УДК 517.956

К СЛУЧАЯМ РАЗРЕШИМОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ТЕРМИНАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Жегалов

Речь идет о получении для коэффициентов уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f \tag{1}$$

и двух его пространственных аналогов условий, позволяющих записать общие представления решений с помощью цилиндрических и гипергеометрических функций.

1. Если для уравнения известна функция Римана, то решение задачи Гурса [1, с. 66; 2; 3; 4, с. 28; 49–51] можно рассматривать как указанное общее представление. Имеются обзоры [5, 6] вариантов, когда функцию Римана удается построить. Здесь предлагаются новые результаты в этом направлении

Остановимся сначала на уравнении (1), предполагая, что существуют a_x, b_y и при этом в рассматриваемой области a, b, c, a_x, b_y, $f \in C$. Функция Римана v для (1) удовлетворяет [7] интегральному уравнению

$$v(x,y) = \int\limits_t^x \int\limits_\tau^y \Gamma(\xi,\eta,x,y)h(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi + \Gamma(t,\tau,x,y), \tag{2}$$

$$\Gamma(x,y,t,\tau) = \exp\Big(\int\limits_y^\tau a(x,\eta)d\eta + \int\limits_x^t b(\xi,\tau)d\xi\Big), \quad h = a_x + ab - c.$$

Обозначим

$$\alpha(x,y) = \int\limits_{y_0}^y a(x,\eta)d\eta, \quad \beta(x,y) = \int\limits_{x_0}^x b(\xi,y)d\xi, \tag{3}$$

где (x_0, y_0) — любая фиксированная точка рассматриваемой области, и предположим, что разность α и β имеет структурное представление

$$\alpha(x,y) - \beta(x,y) = m(x) + n(y). \tag{4}$$

Тогда (2) можно переписать в форме

$$v(x,y) = \int\limits_t^x \int\limits_\tau^y N(x,y)M(\xi,\eta)h(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta d\xi + M(t,\tau)N(x,y), \tag{5}$$

$$M(\xi,\eta) = \exp\Big(m(\xi) - \alpha(\xi,\eta)\Big), \quad N(x,y) = \exp\Big(n(y) + \beta(x,y)\Big).$$

Вводя новую искомую функцию $v_1 = M(x,y)v(x,y)$ и учитывая, что в силу (4) $M(x,y)N(x,y) \equiv 1$, преобразуем (5) к виду

$$v_1(x,y) = \int\limits_t^x \int\limits_\tau^y h(\xi,\eta)v_1(\xi,\eta)d\eta d\xi + M(t,\tau). \tag{6}$$

Уравнение (6) равносильно задаче Гурса

$$v_{1xy} - h(x,y)v_1 = 0, \quad v_1(x,\tau) = v_1(t,y) = M(t,\tau),$$

которую можно решить в явном виде, если h имеет представление $h = -\varphi(x)\psi(y)$. В самом деле, известно [8], что в данном случае функция Римана Ω совпадает с цилиндрической функцией (Бесселя) $J_0(\omega)$ при $\omega = 2\Big(\int\limits_t^x \varphi(\xi)d\xi \int\limits_\tau^y \psi(\eta)d\eta\Big)^{\frac{1}{2}}$. Поэтому, пользуясь формулой решения задачи Гурса [1, с. 66], находим $v_1 = \Omega(x,y,t,\tau)M(t,\tau)$. Учитывая связь между v_1, v и обозначения (3), вычисляем отсюда

$$v = J_0\Big[2\Big(\int\limits_t^x \varphi(\xi)d\xi \int\limits_\tau^y \psi(\eta)d\eta\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] \exp\Big(\int\limits_\tau^y a(t,\eta)d\eta + \int\limits_t^x b(\xi,y)d\xi\Big). \tag{7}$$

Если принять во внимание, что в силу (3) представление (4) обеспечивается тождеством $a_x \equiv b_y$, то полученный результат может быть сформулирован следующим образом: *при условиях $a_x \equiv b_y$, $c - ab - a_x \equiv \varphi(x)\psi(y)$ функция Римана для уравнения* (1) *дается формулой* (7).

В силу тождества $a_x \equiv b_y$ показатель экспоненты в (7) можно рассматривать как криволинейный интеграл, не зависящий от пути, соединяющего точки (t,τ) и (x,y). Поэтому, например,

$$\int\limits_\tau^y a(t,\eta)d\eta + \int\limits_t^x b(\xi,y)d\xi \equiv \int\limits_\tau^y a(x,\eta)d\eta + \int\limits_t^x b(\xi,\tau)d\xi,$$

откуда следует возможность записать (7) в иной форме.

Заметим, что (7) является обобщением формулы (21) из [7]: там $a = a_1(y) + \lambda x$, $b = b_1(x) + \lambda y$, $\lambda = const$ (см. также [4, сс. 17, 18]).

Обратимся теперь к трехмерному уравнению

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = F \tag{8}$$

с коэффициентами из C, причем существуют и принадлежат тому же классу a_{xy}, b_{yz}, c_{xz}, d_x, e_y, f_z. Только что изложенную схему рассуждений при определенном изменении ее элементов можно распространить на случай уравнения (8).

Аналогичное (2) интегральное уравнение для функции Римана v выведено в [9] при дополнительных предположениях $a_x + ab - e \equiv 0$, $c_x + bc - f \equiv 0$, $a_y + ac - d \equiv 0$ и имеет вид

$$v(x,y,z) = \Gamma(t,\tau,\sigma,x,y,z) -$$
$$- \int\limits_t^x \int\limits_\tau^y \int\limits_\sigma^z \Gamma(\lambda,\mu,\nu,x,y,z)h(\lambda,\mu,\nu)v(\lambda,\mu,\nu)d\nu d\mu d\lambda, \tag{9}$$

$$\Gamma(x,y,z,t,\tau,\sigma)=\exp\Bigl(\int\limits_x^t b(\xi,y,z)d\xi+\int\limits_y^\tau c(t,\eta,z)d\eta+\int\limits_z^\sigma a(t,\tau,\zeta)d\zeta\Bigr),$$

$$h=d_x+bd-g.$$

Структурные формулы, играющие роль (4), можно задать соотношениями

$$\begin{gathered}\alpha(x,y,z)-\gamma(x,y,z)=m(x)+n(z),\\ \gamma(x,y,z)-\beta(x,y,z)=p(x)+q(y),\\ \beta(x,y,z)-\alpha(x,y,z)=r(y)+s(z),\end{gathered}\tag{10}$$

где

$$\begin{gathered}\alpha(x,y,z)=\int\limits_{z_0}^z a(x,y,\zeta)d\zeta,\quad \beta(x,y,z)=\int\limits_{y_0}^y c(x,\eta,z)d\eta,\\ \gamma(x,y,z)=\int\limits_{x_0}^x b(\xi,y,z)d\xi,\end{gathered}\tag{11}$$

(x_0,y_0,z_0) — произвольная фиксированная точка рассматриваемой области. Аналогом уравнения (5) является

$$\begin{gathered}v(x,y,z)=A(x,y,z)B(t,\tau,\sigma)-\\ -\int\limits_t^x\int\limits_\tau^y\int\limits_\sigma^z A(x,y,z)B(\lambda,\mu,\nu)h(\lambda,\mu,\nu)v(\lambda,\mu,\nu)d\nu d\mu d\lambda,\end{gathered}\tag{12}$$

$$A(x,y,z)=\exp\Bigl(\alpha(x,y,z)-m(x)-q(y)-n(z)-s(z)\Bigr),$$

$$B(\lambda,\mu,\nu)=\exp\Bigl(-\alpha(\lambda,\mu,\nu)-p(\lambda)-r(\mu)\Bigr).$$

С помощью замены $v_1=B(x,y,z)v(x,y,z)$ (12) редуцируется к уравнению

$$v_1(x,y,z)=B(t,\tau,\sigma)-\int\limits_t^x\int\limits_\tau^y\int\limits_\sigma^z h(\lambda,\mu,\nu)v_1(\lambda,\mu,\nu)d\nu d\mu d\lambda,$$

эквивалентному задаче

$$v_{1xyz}+h(x,y,z)v_1=0,\quad v_1\big|_{x=t}=v_1\big|_{y=\tau}=v_1\big|_{z=\sigma}=B(t,\tau,\sigma),\tag{13}$$

решаемой в замкнутой форме, если $h=\varphi(x)\psi(y)\theta(z)$. В этом случае функция Римана Ω есть [6, с. 6] обобщенная гипергеометрическая [10, с. 183] функция ${}_0F_2(1,1;\omega)$ при $\omega=\int\limits_t^x\varphi(\xi)d\xi\int\limits_\tau^y\psi(\eta)d\eta\int\limits_\sigma^z\theta(\zeta)d\zeta$. Поэтому на основании формулы из [2] получаем решение задачи (13) в виде $v_1=\Omega(x,y,z,t,\tau,\sigma)B(t,\tau,\sigma)$. Отсюда выводим

$$\begin{gathered}v={}_0F_2\Bigl(1,1;\int\limits_t^x\varphi(\xi)d\xi\int\limits_\tau^y\psi(\eta)d\eta\int\limits_\sigma^z\theta(\zeta)d\zeta\Bigr)\exp\Bigl(\int\limits_t^x b(\xi,y,z)d\xi+\\ +\int\limits_\tau^y c(t,\eta,z)d\eta+\int\limits_\sigma^z a(t,\tau,\zeta)d\zeta\Bigr).\end{gathered}\tag{14}$$

Подводя итог, сформулируем результат: *при условиях* $b_y\equiv c_x$, $b_z\equiv a_x$, $c_z\equiv a_y$, $a_x+ab-e\equiv 0$, $c_x+bc-f\equiv 0$, $a_y+ac-d\equiv 0$, $d_x+bd-g\equiv\varphi(x)\psi(y)\theta(z)$ *функция Римана для уравнения* (8) *дается формулой* (14).

Здесь учтено, что первыми тремя тождествами в силу (11) обеспечиваются представления (10). Эти же тождества позволяют рассматривать показатель экспоненты в (14) как криволинейный интеграл, не зависящий от пути. Отсюда следует возможность изменять данный показатель на основе соотношений:

$$\begin{gathered}
\int_t^x b(\xi,y,z)d\xi+\int_\tau^y c(t,\eta,z)d\eta+\int_\sigma^z a(t,\tau,\zeta)d\zeta\equiv\\
\equiv\int_t^x b(\xi,\tau,\sigma)d\xi+\int_\tau^y c(x,\eta,z)d\eta+\int_\sigma^z a(x,\tau,\zeta)d\zeta\equiv\\
\equiv\int_t^x b(\xi,\tau,\sigma)d\xi+\int_\tau^y c(x,\eta,\sigma)d\eta+\int_\sigma^z a(x,y,\zeta)d\zeta\equiv\\
\equiv\int_t^x b(\xi,\tau,z)d\xi+\int_\tau^y c(x,\eta,z)d\eta+\int_\sigma^z a(t,\tau,\zeta)d\zeta\equiv\\
\equiv\int_t^x b(\xi,y,z)d\xi+\int_\tau^y c(t,\eta,\sigma)d\eta+\int_\sigma^z a(t,y,\zeta)d\zeta\equiv\\
\equiv\int_t^x b(\xi,y,\sigma)d\xi+\int_\tau^y c(t,\eta,\sigma)d\eta+\int_\sigma^z a(x,y,\zeta)d\zeta.
\end{gathered}$$

В [9] был выведен частный случай формулы (14), когда a, b, c есть соответственно функции лишь от z, x, y с добавлением к каждой из них константы δ, умноженной на остающуюся пару аргументов.

2. Расширить область применения результатов предыдущего пункта позволяет процедура понижения порядка уравнений, сохраняющая их принадлежность к рассматриваемому типу.

Снова возьмем уравнение (8) и отвечающие ему конструкции [2]: $h_1=a_x+ab-e$, $h_2=a_y+ac-d$, $h_3=b_y+bc-f$, $h_4=b_z+ab-e$, $h_5=c_x+bc-f$, $h_6=c_z+ac-d$, $h_7=d_x+bd-g$, $h_8=e_y+ce-g$, $h_9=f_z+af-g$. Введем функции

$$\begin{gathered}
u_1=u_{yz}+au_y+cu_z+du,\quad u_2=u_{xz}+au_x+bu_z+eu,\\
u_3=u_{xy}+cu_x+bu_y+fu.
\end{gathered}\tag{15}$$

С их помощью уравнение (8) можно записать в формах:

$$\begin{aligned}
u_{1x}+bu_1&=h_1u_y+h_5u_z+h_7u+F,\\
u_{2y}+cu_2&=h_2u_x+h_3u_z+h_8u+F,\\
u_{3z}+au_3&=h_4u_y+h_6u_x+h_9u+F.
\end{aligned}\tag{16}$$

Эти формулы можно проверить непосредственным вычислением. Например, для получения первой из них достаточно записать левую часть уравнения (8) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{yz}+au_y+cu_z+du)+(e-a_x)u_y+(f-c_x)u_z+(g-d_x)u+bu_{yz},$$

учесть, что первое слагаемое здесь есть $\partial u_1/\partial x$ и еще заменить в последнем слагаемом u_{yz} ее значением из (15_1). Аналогично получаются оставшиеся две формулы (16). Заметим, что соотношения (16) были анонсированы в [11].

Из (15)–(16) видно, что если выполнена хотя бы одна из трех групп тождеств

$$h_1 \equiv h_5 \equiv h_7 \equiv 0, \quad h_2 \equiv h_3 \equiv h_8 \equiv 0, \quad h_4 \equiv h_6 \equiv h_9 \equiv 0, \tag{17}$$

то порядок уравнения (8) может быть понижен на единицу. Действительно, в этих случаях уравнения (16) решаются в квадратурах относительно хотя бы одной из функций u_1, u_2, u_3. Например, при (17_1) имеем

$$u_1 = \omega_1(y,z)\exp\int\limits_x^{x_0} b(\xi,y,z)d\xi + \int\limits_{x_0}^{x}\Big[\exp\int\limits_x^{\xi} b(\xi_1,y,z)d\xi_1\Big]F(\xi,y,z)d\xi,$$

где $\omega_1(y,z)$ — произвольная непрерывная вместе с ω_{1y}, ω_{1z}, ω_{1yz} функция.

Уравнения (15) с искомой функцией u относятся к виду (1). К каждому из них можно применить утверждение из п. 1, относящееся к этому уравнению. В результате получается три набора условий, каждый из которых дает возможность получить общее представление решений уравнения (8). Например, набор, связанный с (15_1) состоит из (17_1) и

$$a_y \equiv c_z, \quad h_2 \equiv \varphi_1(x,y)\psi_1(x,z), \tag{18}$$

где φ_1, ψ_1 — непрерывные функции. Понятно, что φ_1, ψ_1 нельзя считать произвольными: они просто характеризуют структуру h_2. Функция Римана для (15_1) есть

$$J_0\Big[2\Big(\int\limits_y^{\tau}\varphi_1(x,\tau)d\tau\int\limits_{\zeta}^{z}\psi_1(x,\zeta)d\zeta\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\exp\Big(\int\limits_{\zeta}^{z}a(t,\tau,\zeta)d\zeta+\int\limits_{\tau}^{y}c(x,\eta,z)d\eta\Big). \tag{19}$$

Общее представление решений, очевидно, будет содержать произвольную функцию $\omega_1(y,z)$ и еще два граничных значения задачи Гурса, которые рассматриваются как произвольные функции.

Аналогичная ситуация будет в случаях (15_2), (15_3). Наборы типа (18) здесь получаются соответственно добавлением к (17_2) или (17_3) тождеств $a_x \equiv b_z$, $h_1 \equiv \varphi_2(x,y)\psi_2(y,z)$, или $c_x \equiv b_y$, $h_5 \equiv \varphi_3(x,z)\psi_3(y,z)$. Формулы, играющие роль (19), тоже легко записываются.

Заметим, что каждый из трех обсуждаемых наборов содержит пять тождеств, в то время как набор условий, указанный в п. 1 для построения функции Римана уравнения (8), состоит из семи тождеств.

Рассмотрим кратко еще четырехмерный аналог уравнений (1), (8) [3; 4, с. 46; 12]:

$$\begin{aligned} u_{xyzt} + au_{xyz} + bu_{xyt} + cu_{xzt} + du_{yzt} + eu_{xy} + fu_{xz} + gu_{xt} + \\ + hu_{yz} + ku_{yt} + su_{zt} + mu_x + nu_y + pu_z + qu_t + ru = G \end{aligned} \tag{20}$$

с коэффициентами из C, причем у каждого коэффициента существует и принадлежит тому же классу та частная производная, которая берется в соответствующем слагаемом от u: a_{xyz}, $b_{xyt}, \ldots, q_t$, r, $G \in C$.

Роль $h_1, \ldots, h_9$ здесь играют конструкции $\sigma_1 = a_z + ab - e$, $\sigma_2 = b_t + ab - e$, $\sigma_3 = a_y + ac - f$, $\sigma_4 = c_t + ac - f$, $\sigma_5 = a_x + ad - h$, $\sigma_6 = d_t + ad - h$, $\sigma_7 = b_y + bc - g$, $\sigma_8 = c_z + bc - g$, $\sigma_9 = b_x + bd - k$, $\sigma_{10} = d_z + bd - k$, $\sigma_{11} = c_x + cd - s$, $\sigma_{12} = d_y + cd - s$, $\sigma_{13} = e_x + de - n$, $\sigma_{14} = h_z + bh - n$, $\sigma_{15} = k_t + ak - n$, $\sigma_{16} = e_y + ce - m$, $\sigma_{17} = g_t + ag - m$, $\sigma_{18} = f_z + bf - m$, $\sigma_{19} = f_x + df - p$, $\sigma_{20} = h_y + ch - p$, $\sigma_{21} = s_t + as - p$, $\sigma_{22} = g_x + dg - q$, $\sigma_{23} = k_y + ck - q$, $\sigma_{24} = s_z + bs - q$,

$\sigma_{25} = n_y + cn - r$, $\sigma_{26} = m_x + dm - r$, $\sigma_{27} = p_z + bp - r$, $\sigma_{28} = q_t + aq - r$. Если обозначить

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{yzt} + au_{yz} + bu_{yt} + cu_{zt} + gu_t + eu_y + fu_z + mu, \\ u_2 &= u_{xzt} + au_{xz} + bu_{xt} + du_{zt} + ku_t + eu_x + hu_z + nu, \\ u_3 &= u_{xyt} + au_{xy} + cu_{xt} + du_{yt} + fu_x + hu_y + su_t + pu, \\ u_4 &= u_{xyz} + bu_{xy} + cu_{xz} + du_{yz} + gu_x + ku_y + su_z + qu, \end{aligned} \tag{21}$$

то уравнение (20) можно представить в формах:

$$\begin{aligned} u_{1x} + du_1 &= \sigma_5 u_{yz} + \sigma_9 u_{yt} + \sigma_{11} u_{zt} + \sigma_{13} u_y + \sigma_{19} u_z + \sigma_{22} u_t + \sigma_{26} u + G, \\ u_{2y} + cu_2 &= \sigma_3 u_{xz} + \sigma_7 u_{xt} + \sigma_{12} u_{zt} + \sigma_{16} u_x + \sigma_{20} u_z + \sigma_{23} u_t + \sigma_{25} u + G, \\ u_{3z} + bu_3 &= \sigma_1 u_{xy} + \sigma_8 u_{xt} + \sigma_{10} u_{yt} + \sigma_{14} u_y + \sigma_{18} u_x + \sigma_{24} u_t + \sigma_{27} u + G, \\ u_{4t} + au_4 &= \sigma_2 u_{xy} + \sigma_4 u_{xz} + \sigma_6 u_{yz} + \sigma_{15} u_y + \sigma_{17} u_x + \sigma_{21} u_z + \sigma_{28} u + G. \end{aligned} \tag{22}$$

Подобно (16), соотношения (22) можно подтвердить непосредственным вычислением. Очевидно, в случае тождественного обращения в нуль всех σ_k, стоящих в какой-либо формуле из (22), функция u_m из этой же формулы определяется в квадратурах, а соответствующее уравнение в (21) приобретает вид (8). Далее остается воспользоваться либо рассуждениями из п. 1, либо из п. 2. В первом случае мы получим набор из семи тождеств, а во втором — три набора по пять тождеств. Ясно, что общее количество наборов, выписываемых для всех случаев (21), определяет 16 вариантов условий, обеспечивающих отыскание общего представления решений уравнения (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. *Жегалов В. И.* Трехмерный аналог задачи Гурса // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. С. 94–98.
3. *Жегалов В. И., Севастьянов В. А.* Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, N 10. С. 1429–1430.
4. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казанское мат. о-во. 2001.
5. *Copson E. T.* On the Riemann – Green function // Jorn. Rat. Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 324–348.
6. *Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н.* Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения. Самара: Самарский ун-т. 1995.
7. *Жегалов В. И., Котухов М. П.* Об интегральных уравнениях для функции Римана // Изв. вузов. Математика. 1998. N 1. С. 26–30.
8. *Чуриков Ф. С., Мащенко И. П.* Построение функции Римана для уравнения $u_{xy} + \varphi(x)\psi(y)u = 0$ // Науч. тр. Краснодарского политехн. ин-та. 1970. Вып. 30. С. 19–25.
9. *Жегалов В. И.* О трехмерной функции Римана // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, N 5. С. 1074–1079.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
11. *Жегалов В. И., Баринова Н. В.* Каскадное интегрирование в трехмерном пространстве // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2001. Т. 11. С. 90–92.
12. *Миронов А. Н.* О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, N 12. С. 1698–1701.

Жегалов Валентин Иванович
Россия, Казань, Казанский государственный университет
`Valentin.Zhegalov@ksu.ru`