УДК 517.95

# УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ГРАФАХ

**Г. А. Свиридюк**

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга $E_j$ имеет длину $l_j > 0$ и ширину $d_j > 0$. В [1] рассмотрена задача Коши–Неймана для уравнения $u_t = \Delta u + f(u)$ в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — тонкая трубчатая окрестность гладкой кривой. Показано, что эта задача может быть сведена к одномерной задаче

$$u_t = d^{-1}(x)(d(x)u_x)_x + f(u), \quad x \in (0, l);$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad u_x(0, t) = 0 = u_x(l, t);$$

где $x$ — натуральный параметр кривой, а $d(x)$ — нормализованная ширина тонкой области $\Omega$. В [2] на графе $\mathbf{G}$ рассмотрены уравнения реакции–диффузии

$$u_{jt} = u_{jxx} + f(u_j), \quad x \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{0.1}$$

где $f$ — гладкая функция общая для всех дуг $E_j$. Для уравнений (0.1) в каждой вершине $V_i$ заданы краевые условия, которые являются аналогами законов Кирхгофа,

$$u_j(0, t) = u_k(l_k, t) \quad \text{для всех} \quad E_j \in E^{\alpha}(V_i), \quad E_k \in E^{\omega}(V_i) \tag{0.2}$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) = \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0. \tag{0.3}$$

(Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине $V_i$). Условие (0.2) означает, что решение должно быть непрерывно в каждой вершине, а условие (0.3) — что поток через каждую вершину должен равняться нулю. Поток пропорционален ширине дуги и градиенту решения. Это и является причиной введения в рассмотрение ширины дуги. В частном случае когда граф $\mathbf{G}$ состоит из единственной дуги, условие (0.2) исчезает, а условие (0.3) превращается в однородное условие Неймана.

В последнее время задача (0.1)–(0.3) привлекает внимание многих исследователей (см. [3, 4] и библиографию там). Между тем было замечено, что в ряде случаев [5, 6] уравнения соболевского типа описывают процессы реакции–диффузии лучше, чем полулинейные параболические уравнения вида (0.1). Уравнения соболевского типа составляют обширное подмножество неклассических уравнений математической физики [7] и в настоящее время активно изучаются в различных аспектах [8–11]. Итак, нас интересует задача на графе $\mathbf{G}$ с краевыми (0.2), (0.3) и начальными

$$u_j(x, 0) = u_{j0}(x), \quad x \in (0, l_j) \tag{0.4}$$

Работа поддержана грантом Минобразования РФ PD02–1.1–82

условиями для уравнения соболевского типа

$$\lambda u_{jt} - u_{jxxt} = u_{jxx} + f(u_j), \tag{0.5}$$

где параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ одинаков для всех уравнений. Основной особенностью начально–краевых задач для уравнений соболевского типа является их принципиальная неразрешимость при произвольных начальных данных. Поэтому главной целью при их изучении является описание множества допустимых начальных данных, понимаемого нами как фазовое пространство уравнения [12]. Для поиска и описания фазовых пространств уравнений соболевского типа были разработаны теория относительно $\sigma$–ограниченных операторов и вырожденных аналитических групп операторов и теория относительно $p$–секториальных операторов и вырожденных аналитических полугрупп операторов [13]. Опираясь на результаты этих теорий, удалось выделить фазовые пространства, содержащие только квазистационарные (полу)траектории [14], и в некоторых случаях [15, 16] описать их исчерпывающим образом.

Статья кроме введения и списка литературы содержит две части. В первой задача (0.2)–(0.4) для уравнений (0.5) редуцируется к задаче Коши для абстрактного уравнения соболевского типа, а во второй приводятся достаточные условия существования единственного решения этой задачи в терминах квазистационарных траекторий [14]. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь личные вкусы и пристрастия автора.

В заключение условимся о следующем. Все рассмотрения проводятся в вещественных пространствах, однако при рассмотрении «спектральных» вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением «против часовой стрелки» и ограничивают области лежащие «слева» при таком движении. Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначены соответственно «единичный» и «нулевой» операторы, области определения которых явны из контекста.

## 1. Постановка задачи

Положим $\mathfrak{F} = L_2(\mathbf{G})$, где

$$L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots, g_j, \ldots) : g_j \in L_2(E_j)\}.$$

Множество $\mathfrak{F}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle g, h\rangle = \sum_{V_j \in \mathfrak{V}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j(x) h_j(x) dx.$$

Через $\mathfrak{U}$ обозначим множество

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(E_j),$$
$$u_j \text{ удовлетворяет условиям (0.2), (0.3)}\}.$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(E_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит множество $\mathfrak{U}$ корректно определено и является банаховым пространством плотно и непрерывно вложенным в пространство в $\mathfrak{F}$. Введем в рассмотрение операторы

$$M : u \to (u_{1xx}, u_{2xx}, \ldots, u_{jxx}, \ldots), \quad u \in \mathfrak{U}, \quad L = \lambda\mathbb{I} - M.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ пространство линейных непрерывных операторов.

**Теорема 1.1.** *При любых $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор $M$ $(L,\sigma)$–ограничен, $\infty$ — устранимая особая точка $L$–резольвенты оператора $M$.*

Доказательство. Обозначим через $\sigma(M)$ спектр оператора $M$. В [3] показано, что спектр $\sigma(M)$ содержит только действительные собственные значения конечной кратности, причем они сгущаются только к точке $-\infty$. Занумеруем собственные значения по невозрастанию с учетом их кратности, т.е. $\sigma(M) = \{\lambda_k\}$, и через $\{\varphi_k\}$ обозначим ортонормированное (в смысле $\langle\cdot,\cdot\rangle$) семейство соответственных собственных функций. Поскольку оператор $M$ самосопряжен (в $\mathfrak{U}$ относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ [3]), то оператор $L$ фредгольмов (т.е. $\mathrm{ind}L = 0$). Возьмем вектор $\varphi \in \ker L$, т.е.

$$\varphi = \sum_{\lambda_l=\lambda} a^l\varphi_l, \quad a^l \in \mathbb{R}, \quad \sum_{\lambda_l=\lambda} |a^l| > 0.$$

Отсюда

$$M\varphi = \lambda\varphi \notin \mathrm{im}L,$$

Что в силу [13] завершает доказательство.

Пусть $u \in \mathfrak{U}$, построим оператор

$$F(u) = (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_j), \ldots), \quad F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}.$$

**Теорема 1.2.** *Пусть функция $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, тогда оператор $F \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.*

Доказательство вытекает из теоремы о регулярности [17] и непрерывности вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Итак, задача (0.2)–(0.4) для уравнений (0.5) редуцирована к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1.1}$$

для абстрактного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + F(u), \tag{1.2}$$

где операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $F \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор $M$ $(L,\sigma)$–ограничен, $\infty$ — устранимая особая точка $L$–резольвенты оператора $M$, $\mathfrak{U}$ — банахово, а $\mathfrak{F}$ — гильбертово пространства, $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$, $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$. Вектор–функцию $u \in C^\infty((-T,T);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (1.2) при некотором $T \in \mathbb{R}_+$, назовем решением этого уравнения. Решение $u = u(t)$ уравнения (1.2) называется решением задачи (1.1), (1.2), если оно удовлетворяет условию (1.1) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

## 2. Существование единственного решения

Рассмотрим уравнение (1.2). Из $(L,\sigma)$–ограниченности оператора $M$ вытекает существование проекторов $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ таких, что уравнение (1.2) представимо в виде системы уравнений

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)F(u), \tag{2.1}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}QF(u). \tag{2.2}$$

Здесь $u^{0(1)} \in \mathfrak{U}^{0(1)}$, $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im} P$, $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, $L_k(M_k)$ — сужение на $\mathfrak{U}^k$ оператора $L$ $(M)$. Если вдобавок $\infty$ — устранимая особая точка $L$–резольвенты оператора $M$, то оператор $H \equiv \mathbb{O}$, и поэтому вместо уравнения (2.1) удобно рассмотреть множество

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + F(u)) = 0\},$$

содержащее все решения уравнения (1.2) как квазистационарные траектории [14]. Другими словами, если $u_0 \notin \mathfrak{M}$, то задача (1.1), (1.2) не имеет решения.

Пусть $u_0 \in \mathfrak{M}$, назовем множество $\mathfrak{M}$ банаховым $C^\infty$–многообразием в точке $u_0$, если

(i) существуют окрестности $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек $u_0$ и $u_0^1 = Pu_0$ соответственно;

(ii) существует $C^\infty$–диффеоморфизм $D : \mathfrak{O}^1 \to \mathfrak{O}$ такой, что $D^{-1}$ есть сужение на $\mathfrak{O}$ проектора $P$. Немного отходя от стандарта [18], назовем пару $(D, \mathfrak{O}^1)$ картой. Множество $\mathfrak{M}$ называется банаховым $C^\infty$–многообразием, моделируемом пространством $\mathfrak{U}^1$, если в каждой своей точке оно имеет карту. Связное $C^\infty$–многообразие называется простым, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

**Теорема 2.1.** *Пусть оператор $M$ $(L,\sigma)$–ограничен, причем $\infty$ — устранимая особая точка $L$–резольвенты оператора $M$, а оператор $F \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Пусть в точке $u_0$ множество $\mathfrak{M}$ является банаховым $C^\infty$–многообразием. Тогда для некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T,T); \mathfrak{M})$ задачи* (1.1), (1.2).

Доказательство. Обозначим через $D'_{u^1}$ производную Фреше оператора $D \in C^\infty(\mathfrak{O}^1; \mathfrak{O})$ в точке $u^1 \in \mathfrak{O}^1$. Очевидно, $D'_{u^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; T_u\mathfrak{M})$, где $T_u\mathfrak{M}$ — касательное к $\mathfrak{O}$ пространство в точке $u = D(u_1)$. Подействуем оператором $D'_{u^1}$ на обе части уравнения (2.2), получим

$$\dot{u} = A(u), \tag{2.3}$$

где оператор $A : u \to D'_{Pu}Spu + D'_{Pu}L_1^{-1}QF(u)$, $u \in \mathfrak{O}$. По построению $A \in C^\infty(\mathfrak{O}; T\mathfrak{O})$, где

$$T\mathfrak{O} = \bigcup_{u \in \mathfrak{O}} T_u\mathfrak{M} -$$

касательное расслоение $\mathfrak{O}$. Однозначная разрешимость (при некотором $T \in \mathbb{R}_+$) задачи (1.1), (2.3) — классическая теорема Коши [18].

Замечание 2.1. В нашей ситуации, когда $\mathfrak{F}$ — гильбертово пространство, проектор

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L(\mu L - M)^{-1} d\mu = \mathbb{I} - \sum_{\lambda_l = \lambda} \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l.$$

Здесь $\Gamma \in \mathbb{C}$ — контур, ограничивающий область, содержащую $L$–спектр $\sigma^L(M)$ оператора $M$. Поэтому множество $\mathfrak{M}$ выглядит следующим образом

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + F(u), \varphi_l \rangle = 0, \quad \lambda_l = \lambda\}.$$

Заметим еще, что если $\lambda \notin \sigma(M)$, то $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{U}$.

Замечание 2.2. Пусть точка $u_0 \in \mathfrak{M}$, обозначим через $F'_0$ — производную Фреше оператора $F$ в точке $u_0$. Пусть оператор $(\mathbb{I} - Q)(M + F'_0) : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{F}^0$ — топлинейный изоморфизм, тогда множество $\mathfrak{M}$ — банахово $C^\infty$–многообразие в точке $u_0$ (здесь $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$). Действительно, в силу (2.1) оператор $\mathbb{I} + M_0^{-1}(\mathbb{I} -$

$Q)F_0' : \mathfrak{U}^0 \to \mathfrak{U}$ в таком случае тоже будет топлинейным изоморфизмом. Отсюда в силу теоремы о неявной функции существуют окрестности $\mathfrak{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{O}^0 \subset \mathfrak{U}^0$ точек $u_0^1 = Pu_0$ и $u_0^0 = u_0 - u_0^1$ соответственно, и оператор $d \in C^\infty(\mathfrak{O}^1; \mathfrak{O}^0)$ такой, что точка $u = u^1 + d(u_0^1) \in \mathfrak{M}$ при любой точке $u^1 \in \mathfrak{O}^1$, причем $u^0 = u_0^1 + d(u_0^1)$. Очевидно, что $D = \mathbb{I} + d$ — искомый $C^\infty$–диффеоморфизм.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Hale J. K., Raugel G.* Reaction–diffusion equation on thin domains // J. Math. Pures App. 1991. V. 71. P. 33–95.
2. *von Below J.* A maximum principle for semilinear parabolic network equations // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 1991. V. 133. P. 37–45.
3. *Kosugi S.* A semilinear elliptic equation in a thin network–shaped domain // J. Math. Soc. Japan. 2000. V. 52. P. 673–697.
4. *Yanagida E.* Stability of nonconstant steady states in reaction–diffusion systems on graphs // Japan J. Industr. Appl. Math. 2001. V. 18. P. 25–42.
5. *Свиридюк Г. А., Бокарева Т. А.* Число Деборы и один класс полулинейных уравнений типа Соболева // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, N 5. С. 1082–1086.
6. *Бокарева Т. А., Свиридюк Г. А.* Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева // Мат. заметки. 1994. Т. 55, N 3. С. 3–10.
7. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1983.
8. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
9. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc. 1999.
10. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально–операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
11. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht Harbound: Kluwer Academic Publishers, 2002.
12. *Свиридюк Г. А.* Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, N 5. С. 252–272.
13. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, N 4. С. 47–74.
14. *Свиридюк Г. А.* Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, N 3. С. 192–207.
15. *Свиридюк Г. А., Якупов М. М.* Фазовое пространство начально–краевой задачи для системы Осколкова // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, N 11. С. 1538–1543.
16. *Свиридюк Г. А., Казак В. О.* Фазовое пространство начально–краевой задачи для уравнения Хоффа // Мат. заметки. 2002. Т. 71, N 2. С. 292–297.
17. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
18. *Ленг С.* Введение в теорию дифференциальных многообразий. Волгоград: Платон, 1997.


*Свиридюк Георгий Анатольевич*
*Россия, Челябинск, Челябинский государственный университет*
ridyu@csu.ru