УДК 517.95

О ВЛИЯНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СЛАГАЕМЫХ НА ПОСТАНОВКУ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛО–ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. Н. Врагов

В теории краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа хорошо известен тот факт, что постановка краевой задачи и класс её корректности существенно зависят от младших членов уравнения (см., например, [1]).

В монографии [2] в цилиндрической области $Q_T = (0,T) \times D$ ($0 < T < +\infty$, $D \subset R^n$ — ограниченная область с гладкой границей γ) рассматривалась смешанная задача для гиперболо–параболического уравнения

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + a(x,t)u_t + b(x,t)u = f(x,t). \qquad (1)$$

Здесь $k(x,t) \geq 0$ всюду в Q_T, а квадратичная форма, определяемая вторым слагаемым, положительно определена. Определим множества $S_0 = \{(x,0), x \in D\}$, $S = \gamma \times (0,T)$, $\Gamma_0 = \{(x,0), x \in D : k(x,0) = 0\}$.

Смешанная задача: *найти в Q_T решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее начально–краевым условиям*

$$u|_{S_0} = 0, \qquad (2)$$

$$u_t|_{\overline{S_0 \setminus \Gamma_0}}, \qquad (3)$$

$$u|_S = 0. \qquad (4)$$

Доказано, что при выполнении условия $2a - |k_t| \geq \delta > 0$ всюду в Q_T (условие $(*)$) для любой функции $f(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ существует единственное решение задачи (1)–(4) из пространства $W_2^2(Q_T)$. Приведены примеры, когда при нарушении условия $(*)$ имеет место либо несуществование гладкого решения, либо его неединственность.

В случае $k(x,t) = t^s$, $s \geq 1$ и $a(x,t) \leq 0$ всюду в Q_T корректность смешанной задачи (1)–(4) в весовых пространствах С. Л. Соболева установлена в работе [3] при дополнительных условиях на правую часть $f(x,t)$.

В настоящей работе показано, что наличие нелинейного слагаемого, содержащего u_t в уравнении вида (1), может обеспечить корректность смешанной задачи в пространствах С. Л. Соболева без веса даже в том случае, когда условие $(*)$ не выполняется. Рассматриваемая здесь задача имеет модельный, (быть может, даже иллюстративный), характер и, конечно же, допускает разнообразные обобщения.

Рассмотрим в описанном цилиндре Q_T уравнение

$$Mu \equiv k(x,t)u_{tt} - \Delta_x u + \mu F(u_t) = f(x,t). \tag{5}$$

Здесь $k(x,t)$ — гладкая в $\overline{Q}_T$ функция и $k(x,t) \geq 0$ всюду в Q_T, $\mu > 0$ — постоянная, $F(\xi) = |\xi|^\rho \xi + \varphi(\xi)$, где $\rho > 0$, а $\varphi(\xi)$ — гладкая неубывающая функция, причем $\varphi(\xi) = \xi$ при $|\xi| \leq 1$ и $\varphi'(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq 2$.

Очевидно, что условие $(*)$ здесь не выполнено.

Пусть для простоты $k(x,0) = 0$ для всех $x \in D$ и, значит, $\Gamma_0 = S_0$.

Смешанная задача: *найти в области в Q_T решение уравнения (5), удовлетворяющее начально–краевым условиям*

$$u|_{S_0} = u_0(x), \tag{6}$$

$$u|_S = 0. \tag{7}$$

Теорема. *Пусть $u_0 \in W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $f \in W_2^1(Q_T)$ и выполнено условие $F^{-1}(f(x,0) + \Delta_x u_0) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.*

Тогда существует $u(x,t) \in L^\infty(0,T; W_2^2(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$ — решение смешанной задачи (5)–(7) такое, что $u_t \in L^\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)) \cap L^{\rho+2}(Q_T)$, $u_{tt} \in L^2(Q_T)$.

Если $\mu \geq \mu_0 > 0$, где μ_0 зависит от коэффициента $k(x,t)$, то это решение единственно.

Доказательство. Рассмотрим в Q_T «ε–регуляризованное» уравнение

$$M^\varepsilon u^\varepsilon \equiv (\varepsilon + k)u_{tt}^\varepsilon - \Delta_x u^\varepsilon + \mu F(u_t^\varepsilon) = f(x,t), \tag{8}$$

где $\varepsilon > 0$, с начально–краевыми условиями

$$u^\varepsilon|_{S_0} = u_0(x), \tag{9}$$

$$u_t^\varepsilon|_{S_0} = F^{-1}(f(x,0) + \Delta_x u_0) \equiv u_1(x), \tag{10}$$

$$u^\varepsilon|_S = 0. \tag{11}$$

Будем решать задачу (8)–(11) методом Фаедо–Галеркина с выбором специального базиса, состоящего из собственных функций задачи

$$-\Delta_x \omega_s = \lambda_s^2 \omega_s, \ \omega_s|_\gamma, \ s = 1, 2, \ldots$$

При получении априорных оценок приближенных решений и обосновании корректности дальнейших процедур мы не будем проводить строгие рассуждения и пояснять некоторые обозначения. Такого рода процедуры и обозначения достаточно стандартны. Соответствующие строгие рассуждения можно найти, например, в [4, гл. 1].

Рассматривая равенство

$$(M^\varepsilon u^{m,\varepsilon}, u_\tau^{m,\varepsilon})_{L^2(Q_t)} = (f, u_\tau^{m,\varepsilon})_{L^2(Q_t)} (0 < t \leq T)$$

и интегрируя, где необходимо, по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_D (\varepsilon + k(x,t))(u_t^{m,\varepsilon})^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int\limits_D |\nabla_x u^{m,\varepsilon}|^2(x,t)dx +$$

$$+ \iint\limits_{Q_t} (\mu(|u_\tau^{m,\varepsilon}|^\rho (u_\tau^{m,\varepsilon})^2 + \varphi(u_\tau^{m,\varepsilon})u_\tau^{m,\varepsilon}) - \frac{k_\tau}{2}(u_\tau^{m,\varepsilon})^2)dxd\tau =$$

$$= (f, u_\tau^{m,\varepsilon})_{L_2(Q_t)} + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_D |u_1^m|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_D |\nabla_x u_0^m|^2 dx. \tag{12}$$

Заметим, что для всех $\xi \in R$ и всех $(x,t) \in \overline{Q}_T$ справедливо неравенство $\left(\frac{\mu}{2}|\xi|^\rho - \frac{|k_\tau|}{2}\right)\xi^2 \geq \widetilde{\mu}\xi^2 - C_1$, где $\widetilde{\mu} > 0$ и $C_1 > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от ξ. Используя этот факт и монотонность $\varphi(\xi)$, оценим снизу последний интеграл в левой части равенства (12)

$$I_1 + I_2 = \frac{\mu}{2}\iint\limits_{Q_t} (|u_\tau^{m,\varepsilon}|^{\rho+2} + 2\varphi(u_\tau^{m,\varepsilon})u_\tau^{m,\varepsilon} dxd\tau +$$

$$+\iint\limits_{Q_t} \left(\frac{\mu}{2}|u_\tau^{m,\varepsilon}|^\rho - \frac{k_\tau}{2}\right)(u_\tau^{m,\varepsilon})^2 dxd\tau \geq$$

$$\geq \frac{\mu}{2}\iint\limits_{Q_t} |u_\tau^{m,\varepsilon}|^{\rho+2} dxd\tau + \widetilde{\mu}\iint\limits_{Q_t} (u_\tau^{m,\varepsilon})^2 dxd\tau - C_2,$$

где $C_2 > 0$ — постоянная, не зависящая от m, ε.

Первый интеграл в правой части (12) оценим с помощью неравенства Юнга

$$\left|(f, u_\tau^{m,\varepsilon})_{L^2(Q_t)}\right| \leq C_3(\widetilde{\mu})\iint\limits_{Q_t} f^2 dxd\tau + \frac{\widetilde{\mu}}{2}\int\limits_{Q_t} (u_\tau^{m,\varepsilon})^2 dxd\tau.$$

Окончательно получаем оценки

$$||u_t^{m,\varepsilon}||_{L^{\rho+2}(Q_T)} \leq C_4, \tag{13}$$

$$||u^{m,\varepsilon}||_{L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))} \leq C_5, \tag{14}$$

где C_4 и C_5 не зависят от m и ε.

Далее, рассматривая равенство

$$((M^\varepsilon u^{m,\varepsilon})_\tau, u_{\tau\tau}^{m,\varepsilon})_{L^2(Q_t)} = (f_\tau, u_{\tau\tau}^{m,\varepsilon})_{L^2(Q_t)}$$

и интегрируя, где необходимо, по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_D (\varepsilon + k(x,t))(u_{tt}^{m,\varepsilon})^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int\limits_D |\nabla_x u_t^{m,\varepsilon}|^2(x,t)dx +$$

$$+\iint\limits_{Q_t} (\mu(\rho+1)|u_\tau^{m,\varepsilon}|^\rho + \varphi'(u_\tau^{m,\varepsilon}))(u_{\tau\tau}^{m,\varepsilon})^2 - \frac{|k_\tau|}{2}(u_{\tau\tau}^{m,\varepsilon})^2)dxd\tau \leq$$

$$\leq |(f_\tau, u_{\tau\tau}^{m,\varepsilon})_{L_2(Q_t)}| + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_D (u_{tt}^{m,\varepsilon}(x,0))^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_D |\nabla_x u_1^m|^2 dx.$$

Используя монотонность $\varphi(\xi)$ и уже отмеченное неравенство, обеспечивающее доминирование слагаемого $|\xi|^\rho$ над слагаемым $\frac{|k_\tau|}{2}$ при больших значениях $|\xi|$, выразив $u_{tt}^{m,\varepsilon}(x,0)$ через заданные величины и применив, где необходимо, неравенство Юнга, окончательно получаем равномерные по m и ε оценки

$$||u_{tt}^{m,\varepsilon}||_{L^2(Q_T)} \leq C_6, \tag{15}$$

$$||u_t^{m,\varepsilon}||_{L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))} \le C_7. \tag{16}$$

Наконец, рассмотрим равенство

$$(M^\varepsilon u^{m,\varepsilon}, -\Delta_x u_\tau^{m,\varepsilon})_{L^2(Q_t)} = (f, -\Delta_x u_\tau^{m,\varepsilon})_{L^2(Q_t)},$$

проинтегрируем, где необходимо, по частям и получим с учетом оценок (15) и (16) неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_D (\varepsilon + k(x,t))|\nabla_x u_t^{m,\varepsilon}|^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int\limits_D (\Delta_x u^{m,\varepsilon})^2(x,t)dx +$$

$$+\iint\limits_{Q_t}((\mu(\rho+1)|u_\tau^{m,\varepsilon}|^\rho + \mu\varphi'(u_\tau^{m,\varepsilon}))|\nabla_x u_\tau^{m,\varepsilon}|^2 - \frac{|k_\tau|}{2}|\nabla_x u_\tau^{m,\varepsilon}|^2)dxd\tau \le$$

$$\le |(f, -\Delta_x u_\tau^{m,\varepsilon})_{L_2(Q_t)}| + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_D |\nabla_x u_1^m|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_D (\Delta_x u_0^m)^2 dx + C_8.$$

Принимая во внимание уже отмеченные факты, используя неравенство Юнга для оценки первого слагаемого в правой части, окончательно получаем с использованием неравенства Гронуолла

$$||u^{m,\varepsilon}||_{L^\infty(0,T;W_2^2(D)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))} \le C_9, \tag{17}$$

где C_9 не зависит от m и ε.

Теперь, используя полученные оценки (13)–(17), можно осуществить стандартный для метода Галёркина предельный переход при $l \to \infty$ и $s \to \infty$ на некоторых подпоследовательностях $\{m_l\}_{l\in N}$ и $\{\varepsilon_s\}_{s\in N}$. Предельный переход в нелинейном слагаемом осуществляется с использованием оценки (13), ограниченности функции $\varphi(\xi)$ и леммы 1.3 из [4, гл. 1].

Окончательно получаем функцию $u(x,t)$, обладающую сформулированным в теореме условиям гладкости и, очевидно, удовлетворяющую уравнению (5) и начально–краевым условиям (6), (7).

Докажем единственность полученного решения. Пусть $u(x,t)$ и $v(x,t)$ — два решения задачи (5)–(7), обладающие сформулированными в теореме свойствами.

Обозначим $z = u - v$ и рассмотрим равенство $(Mu - Mv,\ z_t)_0 = 0$, где через $(\cdot,\cdot)_0$ обозначено скалярное произведение в $L^2(Q_T)$.

При интегрировании по частям получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_D k(x,T)z_t^2(x,T)dx + \frac{1}{2}\int\limits_D |\nabla_x z|^2(x,T)dx -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_T} k_t z_t^2 dxdt + \mu\iint\limits_{Q_T}(F(u_t) - F(v_t))z_t dxdt = 0.$$

Оценим интеграл

$$\mu\iint\limits_{Q_T}(F(u_t) - F(v_t))z_t dxdt = \mu\iint\limits_{Q_T} F'(\alpha u_t + (1-\alpha)v_t)z_t^2 dxdt,$$

где $\alpha \in (0,1)$.

Теперь заметим, что производная функции $\mu F(\xi)$ допускает оценку снизу $\mu((\rho+1)|\xi|^\rho + \varphi'(\xi)) \ge \mu\beta > 0$ по построению функции $\varphi(\xi)$, и существует $\mu_0 > 0$ такое, что при $\mu > \mu_0$ справедливо неравенство $\mu\beta - \frac{k_t}{2} \ge \delta > 0$. Это обстоятельство, как легко видеть, обеспечивает равенство $z \equiv 0$ почти всюду в Q_T.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

2. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1983.

3. *Бубнов Б. А.* Краевая задача для одного класса ультрагиперболических уравнений // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. С. 34–40.

4. *Лионс Ж.–Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

Врагов Владимир Николаевич
Россия, Новосибирск, Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН