| < 2\theta$ здесь предполагается, что нумерация δ_n начинается с $n = 2$.

Рассмотрим нечетную целочисленную функцию $æ(\delta)$, $\delta \notin \Delta$, определяемую условиями

$$
\begin{gathered}
æ(\delta+0) - æ(\delta-0) = 1, \quad \delta \in \Delta, \quad \delta \neq 0, \\
æ(0 \pm 0) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } e = \varepsilon = 1, \ |\ln q| < 2\theta, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Заметим, что согласно обозначениям (8) особый случай $e = \varepsilon = 1$, $|\ln q| < 2\theta$ возможен только для задачи $K = N$.

Обозначим X_λ класс всех решений $u(x,y)$ однородной задачи K, удовлетворяющих условию (4).

Теорема 1. (a) *Для любого $u \in X_\lambda$ найдутся такие числа $\delta_k \in \Delta_k$, заключенные между λ_k и 0 и одновременно в нуль не обращающиеся, и аналитическая функция $C(z)$ с производной $C'(z) \in C^{\mu}_{\nu-0}(\overline{D}^+; 0,1)$, $\nu \geq -1$, что $u(x,y) = \operatorname{Re}[C(z) z^{\delta_0}(1-z)^{\delta_1}]$, причем $\nu_k > -1$, $C(k) \neq 0$ при $\delta_k \neq 0$ и $\nu_k = -1$ при $\delta_k = 0$, $k = 0,1$.*

(b) *Пусть $\lambda_k \notin \Delta_k$, $k = 0,1$ и $\lambda_0\lambda_1 < 0$. Тогда любое решение (1), (4) задачи K с правой частью $f \in C^{1,\mu}_{\lambda}$, $g \in C^{0,\mu}_{\lambda-1}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}_{\lambda}(\overline{D};\ 0,1)$. Условия ортогональности (7) необходимы и достаточны для разрешимости задачи K в этом классе, пространство $X_\lambda \subseteq C^{1,\mu}_{\lambda}$ конечномерно и индекс задачи $æ = \dim X_\lambda - \dim X_{-\lambda}$ равен*

$$
æ = -æ_0(\lambda_0) - æ_1(\lambda_1).
$$

(c) *Если в условиях (b) дуга $\gamma \in C^{2,\mu+0}$ и функции $f \in C^{2,\mu}_{\lambda}$, $g \in C^{1,\mu}_{\lambda-1}$, то решение соответствующей задачи K принадлежит классу $C^{2,\mu}_{\lambda}(\overline{D}^-;\ 0,1)$ и является, таким образом, классическим решением уравнения (1) в области D.*

Доказательство. Пусть решение $u(x,y) \in C\left(\overline{D} \setminus \{0,1\}\right)$ уравнения (1) удовлетворяет условию (4). Покажем, что в области D^+ оно совпадает с реальной частью некоторой аналитической функции $\phi(z)$, принадлежащей весовому пространству Харди $H^p_{\lambda-0}(D^+;\ 0,1)$ (т.е. пространству $H^p_{\lambda-\varepsilon}(D^+;\ 0,1)$ для любого $\varepsilon > 0$).

Заменяя λ на $\lambda - \varepsilon$, не ограничивая общности можно считать, что граничная функция $u^+ \in L^p_\lambda(\partial D^+;\ 0,1)$ и число $\theta_k\lambda_k \neq 0 \ (\mathrm{mod}\, \pi)$, $k = 0,1$. Выберем на ∂D^+ непрерывные функции a, b так, чтобы коэффициент $b \equiv 0$ в окрестности точек $z = 0$, $z = 1$ и индекс задачи Римана–Гильберта

$$
\operatorname{Re}(a - ib)\phi\big|_{\partial D^+} = f
$$

в классе $H^p_\lambda(D^+; 0,1)$ был равен нулю. Согласно теореме 2 из [4] подобный выбор возможен. Тогда эта задача однозначно разрешима в указанном классе, так что найдется ее решение $\phi_0 \in H^p_\lambda$ с правой частью u^+. Переходя от u к разности $u - \operatorname{Re}\phi_0$, можем, таким образом, считать, что граничная функция u^+ тождественно равна нулю в окрестности точек $z = 0$, $z = 1$. В этом случае остается воспользоваться конформным отображением, выпрямляющим границу в окрестности точек $z = 0$, $z = 1$, и принципом аналитического продолжения.

Итак, любое решение (1), (4) можно дополнить до решения $u + iv \in H^p_{\lambda-0}(D;\ 0,1)$ системы (5), где $\lambda_0\lambda_1 < 0$. Как показано выше, краевое условие задачи K по отношению к $u + iv$ можно записать в виде (6). Поэтому остается к $u + iv$ применить теорему 3 из [1], на основании которой приходим к справедливости всех утверждений теоремы.

Совершенно аналогично теорема 4 из [1] приводит к следующему дополнению теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть кривая γ такова, что любая прямая $cx+y=0$, $c(1-x)+y=0$ при $0<c<1$ пересекает ее ровно в одной внутренней точке.*

Тогда для каждой из однородных задач D, DN найдутся последовательности ее решений $u_n^j(x,y)$, $j=0,1$, $n=1,2,\ldots$, удовлетворяющих условию теоремы 1(a) *с $\delta_0=\delta_{0,n}$, $\delta_1=-\delta_{1,n-1}$ при $j=0$ и $\delta_0=-\delta_{0,n-1}$, $\delta_1=\delta_{1,n}$ при $j=1$.*

При этом любое решение $u\in X_\lambda$ этой задачи, где $\lambda_0\lambda_1<0$ и $\delta_{0,m-1}<|\lambda_0|<\delta_{0,m}$, $\delta_{0,n-1}<|\lambda_1|<\delta_{1,n}$, является линейной комбинацией функций u_s^j, где $\min(m,n)<s\le\max(m,n)$ и $(-1)^j=\operatorname{sgn}\lambda_j$. В частности, размерность класса X_λ равна $\max[0,(\operatorname{sgn}\lambda_0)(n-m)]$.

Задача K является, очевидно, частным случаем общей задачи Пуанкаре P, которая заключается в отыскании решения уравнения (1) в классе $C^1(\overline{D}\setminus\{0,1\})$ по краевому условию

$$(a_1u_x+a_2u_y+a_0u)\big|_{\sigma\cup\gamma}=g, \tag{11}$$

где коэффициенты a_j непрерывны на каждой из дуг σ и γ, причем $a_1+ia_2\ne 0$ всюду на σ и одна из функций $a_1\pm a_2\ne 0$ всюду на γ. В соответствии с этим удобно использовать функции

$$G=a_1+ia_2 \ \text{ на } \sigma; \quad \rho=\frac{a_2+a_1}{a_2-a_1} \ \text{ на } \gamma. \tag{12}$$

Для функции $\rho(t)$ здесь допускается значение ∞, однако либо $|\rho|\le M$ для некоторой постоянной $M>0$, либо $|\rho|\ge M$. Таким образом, задача P принадлежит к одному из следующих двух (не взаимно исключающих) типов:

$$G(t)\ne 0, \ \ t\in\sigma; \quad |\rho(t)|\le M, \ \ t\in\gamma; \tag{13^0}$$

$$G(t)\ne 0, \ \ t\in\sigma; \quad |\rho(t)|\ge M, \ \ t\in\gamma. \tag{13^1}$$

Особо отметим два частных случая P^0 и P^1 задачи Пуанкаре:

$$(a_1u_x+a_2u_y+a_0u)\big|_\sigma=g, \quad (u_x-u_y)\big|_\gamma=g, \tag{14^0}$$

$$(a_1u_x+a_2u_y+a_0u)\big|_\sigma=g, \quad (u_x+u_y)\big|_\gamma=g, \tag{14^1}$$

Ясно, что задача P^j принадлежит к типу (13^j). Из уравнения (1) при $y<0$ видно, что в характеристическом треугольнике с основанием $J=[0,1]$ линейная комбинация $u_x\pm u_y$ сохраняет постоянное значение вдоль характеристик $x\pm y=\mathrm{const}$. Поэтому в постановке задачи P^j область D^- можно заменить этим треугольником, выбирая в качестве носителя второго краевого условия в (14^j) соответствующий отрезок характеристики $x+y=0$ ($j=0$) или $x-y=1$ ($j=1$). В результате получаем аналоги известной задачи Трикоми [5] с краевым условием Пуанкаре на кривой σ.

Из тех же соображений задачу P^j можем переформулировать как задачу Пуанкаре для гармонической в области D^+ функции, краевые условия которой получаются из (14^j) заменой γ интервалом J действительной оси.

Пусть как и выше дуги $\sigma,\gamma\in C^{1,\mu+0}$ и, соответственно, коэффициенты a_j задачи P принадлежат $C^{0,\mu+0}$ на каждой из дуг σ и γ. Решение этой задачи разыскиваем в классе

$$u_x,u_y\in C^{0,\mu}_{\lambda-1}(\overline{D};0,1). \tag{15}$$

Соответственно, на правую часть в (11) накладывается условие $g\in C^{0,\mu}_{\lambda-1}(\partial D;\,0,1)$. Отметим, что при $\lambda_k\ne 0$ из (15) следует включение $u-c_k\in C^{1,\mu}_\lambda\left(\overline{D_k};k\right)$ с

некоторой подходящей постоянной c_k, где D_k означает криволинейный сектор $D\cap\{|z-k|<\varepsilon\}$ достаточно малого радиуса ε с вершиной в точке $z=k$.

С задачей P свяжем параметры $\lambda_k^*\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, $\varepsilon_k=\pm1$ и $\nu_k\in\mathbb{R}$ по формулам

$$\lambda_k^*=1+(-1)^k\frac{\ln|\rho_k|}{|\ln q_k|},\quad \varepsilon_k=\operatorname{sgn}\rho_k,$$
$$\nu_k=(-1)^k\arg G_k-\theta_k-\pi/4,\quad k=0,1, \tag{16}$$

где для краткости G_k и ρ_k означают значения функций (12) на концах $z=k$ дуг σ,γ.

Соответственно двум типам (13^0) и (13^1) задачи P весовой порядок λ в (15) подчиняем дополнительному условию

$$\lambda_0>\lambda_0^*,\quad \lambda_1<\lambda_1^*, \tag{17^0}$$

$$\lambda_0<\lambda_0^*,\quad \lambda_1>\lambda_1^*. \tag{17^1}$$

Заметим, что для задачи P^j определение (16) дает значения $\lambda_k^*=\mp\infty$, где знак определяется четностью $k+j$, поэтому условие (17^j) удовлетворяется при любом λ.

Следуя [1], рассмотрим множество $\Delta_k\subseteq\mathbb{R}\setminus\lambda_k^*$, состоящее из следующих двух непересекающихся подмножеств Δ_k^1, Δ_k^2. Множество Δ^1 (здесь и ниже индекс k в обозначениях опускается) составлено из всех корней уравнения

$$\cos 2(\nu+\theta\delta)=\operatorname{th}|\ln q|(\lambda^*-\delta),\quad \varepsilon\sin 2(\nu+\theta\delta)>0. \tag{18}$$

Множество Δ^2 при $\cos 2(\nu+\theta\delta)=0$ пусто, а при $\cos 2(\nu+\theta\delta)\neq0$ оно лежит в связной компоненте

$$\left\{\delta\mid r=\frac{\cos 2(\nu+\theta\delta)}{\operatorname{th}|\ln q|(\lambda^*-\delta)}>1\right\},$$

содержащей λ^*, и описывается уравнениями

$$\frac{2\theta\operatorname{arcch} r}{|\ln q|}+\operatorname{arctg}\frac{r\sin 2(\nu+\theta\delta)}{\sqrt{r^2-1}}=\frac{\pi\varepsilon}{2}+\pi m,\quad m=0,1,\dots\ .$$

В частности, множество Δ^2 имеет λ^* своей единственной предельной точкой и расположено слева (справа) от λ^* при $\cos a>0$ ($\cos a<0$), $a=2(\nu+\theta\lambda^*)$.

В особом случае

$$\varepsilon=1,\ p=\frac{|\ln q|}{2\theta}>1,\quad \sin 2(\nu+\theta\lambda^*)=\sin\left(\arcsin\frac{1}{p}+\frac{\operatorname{arcch} p}{p}\right)$$

существует единственное решение δ системы $r=1$, $\sin 2(\nu+\theta\delta)=1/p$, которое исключается из Δ^1 и присоединяется к Δ^2.

Согласно (18) множество Δ^1 не имеет предельных точек и на $\pm\infty$ его элементы стремятся к нулям функции $\operatorname{tg}^{\pm1}(\nu+\theta\delta)$ в том смысле, что $\operatorname{tg}^{\pm1}(\nu+\theta\delta)\to0$ при $\delta\in\Delta$, $\delta\to\pm\infty$.

Введем локально постоянную функцию $\chi(\delta)$, $\delta\notin\Delta$, $\delta\neq\lambda^*$, однозначно определяемую условиями $\chi(\delta+0)-\chi(\delta-0)=n$, $\delta\in\Delta^n$, $n=1,2$ в точках разрыва и поведением

$$\chi(\delta)\to\left[\frac{\nu+\theta\delta}{\pi}+\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}-\frac{\nu+\theta}{\pi}\ \text{ при } \delta\to+\infty,\ \operatorname{tg}(\nu+\theta\delta)=1, \tag{19^+}$$

$$\chi(\delta) \to \left[\frac{\nu + \theta\delta}{\pi}\right] + 1 - \frac{\nu + \theta}{\pi} \text{ при } \delta \to -\infty, \ \mathrm{tg}\,(\nu + \theta\delta) = 1 \qquad (19^-)$$

на бесконечности. Очевидно, предельные значения здесь не зависят от прибавления к ν целочисленного слагаемого, т.е. от конкретного выбора $\arg G_k$ в (16).

В этих определениях λ^* предполагалось конечным. В случае $\lambda^* = \mp\infty$ в качестве $\chi(\delta)$ естественно взять предельное значение в $(19^\pm)$ с множеством $\Delta = \Delta^1$ точек разрыва этой функции.

Если $\lambda^* = 0, \quad \cos 2\nu = 0$, то уравнение (18), определяющее множество $\Delta = \Delta^1$, можно переписать в форме (8) с $e = \sin 2\nu$. В этом случае с помощью леммы 4 из [1] для функции χ нетрудно получить следующее явное ее описание.

Лемма 1. *Если* $\lambda^* = 0, \quad \cos 2\nu = 0$, *то величина* $\chi(\delta) - æ(\delta) + \theta/\pi$ *равна* $1/4$ *при* $\delta \sin 2\nu > 0$ *и* $3/4$ *при* $\delta \sin 2\nu < 0$, *где* $æ(\delta)$ *определяется* (9) *с* $e = \sin 2\nu$.

Заметим еще, что приращение непрерывной ветви $\arg G$ на σ можно представить в форме $(1/\pi)\arg G\big|_0^1 = \chi_0(\lambda_0) + \chi_1(\lambda_1) +$ целое число.

Теорема 3. *Задача P нормального типа* (13), (17) *фредгольмова в классе* (15) *тогда и только тогда, когда* $\lambda_k \notin \Delta_k, \ k = 0, 1$. *Пусть это условие выполнено. Тогда индекс фредгольмовой задачи P дается формулой*

$$æ = 2 + \frac{1}{\pi}\arg G\big|_0^1 - \chi_0(\lambda_0) - \chi_1(\lambda_1), \qquad (20)$$

а ее разрешимость определяется условиями ортогональности правой части $g \in C^{0,\mu}_{\lambda-1}$ *некоторому конечномерному подпространству в* $C^{0,\mu}_{\lambda+0}(\partial D;\ 0, 1)$.

При дополнительном предположении $\gamma \in C^{2,\mu+0}$, $g \in C^{1,\mu}_{\lambda-1}(\gamma; 0, 1)$ *решение* $u(x, y)$ *задачи P обладает свойством* $u_x, u_y \in C^{1,\mu}_{\lambda-1}(\overline{D}^-; 0, 1)$ *и, следовательно, является классическим.*

Доказательство. При фиксированном $(x_0, y_0) \in D$ соотношения $\eta = u(x_0, y_0)$, $\tilde{u} = u_x$, $\tilde{v} = -u_y$ и

$$u(x, y) = \eta + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \tilde{u}dx - \tilde{v}dy \qquad (21)$$

устанавливают взаимно обратные соответствия между решением $u \in C^1\left(\overline{D} \setminus (0, 1)\right)$ уравнения (1) и парой $(\eta, \tilde{u} + i\tilde{v})$, где $\eta \in \mathbb{R}$, а $\tilde{u} + i\tilde{v}$– решение системы (5). В результате задача P эквивалентным образом редуцируется к задаче

$$a_1\tilde{u} - a_2\tilde{v} + a_0(\eta + I_0(\tilde{u}, \tilde{v})) = g, \qquad (22)$$

для системы (5) в классе $C^{0,\mu}_{\tilde{\lambda}}$, $\tilde{\lambda} = \lambda - 1$, где $I_0(\tilde{u}, \tilde{v})$ означает интеграл в правой части (21). Главная часть (при $a_0 = 0$) задачи (22) представляет собой задачу Римана–Гильберта $\tilde{R}$ с коэффициентами $\tilde{a} = a_1$, $\tilde{b} = -a_2$. Поскольку оператор $\tilde{u}+ i\tilde{v} \to I_0(u, v)$ в (21) компактен в $C^{\mu}_{\tilde{\lambda}}$, задачи $\tilde{R}$ и (22) фредгольмово эквивалентны и их индексы связаны равенством

$$æ = \tilde{æ} + 1. \qquad (23)$$

Коэффициенты $\tilde{G}$, $\tilde{\rho}$ и параметры $\tilde{\lambda}^*$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\nu}$ задачи $\tilde{R}$, введенные в [6], согласно (12), (16) выражаются соотношениями

$$\tilde{G} = G, \quad \tilde{\rho} = \rho \text{ и } \tilde{\lambda}^* = \lambda^* - 1, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon, \quad \tilde{\nu} = \nu + \theta. \qquad (24)$$

Отвечающие им множества $\tilde{\Delta}^n$ описываются соответствующими уравнениями, где все обозначения нужно снабдить волной. При подстановке $\tilde{\lambda}^* = \lambda^* - 1$, $\tilde{\delta} = \delta - 1$ согласно (19), (24) множества $\tilde{\Delta}^n$ и функция $\tilde{\chi}(\tilde{\delta})$ переходят соответственно в Δ^n и $\chi(\delta)$. С учетом (23) отсюда заключаем, что все утверждения первой части теоремы являются переформулировкой теоремы 1 из [1].

Обратимся ко второй ее части, касающейся характера разрешимости задачи (22). Разрешимость задачи $\tilde{R}$ в [1, 6] описывается в терминах союзной задачи. Применительно к (22) этот вопрос решается по отношению к эквивалентному сингулярному уравнению на границе.

Положим $\Omega(z) = z^{\delta_0}(1-z)^{\delta_1}$, где $-1/2 < \lambda_k - 1 - \delta_k < 0$. Тогда согласно [1] задача $\tilde{R}$ редуцируется к эквивалентному сингулярному уравнению $\operatorname{Re}\tilde{A}(\varphi + \Omega K \Omega^{-1}\varphi + i\rho\xi) = g$ относительно вещественной функции $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda-1}(\partial D^+;\ 0,1)$ и $\xi \in \mathbb{R}$. Здесь $\tilde{A}$ определяется по коэффициентам $\tilde{a}, \tilde{b}$ как в [1], а K означает сингулярный оператор Коши. Обозначим кратко это уравнение $N\varphi + c\xi = g$, $c \in C^{\mu}_{\lambda-1+0}$. Аналогичным образом задача (22) редуцируется к эквивалентному сингулярному уравнению

$$N\varphi + N_0\varphi + c_1\xi + c_2\eta = g, \quad c_j \in C^{\mu}_{\lambda-1+0}, \tag{25}$$

где N_0 — интегральный оператор, получающийся в результате композиции оператора I_0 с весовым интегралом типа Коши

$$(\tilde{u} + i\tilde{v})(z) = \frac{\Omega(z)}{\pi i} \int\limits_{\partial D^+} \frac{\Omega^{-1}(t)\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \in D^+.$$

Оператор N_0 компактен в $C^{\mu}_{-\lambda-1}$ и имеет союзный оператор N_0', компактный в C^{μ}_{λ}. Это утверждение справедливо и при замене λ на $\lambda \pm \varepsilon$ с малым $\varepsilon > 0$.

Из общих результатов [7, гл. 2] отсюда заключаем, что разрешимость уравнения (25) определяется условиями ортогональности к конечному числу линейно независимых функций из $C^{0,\mu}_{\lambda+0}(\partial D^+; 0,1)$. Отсюда вторая часть теоремы получается непосредственно.

Согласно [1] теорема 3 сохраняет свою силу и в случае, когда роль $C^{0,\mu}_{\lambda-1}$ играет весовое пространство Харди $H^p_{\lambda-1}$, $p > 1$, т. е. когда $u_x - iu_y \in H^p_{\lambda-1}(D;\ 0,1)$.

При этом для решения u имеют место утверждения о его гладкости, аналогичные соответствующим утверждениям [1] для задачи Римана–Гильберта.

Условием фредгольмовости (13^j), (17^j) теоремы 3 можно придать простой геометрический смысл. Обозначим $\alpha(t)$ непрерывную ветвь угла на γ между векторами $a = (a_1, a_2)$ и $(1, -1)$, так что в обозначениях (12) коэффициент $\rho = -\operatorname{tg}\alpha$. В частности, условие на ρ в (13^j) равносильно тому, что

$$\alpha \neq \pi/2 \pmod{\pi},$$

$$\alpha \neq 0 \pmod{\pi}.$$

Пусть $\beta(t)$, $0 < \beta < \pi/2$, определяется аналогично α по касательному вектору $s = (s_1, s_2)$. Поскольку $s_1 + is_2 = i(n_1 + in_2) = -i(\tilde{n}_1 - i\tilde{n}_2)$, вектор s и конормаль $\tilde{n}$ на γ симметричны относительно прямой $x + y = 0$. Следовательно, можем положить $\alpha = -\beta$ при $a = \tilde{n}$.

Вспоминая, что $q_k = \operatorname{tg}\beta(k)$, $k = 0, 1$ и $q_0 < 1 < q_1$, выражение для λ^* в (16) можно переписать в форме

$$\lambda^*_k = \frac{1}{\ln q_k} \ln \frac{\operatorname{tg}\beta(k)}{\operatorname{tg}|\alpha(k)|}. \tag{26}$$

Дифференцирование в (3) краевого условия Дирихле по касательному направлению сводит задачу K к задаче P, в краевом условии (11) которой $a_0 = 0$ и $a = (a_1, a_2)$ совпадает с соответствующим вектором s или $\tilde{n}$. В этом случае $|\alpha(k)| = \beta(k)$, равенство (26) переходит в $\lambda_k^* = 0$ и условия (17) сводятся к $\lambda_0\lambda_1 < 0$. Что касается параметров ε и ν в (16), отвечающих задаче K, то для непрерывной ветви $\arg G$ на σ на концах дуги имеем значения

$$(\arg G)(k) = (-1)^k\theta_k + \begin{cases} \pi, & K = D,\ DN, \\ \pi/2, & K = N,\ ND, \end{cases}$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} -1, & K = D,\ ND, \\ 1, & K = N,\ DN. \end{cases}$$

При подстановке этих выражений в уравнение (18), описывающее $\Delta = \Delta^1$, оно переходит в (8). Соответственно, формула индекса (20) с учетом леммы 1 преобразуется в (10). Здесь нужно учесть только, что при $\lambda_0\lambda_1 < 0$ условие (4) выделяет в классе (15) подпространство коразмерности 1, так что величину æ в (20) нужно уменьшить на 1.

В качестве иллюстрации теоремы 3 обсудим наиболее важный вопрос о разрешимости задачи P в классе функций u, производные которых

$$u_x,\ u_y \in C^{+0}_{-1+0}(\overline{D};\ 0,1). \tag{27}$$

В частности, эти производные в точках $z = 0$, $z = 1$ могут допускать особенности порядка меньше 1.

Наряду с ним рассмотрим также класс $C^1_*(D,k)$, $\ k = 0,1$ функций $u \in C^1(\overline{D}\setminus\{0,1\})$, производные которых в точке $z = k$ допускают особенность порядка меньше 1, а в точке $z = 1-k$ — особенность любого порядка больше 1.

Заметим, что функции из класса (27) удовлетворяют условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D}$. Что касается функций $u \in C^1_*(\overline{D};k)$, то они обладают этим свойством вне любой окрестности точки $z = 1-k$ и допускают особенность логарифмического порядка в этой точке.

Теорема 4. (a) *Пусть $\lambda_0^*\lambda_1^* < 0$ и в дополнение к (13^j) выполнено соответствующее условие $\lambda_0^* \le 0$, $\lambda_1^* > 0$ $(j = 0)$ или $\lambda_0^* > 0$, $\lambda_1^* \le 0$ $(j = 1)$. Тогда задача P фредгольмова в классе (27) и ее индекс дается формулой*

$$æ = 2 + \frac{1}{\pi}\arg G\big|_0^1 - \chi_0(+0) - \chi_1(+0).$$

(b) *Пусть $\lambda_0^* = \lambda_1^* = 0$ и $\cos 2\nu_k = 0$, $k = 0,1$. Тогда соответственно (13^j) задача P фредгольмова в классе $C^1_*(\overline{D},j)$ и ее индекс дается формулой*

$$æ = 1 + \frac{1}{\pi}\arg G\bigg|_0^1 + \frac{\theta_0+\theta_1}{\pi} - æ_j(+0) - æ_{1-j}(-0). \tag{28}$$

Доказательство. Рассматриваемый класс функций вида (27) получается объединением класса (12) по всем $\lambda > 0$ и $\mu > 0$. Условие теоремы соответствует выполнению условия соответствующего (17) для достаточно малых $\lambda_k > 0$. Поэтому остается для указанных λ воспользоваться теоремой 3. Аналогично с учетом леммы 1 рассматривается и второе утверждение теоремы.

Как было отмечено выше, четыре варианта задачи K являются частными случаями задачи Пуанкаре и относительно их оказываемся в условиях второй части

теоремы 4. Индекс (28) задачи K в этом случае определяется формулой (16) теоремы 1, где целое число $n_k = æ_k(\lambda_k)$ принимает наименьшее по модулю значение. Для задач $K \neq N$ согласно (9) оно равно 0, а в случае $K = N$ следует положить $n_k = 1$ при $|\ln q_k| < 2\theta_k$ и $n_k = 0$ в противном случае. В результате приходим к следующему аналогу теоремы 4.

Теорема 5. *Задача K фредгольмова в классе $C^1_*(\overline{D}, j)$, $j = 0, 1$, и ее индекс при $K \neq N$ равен нулю. Индекс æ задачи N в этом классе равен $æ = -n_0 \operatorname{sgn} \lambda_0 - n_1 \operatorname{sgn} \lambda_1$.*

В частности, в условиях теоремы 2 задачи D и DN однозначно разрешимы в классе $C^1_*(\overline{D}, j)$, $j = 0, 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солдатов А. П.* Задача R для системы Лаврентьева–Бицадзе в весовых классах Харди // Дифференц. уравнения. 2002, Т. 38, N 6.
2. *Солдатов А. П.* // Докл. РАН. 1993. Т. 332, N 6. С. 696–698.
3. *Солдатов А. П.* // Докл. РАН. 1993. Т. 333, N 1. С. 16–18.
4. *Солдатов А. П.* Весовые класс Харди аналитических функций // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, N 6.
5. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1953. Т. XLI.
6. *Солдатов А. П.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, N 12. С. 1–11.
7. *Солдатов А. П.* // Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991.

Солдатов Александр Павлович
Россия, Великий Новгород, Новгородский госуниверситет им. Ярослава Мудрого
sap@mail.natm.ru