УДК 517.956.6

ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЗАДАЧА Т С СОПРЯЖЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В. Ф. Волкодавов, О. Ю. Наумов

1. Постановка задачи Т

Пусть область D ограничена гладкой кривой Γ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ в полуплоскости $y>0$ и отрезками прямых AC с уравнением $x+y=0$, CB с уравнением $x=1$, в полуплоскости $y<0$. Введем обозначения $D_+ = D\cap\{y>0\}$, $D_- = D\cap\{y<0\}$, $D_0=\{(x,y)|\, y=0,\, 0<x<1\}$.

В области D рассмотрим уравнение

$$V(u)=0, \tag{1}$$

где

$$V(u)\equiv\begin{cases} u_{xx}+\operatorname{sgn} y\cdot u_{yy}, & \text{если } (x,y)\in D_+\cup D_0,\\ u_{xy}, & \text{если } (x,y)\in D_-.\end{cases}$$

Задача Т. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:
1) $u(x,y)\in C(\overline{D})$;
2) $V(u)\equiv 0$ на множестве $D_+\cup D_-$;
3) $u(x,y)$ подчиняется краевым условиям

$$u|_\Gamma=\varphi(s),\ s\in[0,L], \tag{2}$$

L — длина кривой Γ, отсчитываемая от точки B,

$$u|_{CB}=g(y),\ y\in[-1,0]; \tag{3}$$

4) $u(x,y)$ подчиняется условию сопряжения

$$H_+(x)=b(x)\cdot H_-(x),\ x\in(0,1), \tag{4}$$

где

$$H_+(x)=\int\limits_0^x (x-t)^{-\rho}\tau'(t)\,dt,\ 0<\rho<1, \tag{5}$$

$$\tau(x)=\lim_{y\to+0}u(x,y),\ x\in[0,1], \tag{6}$$

здесь $u(x,y)$ — решение задачи Дирихле для уравнения (1) в области D_+ с данными (2), (6),

$$H_-(x)=\lim_{y\to-0}\int\limits_{-y}^x (x-t)^{-\lambda}u(x,-t)\,dt,\ 0<\lambda<1. \tag{7}$$

В этом равенстве $u(x,y)$ — решение задачи Гурса для уравнения (1) в области D_- с данными (3), (6), $\varphi(s)$, $g(y)$, $b(x)$ — заданные функции.

2. Единственность решения задачи T

Лемма 1. *Если $u(x,y) \in C(\overline{D_-}\,)$ — решение уравнения* (1) *в области D_-, то, без ограничения общности рассуждений, можно считать, что $u(0,0) = u(1,0) = 0$.*

Действительно, в противном случае, будем рассматривать функцию $v(x,y) = u(x,y) - u(0,0)(1-x) - u(1,0)x$, которая, очевидно, удовлетворяет утверждению леммы.

Подчиняя общее решение уравнения (1) в области D_- краевым условиям (3), (6), находим
$$u(x,y) = \tau(x) + g(y). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что если $\tau(x) \in C_{[0,1]} \cap C^1_{(0,1)}$, $g(y) \in C_{[-1,0]} \cap C^1_{(-1,0)}$, то функция, определяемая формулой (8), является единственным, непрерывным в замкнутой области $\overline{D_-}$, решением задачи Гурса для уравнения (1) в области D_- с данными (3), (6). Из равенств (7), (8) находим

$$H_-(x) = \frac{\tau(x) \cdot x^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \int\limits_0^x (x-t)^{-\lambda} g(-t)\, dt. \tag{9}$$

Лемма 2. *Если $u(x,y) \in C(\overline{D_-}\,)$ — решение уравнения* (1) *в области D_- таково, что $\tau(x) = u(x,0)$, $x \in [0,1]$, достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке x_0, $x_0 \in (0,1)$, при этом $u|_{CB} \equiv 0$, то $H_-(x_0) > 0$ ($H_-(x_0) < 0$).*

Доказательство этого утверждения следует из равенства (9) при $x = x_0$ с учетом условий леммы.

Лемма 3. *Если $u(x,y) \in C(\overline{D_+}\,)$ — решение уравнения* (1) *в области D_+ таково, что $\tau(x) = u(x,0)$, $x \in [0,1]$, достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке x_0, $x_0 \in (0,1)$, то $H_+(x_0) > 0$ ($H_+(x_0) < 0$).*

Доказательство. Замечая, что $\tau'(x) = [\tau(x) - \tau(x_0)]'$, положим в равенстве (5) $x = x_0$. Тогда

$$H_+(x_0) = \int\limits_0^{x_0} (x_0 - t)^{-\rho} [\tau(t) - \tau(x_0)]' dt.$$

Интегрируя по частям в этом равенстве при $U = (x_0 - t)^{-\rho}$, получим

$$H_+(x_0) = [\tau(x_0) - \tau(0)] \cdot x_0^{-\rho} + \rho \int\limits_0^{x_0} (x_0 - t)^{-1-\rho} [\tau(x_0) - \tau(t)]\, dt.$$

Откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Если существует решение задачи T и $b(x) < 0$, то оно единственное.*

Доказательство. Предположим, что $u_1(x,y), u_2(x,y) \in C(\overline{D})$ — различные решения уравнения (1) на множестве $D_+ \cup D_-$ с одними и теми же краевыми условиями (2), (3), удовлетворяющие условию сопряжения (4). Тогда функция $z(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ будет решением задачи T с однородными краевыми условиями.

Так как $z(x,y) \in C(\overline{D_+})$ — гармоническая в области D_+, то в силу принципа максимума [1, сс. 375–377] она принимает наибольшее и наименьшее значения на границе области D_+. Пусть $z(x,0) = \tau(x)$, $x \in [0,1]$, достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке x_0, $x_0 \in (0,1)$. Но тогда согласно леммам 2, 3 и условию теоремы имеем в точке x_0

$$H_+(x_0) > 0 \ (H_+(x_0) < 0) \text{ и } b(x_0) \cdot H_-(x_0) < 0 \ (b(x_0) \cdot H_-(x_0) > 0),$$

что противоречит условию сопряжения (4). Стало быть, $\tau(x) \equiv \mathrm{const}$ и, замечая, что $z(A) = z(B) = 0$, получим $z(x,0) \equiv 0$.

Итак, $z|_{\Gamma \cup AB} \equiv 0$. Отсюда по принципу максимума $z(x,y) \equiv 0$ в области D_+, а в силу единственности решения задачи Гурса $z(x,y) \equiv 0$ в области D_-. Таким образом, $z(x,y) \equiv 0$ в области D, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает теорему.

3. Существование решения задачи T

Доказательство существования решения задачи T проведем при следующих предположениях:

$$\Gamma \text{ — нормальная кривая } \Gamma_0 \text{ с уравнением } y = \sqrt{x(1-x)}, \ x \in [0,1]; \tag{10}$$

$$u|_{\Gamma_0} = \varphi(x), \ x \in [0,1]. \tag{11}$$

Другими словами, область D_+ является полукругом радиуса $1/2$ с центром в точке $(1/2, 0)$. Функция, конформно отображающая область D_+ на верхнюю полуплоскость, имеет вид [2, с. 433]

$$\omega(z) = 1 - 2z + \frac{1}{1-2z}. \tag{12}$$

Тогда функция Грина задачи Дирихле для уравнения (1) в области D_+ дается формулой [2, с. 433]

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\omega(z) - \overline{\omega}(\zeta)}{\omega(z) - \omega(\zeta)} \right|, \ z = x + iy, \ \zeta = \xi + i\eta,$$

здесь $\omega(z)$ определяется формулой (12). Выполнив несложные преобразования, получим

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z - \overline{\zeta}||z + \overline{\zeta} - 2z\overline{\zeta}|}{|z - \zeta||z + \zeta - 2z\zeta|}, \ z = x + iy, \ \zeta = \xi + i\eta. \tag{13}$$

Стало быть, решение задачи Дирихле для уравнения (1) в области D_+ с данными (10), (11) и (6) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,y) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t(1-t)}} \left[\frac{\partial}{\partial n} G(x,y,t,\eta) \right]_{\eta = \sqrt{t(1-t)}} dt - \\ - \int_0^1 \tau(t) \left[\frac{\partial}{\partial n} G(x,y,t,\eta) \right]_{\eta=0} dt, \end{aligned} \tag{14}$$

здесь $G(x,y,\xi,\eta)$ определяется равенством (13).

Из условия сопряжения (4), равенств (5), (9), приходим к интегро–дифференциальному уравнению относительно функции $\tau(x)$

$$\int_0^x (x-t)^{-\rho}\tau'(t)\,dt = \frac{b(x)\tau(x)x^{1-\lambda}}{1-\lambda} + b(x)\int_0^x (x-t)^{-\lambda}g(-t)\,dt.$$

Учитывая, что $\tau(x) = \int_0^x \tau'(t)\,dt$, здесь $\tau(0)=0$ по лемме 1, последнее равенство примет вид

$$\int_0^x (x-t)^{-\rho}\tau'(t)\,dt = \frac{b(x)x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\int_0^x \tau'(t)\,dt + b(x)\int_0^x (x-t)^{-\lambda}g(-t)\,dt. \qquad (15)$$

Рассмотрим следующие случаи: $\rho=\lambda$; $\rho<\lambda$; $\rho>\lambda$. Пусть $\rho=\lambda$. К обеим частям тождества (15) применим оператор дробного интегрирования [3, с. 42]

$$\Gamma(\lambda)\,\left(I_{0+}^{\lambda}f\right)(y) = \int_0^y (y-x)^{\lambda-1}f(x)\,dx.$$

Изменив порядок интегрирования в левой части и в первом слагаемом правой части равенства (15), будем иметь

$$\int_0^y \tau'(t)\,A_1(t,y)\,dt = \frac{1}{1-\lambda}\int_0^y \tau'(t)\,A_2(t,y)\,dt + A_3(y), \qquad (16)$$

где

$$A_1(t,y) = \int_t^y (y-x)^{\lambda-1}(x-t)^{-\lambda}dx,\ \ A_2(t,y) = \int_t^y (y-x)^{\lambda-1}x^{1-\lambda}b(x)\,dx,$$

$$A_3(y) = \int_0^y (y-x)^{\lambda-1}b(x)\,dx\int_0^x (x-t)^{-\lambda}g(-t)\,dt.$$

В интеграле A_1 выполним замену $x = y-(y-t)z$. Получим

$$A_1(t,y) = B(\lambda, 1-\lambda). \qquad (17)$$

$A_2(t,y)$ интегрируем по частям, положив $V(x,y) = -\int_x^y (y-s)^{\lambda-1}s^{1-\lambda}ds$ и заметив, что подстановка $s = y-(y-x)z$, дает

$$V(x,y) = -(y-x)^{\lambda}y^{1-\lambda}B(\lambda,1)F\left(\lambda-1,\lambda;\lambda+1;\frac{y-x}{y}\right).$$

Тогда

$$A_2(t,y) = B(\lambda,1)\,b(t)\,(y-t)^{\lambda}y^{1-\lambda}F\left(\lambda-1,\lambda;\lambda+1;\frac{y-t}{y}\right) +$$

$$+B(\lambda,1)\int_t^y b'(x)(y-x)^{\lambda}y^{1-\lambda}F\left(\lambda-1,\lambda;\lambda+1;\frac{y-x}{y}\right)dx.$$

Нетрудно видеть, что $A_2(y,y) \equiv 0$. Найдем $\frac{\partial}{\partial y}A_2(t,y)$, применив формулу «сокращенного» дифференцирования [4, с. 111]

$$\frac{d}{dz}\, z^{c-1}(1-z)^{b-c+1}F(a,b;c;z) = (c-1)z^{c-2}(1-z)^{b-c}F(a-1,b;c-1;z) \tag{18}$$

и учитывая, что $\lambda \cdot B(\lambda,1) = 1$. Вычисления дают

$$\frac{\partial}{\partial y}A_2(t,y) = b(t)\,(y-t)^{\lambda-1}y^{1-\lambda}F\left(\lambda-1,\lambda-1;\lambda;\frac{y-t}{y}\right)+$$
$$+y^{1-\lambda}\int\limits_t^y b'(x)(y-x)^{\lambda-1}F\left(\lambda-1,\lambda-1;\lambda;\frac{y-x}{y}\right)dx. \tag{19}$$

Слагаемое $A_3(y)$ в правой части равенства (16) интегрируем по частям, положив

$$V(x,y) = -\int\limits_x^y (y-s)^{\lambda-1}ds\int\limits_0^s (s-t)^{-\lambda}g(-t)\,dt =$$
$$= -\int\limits_0^x g(-t)\,dt\int\limits_x^y (y-s)^{\lambda-1}(s-t)^{-\lambda}ds - \int\limits_x^y g(-t)\,dt\int\limits_t^y (y-s)^{\lambda-1}(s-t)^{-\lambda}ds,$$

здесь мы изменили порядок интегрирования. Во внутренних интегралах последнего равенства выполним замены $s = y-(y-x)z$, $s = y-(y-t)z$ соответственно. Получим

$$V(x,y) = -B(\lambda,1)(y-x)^{\lambda}\int\limits_0^x g(-t)(y-t)^{-\lambda}F\left(\lambda,\lambda;1+\lambda;\frac{y-x}{y-t}\right)dt-$$
$$-B(\lambda,1-\lambda)\int\limits_x^y g(-t)\,dt. \tag{20}$$

Заметим, что $V(y,y) \equiv 0$. Вычислим $V_y^{'}$, применив в первом слагаемом (20) формулу дифференцирования [4, с. 111]

$$\frac{d}{dz}\, z^{c}(a,b;c+1;p\,z) = c\,z^{c-1}F(a,b;c;p\,z),$$

здесь p не зависит от z. С учетом того, что $\lambda \cdot B(\lambda,1) = 1$ и $F\left(\lambda,\lambda;\lambda;\frac{y-x}{y-t}\right) = \left(\frac{x-t}{y-t}\right)^{-\lambda}$, имеем

$$V_y^{'} = -(y-x)^{\lambda-1}\int\limits_0^x g(-t)(y-t)^{-1}(x-t)^{1-\lambda}dt - B(\lambda,1-\lambda)g(-y). \tag{21}$$

Считая $b(0) = 0$ и применяя формулы (20), (21), находим

$$A_3(y) = \int\limits_0^y b'(x)\,V(x,y)\,dx,\ \text{ здесь } V(x,y) \text{ определяется равенством (20),}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}A_3(t,y)=\int\limits_0^y b'(x)(y-x)^{\lambda-1}dx\int\limits_0^x g(-t)\,(y-t)^{-1}(x-t)^{1-\lambda}dt+$$
$$+B(\lambda,1-\lambda)\,b(y)\,g(-y). \tag{22}$$

Дифференцируем обе части тождества (16) по y. С учетом равенств (17), (19), (22), после очевидных преобразований, приходим к интегральному уравнению

$$\tau'(y)=\int\limits_0^y \frac{K_0(y,t)}{(y-t)^{1-\lambda}}\,\tau'(t)\,dt+P(y), \tag{23}$$

где

$$K_0(y,t)=\frac{y^{1-\lambda}}{(1-\lambda)B(\lambda,1-\lambda)}\left\{b(t)F\left(\lambda-1,\lambda-1;\lambda;\frac{y-t}{y}\right)+\right.$$
$$\left.+(y-t)^{1-\lambda}\int\limits_t^y b'(x)(y-x)^{\lambda-1}F\left(\lambda-1,\lambda-1;\lambda;\frac{y-x}{y}\right)dx\right\}, \tag{24}$$

$$P(y)=b(y)g(-y)+$$
$$+\frac{1}{B(\lambda,1-\lambda)}\int\limits_0^y b'(x)(y-x)^{\lambda-1}dx\int\limits_0^x g(-t)(y-t)^{-1}(x-t)^{1-\lambda}dt. \tag{25}$$

Во втором слагаемом равенства (24) выполним замену $x=y-(y-t)z$, а во втором слагаемом равенства (25) изменим порядок интегрирования, после чего выполним во внутреннем интеграле ту же замену. Получим

$$K_0(y,t)=\frac{y^{1-\lambda}}{(1-\lambda)B(\lambda,1-\lambda)}\left\{b(t)F\left(\lambda-1,\lambda-1;\lambda;\frac{y-t}{y}\right)+\right.$$
$$\left.+(y-t)\int\limits_0^1 b'(y-(y-t)z)\,z^{\lambda-1}F\left(\lambda-1,\lambda-1;\lambda;\frac{(y-t)z}{y}\right)dz\right\}, \tag{26}$$

$$P(y)=b(y)g(-y)+\frac{1}{B(\lambda,1-\lambda)}\int\limits_0^y g(-t)dt\int\limits_0^1 b'(y-(y-t)z)\,z^{\lambda-1}(1-z)^{1-\lambda}dz. \tag{27}$$

Будем считать, что $b(x)\in C^1_{[0,1]}$, $g(y)\in C_{[-1,0]}$. Но тогда из равенств (26), (27), теорем о непрерывности суммы, произведения непрерывных функций, теоремы о непрерывности интеграла с параметром [5, с. 669], следует непрерывность функции $K_0(y,t)$ на множестве $\{(y,t)|\,0\leqslant t\leqslant y\leqslant 1\}$ и функции $P(y)$ на отрезке $[0,1]$.

Таким образом, интегральное уравнение (23) является интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода со слабой особенностью в ядре и непрерывным свободным членом. При этом соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение в силу единственности решения задачи T, отсюда по альтернативе Фредгольма [6, с. 87] следует, что уравнение (23) имеет единственное решение, которое может быть построено методом последовательных приближений [5, сс. 56, 57]. Последовательные итерированные ядра

$$K_n(y,t)=\int\limits_t^y K_1(y,s)\,K_{n-1}(s,t)\,ds,\ \ K_1(y,t)\equiv\frac{K_0(y,t)}{(y-t)^{1-\lambda}}, \tag{28}$$

здесь $K_0(y,t)$ определяется формулой (26), $n = 2, 3\ldots$, начиная с номера n, удовлетворяющего неравенству $n\lambda - 1 > 0$, будут ограничены на множестве $\{(y,t) | 0 \leqslant t \leqslant y \leqslant 1\}$, а уравнение (23) с помощью композиций обеих его частей с функцией $\frac{K_0(y,t)}{(y-t)^{1-\lambda}}$ приводится к аналогичному уравнению с ядром $K_n(y,t)$

$$\tau'(y) = \int\limits_0^y K_n(y,t)\,\tau'(t)\,dt + P_n(y), \tag{29}$$

где

$$P_n(y) = P_{n-1}(y) + \int\limits_0^y \frac{K_0(y,t)}{(y-t)^{1-\lambda}}\,P_{n-1}(t)\,dt,\ P_1(y) \equiv P(y), \tag{30}$$

здесь $P(y)$ определяется формулой (27), $n = 2, 3\ldots$. Заметим, что $P_n(y) \in C_{[0,1]}$. Это нетрудно показать по индукции с помощью рекуррентного соотношения (30) и теоремы о непрерывности интеграла с параметром [5]. Стало быть, получив решение уравнения (29) $\tau'(y) \in C_{[0,1]}$ в виде

$$\tau'(y) = P_n(y) + \int\limits_0^y R(y,t;1)\,P_n(t)\,dt, \tag{31}$$

где $R(y,t;1)$ — резольвента ядра $K_n(y,t)$, определяемого равенством (28), а $P_n(y)$ определяется соотношениями (30), мы получим решение исходного уравнения (23).

Интегрируя теперь (31) с начальным условием $\tau(0) = 0$, находим

$$\tau(x) = \int\limits_0^x \tau'(y)\,dy, \tag{32}$$

где $\tau'(y)$ определяется равенством (31).

Рассмотрим случай $\rho < \lambda$. Второе слагаемое правой части равенства (15) интегрируем по частям, положив $U = g(-t)$ и учитывая, что $g(0) = 0$ по лемме 1. Получим

$$\int\limits_0^x (x-t)^{-\rho}\tau'(t)\,dt = \frac{b(x)x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\int\limits_0^x \tau'(t)\,dt - \frac{b(x)}{1-\lambda}\int\limits_0^x (x-t)^{1-\lambda}g'(-t)\,dt. \tag{33}$$

К обеим частям тождества (33) применим оператор дробного интегрирования [3]

$$\Gamma(\rho)\,\left(I_{0+}^{\rho} f\right)(y) = \int\limits_0^y (y-x)^{\rho-1} f(x)\,dx. \tag{34}$$

Дальнейший процесс вычислений аналогичен вычислениям описанным выше. Отметим, что дифференцирование равенства (33), после вычисления внутренних интегралов, проводится с помощью формулы (18), кроме того, используются следующие тождества:

$$\rho \cdot B(\rho,1) = 1,\ \frac{B(\rho, 2-\lambda)(1+\rho-\lambda)}{B(\rho,1-\rho)} = \frac{1}{B(1-\rho, 1+\rho-\lambda)}.$$

В результате вычислений так же, как в предыдущем случае, приходим к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$\tau'(y) = \int\limits_0^y \frac{L_0(y,t)}{(y-t)^{1-\rho}}\,\tau'(t)\,dt + Q(y), \tag{35}$$

где

$$L_0(y,t) = \frac{y^{1-\lambda}}{(1-\lambda)B(\rho,1-\rho)}\left\{b(t)F\left(\rho-1,\lambda-1;\rho;\frac{y-t}{y}\right)+\right.$$
$$\left.+(y-t)\int\limits_0^1 b'(y-(y-t)z)\,z^{\rho-1}\left(1-\frac{y-t}{y}\,z\right)^{1-\lambda} F\left(\rho-1,\lambda-1;\rho;\frac{(y-t)z}{y}\right)dz\right\}, \tag{36}$$

$$Q(y) = \frac{(\lambda-1)^{-1}}{B(\rho,1-\rho)}\int\limits_0^y g'(-t)\,(y-t)^{1+\rho-\lambda}dt$$
$$\int\limits_0^1 b'(y-(y-t)z)\,z^{\rho-1}F(\rho-1,\lambda-1;\rho;z)\,dz+$$
$$+\frac{(\lambda-1)^{-1}}{B(1-\rho,1+\rho-\lambda)}\int\limits_0^y b'(x)\,(y-x)^{1+\rho-\lambda}dx\int\limits_0^1 g'((y-x)z-y)\,z^{\rho-\lambda}dz.$$

Заметим, что если $b(x)\in C^1_{[0,1]}$, $g(y)\in C^1_{[-1,0]}$, то, как нетрудно видеть, функции $L_0(y,t)$, $Q(y)$ являются непрерывными на множестве $\{(y,t)|0\leqslant t\leqslant y\leqslant 1\}$ и отрезке $[0,1]$ соответственно. Стало быть, единственное решение уравнения (35) $\tau'(y)\in C_{[0,1]}$ запишется в виде

$$\tau'(y) = Q_n(y) + \int\limits_0^y H(y,t;1)\,Q_n(t)\,dt, \tag{37}$$

здесь $H(y,t;1)$ — резольвента итерированного ядра $L_n(y,t)$. Рекуррентные соотношения для $L_n(y,t)$ и $Q_n(y)$ мы не приводим, поскольку они аналогичны соотношениям (28), (30).

В случае $\rho>\lambda$, к обеим частям тождества (15) применим оператор (34). После изменения порядка интегрирования в левой части и первом слагаемом правой части равенства (15) замечаем, что единственным отличием от предыдущего случая является второе слагаемое правой части полученного равенства. Следовательно, остается провести вычисления лишь для этого слагаемого и воспользоваться результатами полученными выше, причем вычисления выполняются по той же схеме, которую мы применяли в предыдущем случае.

Таким образом, приходим к интегральному уравнению Вольтерра

$$\tau'(y) = \int\limits_0^y \frac{L_0(y,t)}{(y-t)^{1-\rho}}\,\tau'(t)\,dt + S(y),$$

здесь $L_0(y,t)$ определяется формулой (36),

$$S(y)=\frac{1}{B(\rho,1-\rho)}\int\limits_0^y g(-t)\,(y-t)^{\rho-\lambda}dt\int\limits_0^1 b'(y-(y-t)z)\,z^{\rho-1}F(\rho-1,\lambda;\rho;z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{B(1-\rho,\rho-\lambda)}\int\limits_0^y b'(x)\,(y-x)^{\rho-\lambda}dx\int\limits_0^1 g'((y-x)z-y)\,z^{\rho-\lambda-1}dz,$$

единственное решение которого $\tau'(y)\in C_{[0,1]}$ при $b(x)\in C^1_{[0,1]}$, $g(y)\in C_{[-1,0]}$, дается формулой

$$\tau'(y)=S_n(y)+\int\limits_0^y H(y,t;1)\,S_n(t)\,dt, \tag{38}$$

здесь $H(y,t;1)$ — резольвента итерированного ядра $L_n(y,t)$. Соотношений для $L_n(y,t)$ и $S_n(y)$ мы не приводим, имея в виду замечание к формуле (37).

Теорема 2. *Если*
1) $0<\rho,\lambda<1$,
2) *выполняются условия* (10), (11),
3) $b(x)\in C^1_{[0,1]}$, *для* $\forall x\in(0,1)\quad b(x)<0,\ b(0)=0$,
4) $g(y)\in C_{[0,1]}$ *при* $\rho=\lambda$ *и* $\rho>\lambda$, $g(y)\in C^1_{[0,1]}$ *при* $\rho<\lambda$,
то существует единственное решение задачи T *определяемое в области* D_+ *формулой* (14); *в области* D_- — *формулами* (8) *и* (32), *в которой* $\tau'(y)$ *задается равенством* (31) *при* $\rho=\lambda$, (37) *при* $\rho<\lambda$, (38) *при* $\rho>\lambda$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1976.
2. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965.
5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб.: Лань, 1997.
6. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960.

Волкодавов Виктор Филиппович, *Наумов Олег Юрьевич*
Россия, Самара, Самарский государственный педагогический университет