УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ 2D-3D СИСТЕМЫ НАВЬЕ – СТОКСА С НЕСТАНДАРТНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

У. У. Абылкаиров

В работе исследована обратная задача протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса с нестандарными граничными условиями. Получены априорные оценки решения обратной задачи, достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи, доказана фредгольмова разрешимость искомой обратной задачи протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса.

Рассматривается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи, то есть определения тройки функций $\{\vec{v}(t,x), \nabla p(x,t), \vec{f}(x)\}$, удовлетворяющих в $Q \equiv (0,T)\times\Omega$ 2D-3D линеаризированной системе Навье – Стокса

$$\partial_t \vec{v} + \operatorname{grad} p = v\Delta\vec{v} + \vec{f}(x)\cdot\vec{g}(x,t), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{0.1}$$

начальному условию

$$\vec{v}(0,x) = \vec{v}_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{0.2}$$

нестандартным граничным условиям

$$\vec{v}(t,x) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^{0,T} \equiv [0,T]\times\Gamma^0, \tag{0.3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = |\vec{v}| \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} \equiv [0,T]\times\Gamma^1, \tag{0.4}$$

$$p(x,t) = \varphi(t) + \mathrm{const} \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} \equiv [0,T]\times\Gamma^1 \tag{0.5}$$

и дополнительным условиям финального переопределения

$$\vec{v}(x,T) = \vec{v}_T \quad \text{на} \quad \Omega_T, \tag{0.6}$$

$$\nabla p(x,T) = \nabla\pi_T \quad \text{на} \quad \Omega_T, \tag{0.7}$$

описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости в области Ω. Здесь $\vec{v}$ и p — скорость и давление жидкости соответственно, $v = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $\vec{f}$ — объемная плотность внешних сил, $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω, $\vec{v}_0$, $\varphi(t)$, $\vec{v}_T$, $\nabla\pi_T$ — заданные функции.

Задачи такого типа называют обратными задачами для системы Навье – Стокса и они возникают в математической физике, теории управления гидродинамическими потоками.

Одной из актуальных проблем является разрешимость обратных начально-краевых задач для уравнений математической физики, до настоящего времени не доказаны общие теоремы однозначной разрешимости прямых задач для систем Навье – Стокса, Эйлера. В теории обратных задач математической физики среди основных задач рассматривается задача по восстановлению неизвестных правых

частей, используя дополнительные финальные условия. До недавнего времени не было результатов по теории разрешимости обратных задач для системы Навье – Стокса. Первые результаты о корректности многомерной обратной задачи для системы (0.1)–(0.7) появились в 1989–1990 гг. в работах [1, 2] и автора [3, 4].

В первой части работы рассматривается вспомогательная задача с нестандартными условиями для системы Стокса, которая также имеет самостоятельный интерес. Результаты этой части дают основание для построения "базисных" функций для метода Фаэдо – Галеркина, выбора функциональных пространств, которым принадлежат решения начально-краевой задачи для 2D-3D системы Навье – Стокса. Далее, во второй части получены априорные оценки на решения искомой задачи протекания, доказаны теоремы существования и единственности сильных решений задачи протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса. В третьей части работы получены априорные оценки решения обратной задачи, достаточные условия существования и единственности решения обратной задачи, доказана фредгольмова разрешимость искомой обратной задачи протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса.

1. Стационарная задача Стокса

1.1. Постановка краевой задачи. Пусть Ω — ограниченной область пространства R^d, $d = 2, 3$, с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Предположим, что существуют такие открытые непересекающиеся подмножества Γ^0, Γ^1 границы Γ, что $\Gamma = \overline{\Gamma}^0 \cup \overline{\Gamma}^1$ и непроницаемая стенка $\Gamma^0 \in C^2$, участок границы протекания жидкости $\Gamma^1 \in C^2$. Будем рассматривать ниже краевую задачу для системы Стокса

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{v} + \operatorname{grad} p = \vec{f} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\vec{v}(x) = 0, \quad x \in \Gamma^0, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\vec{v}\cdot\vec{n} = |\vec{v}|, \quad x \in \Gamma^1 \\ &p = \text{const}, \quad x \in \Gamma^1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{v}$ и p — соответственно вектор скорости и давление, $\nu = \text{const} > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $\vec{f}$ — объемная плотность внешних сил.

В условии (1.3) постоянную в правой части фиксируем условием $\int_\Omega p\,dx = 0$.

1.2. Функциональные пространства. Главную роль при исследовании разрешимости задачи протекания будет играть функциональное множество [5]

$$W(\Omega) = \left\{ \vec{v}(x) \in C^2(\Omega): \ \operatorname{div}\vec{v} = 0 \ \text{в} \ \Omega, \ \vec{v} = 0 \ \text{на} \ \Gamma^0, \ \vec{v}\cdot\vec{n} = |\vec{v}| \ \text{на} \ \Gamma^1 \right\}.$$

Обозначим через $V^0(\Omega) = \overline{W}^{L^2(\Omega)}$ — пополнение множества $W(\Omega)$ в норме $L^2(\Omega)$. Обозначим через $V^1(\Omega)$ — пополнение множества $W(\Omega)$ по норме, соответствующей следующему скалярному произведению

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial\vec{u}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{\Gamma^1} \sigma(s)(\vec{u},\vec{v})\,ds,$$

где $\sigma(s)$ — удвоенная средняя кривизна границы в точке $s \in \Gamma^1$.

Введем теперь следующие предположения на Ω, участки Γ^0, Γ^1.

(i) Ω — ограниченная конечно-связная область в пространстве R^d с гладкой границей $\Gamma \in C^2$, состоящей из N связных компонент Γ^i, $i = 1, 2, \ldots, N$. При этом (открытые) участки Γ^0, Γ^1 границы Γ удовлетворяют условиям:

$$\Gamma^1 \neq \emptyset, \quad \Gamma^i \cap \Gamma^j = \emptyset \quad (i \neq j,\ i, j = 0, 1), \quad \Gamma^j \in C^2 \quad (j = 0, 1), \quad \Gamma = \overline{\Gamma}^0 \cup \overline{\Gamma}^1.$$

Замечание. При предположении о неотрицательности $\sigma(s)$ ясно в силу условия (i), что пространства $V^0(\Omega), V^1(\Omega)$ являются гильбертовыми, более того, оказывается, что норма в $V^1(\Omega)$ эквивалентна норме пространства $W^{1,2}(\Omega)$.

Введем следующие пространства, тесно связанные с искомой задачей (1.1)–(1.3),

$$L^2_0(\Omega) = \{\varphi(x) \in L^2(\Omega) : \int\limits_\Omega \varphi\, dx = 0\},$$

$$G(\Omega) = \left\{ g \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^2_0(\Omega) : \ g(x) = \mathrm{const},\ x \in \Gamma^1 \right\},$$

$$\overset{0}{J}(\Omega) = \overline{\{\vec{v} \in C_0^\infty(\Omega), \ \ \operatorname{div} \vec{v} = 0\}}^{\,L^2(\Omega)},$$

$$\overset{1}{J}(\Omega) = \overline{\{\vec{v} \in C_0^\infty(\Omega), \ \ \operatorname{div} \vec{v} = 0\}}^{\,V^1(\Omega)}.$$

Справедлива следующая теорема о разложении пространства $L^2(\Omega)$.

Теорема 1.1. *Ортогональным дополнением в пространстве $L^2(\Omega; R^d)$ к множеству $V^0(\Omega)$ является множество $G(\Omega)$, в соответствии с этим имеет место разложение*

$$L^2(\Omega) = V^0(\Omega) \oplus G(\Omega). \tag{1.4}$$

Доказательство. Ортогональность $V^0(\Omega)$ и $G(\Omega)$ очевидна. Пусть $\vec{v} \in L^2(\Omega)$. Тогда $(\vec{v}, \vec{u})_{2,\Omega}$ — линейный непрерывный функционал над $V^0(\Omega)$. Следовательно, по теореме о представлении существует единственный элемент $\vec{w} \in V^0(\Omega)$ такой, что $(\vec{v}, \vec{u})_{2,\Omega} = (\vec{w}, \vec{u})_{2,\Omega}$ для произвольного $\vec{u} \in V^0(\Omega)$. Нам известно, что $\overset{0}{J}(\Omega) \subset V^0(\Omega)$. Тогда написанное выше равенство верно при любом $\vec{u} \in \overset{0}{J}(\Omega)$. В силу известной теоремы [6] отсюда следует, что $\vec{v} - \vec{w} = \nabla g$, где $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Из определения вектора $\vec{w}$ вытекает, что при произвольном $\vec{u} \in W(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int\limits_\Omega \nabla g \cdot \vec{u}\, dx = \int\limits_\Gamma \nabla g\, (\vec{u} \cdot \vec{n})\, ds. \tag{1.5}$$

Пусть $\int\limits_{\Gamma^1} \psi\, ds = 0$, где $\psi \in C_0^2(\Gamma^1)$, и ввиду того, что $C_0^2(\Gamma^1)$ плотно в $L^2(\Gamma^1)$, существует соленоидальная в Ω вектор-функция $\vec{u} \in W(\Omega)$ такая, что $\vec{u} \cdot \vec{n} = \psi$ для любого $x \in \Gamma^1$. Следовательно, из (1.5) получим

$$\int\limits_{\Gamma^1} g \cdot \psi\, ds = 0 \quad \text{для любой функции} \quad \psi \in L^2_0(\Omega).$$

Поскольку $L^2(\Gamma^1) = L^2_0(\Gamma^1) \oplus R_1(\Gamma^1)$, где $R_1(\Gamma^1) = \{\, \vec{u} \in L^2(\Gamma^1) : \ \vec{u} = \mathrm{const},\ x \in \Gamma^1 \,\}$, то получаем $g \in R_1(\Gamma^1)$. Отсюда $g \in G(\Omega)$ определяется единственным образом после нормировки

$$\int\limits_\Omega g\, dx = 0.$$

Теорема доказана.

1.3. Дифференциальные свойства обобщенного решения. Приведем предварительные утверждения, необходимые нам при исследовании гладкости обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3).

Лемма 1.1. *Пусть $\Omega_1 \subset \Omega$ такова, что расстояние от $\overline{\Omega}_1$ до Γ^1 $\rho(\overline{\Omega}_1, \Gamma^1)$ положительно. Тогда при $\vec{f} \in L^2(\Omega)$ обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) $\vec{v} \in W^{2,2}(\Omega_1)$ и удовлетворяет с некоторым $\nabla p \in L^2(\Omega_1)$ уравнению (1.1) в сильном смысле. Кроме того, верна оценка*

$$\|\nabla p\,\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\vec{v}\|_{W^{2,2}(\Omega_1)} \leq C(\rho, \nu)\, \|\vec{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.6}$$

На основании оценки (1.6) для областей указанного вида (i) для решений задачи (1.1)–(1.3) имеем оценку

$$\|\nabla p\,\|_{L^2(\Omega)} + \nu\|\vec{v}\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\vec{f}\|_{L^2(\Omega)} = C(\Omega)\nu\|\Delta_1\vec{v}\|_{2,\Omega}. \tag{1.7}$$

Вернемся к задаче (1.1)–(1.3). В соответствии с разложением (1.4) введем ортопроектор из $L^2(\Omega)$ на $V^0(\Omega)$ так, что

$$P\, L^2(\Omega) = V^0(\Omega),$$

и применим его к уравнению (1.1), считая, что каждое слагаемое в нем есть элемент из $L^2(\Omega)$. Результат запишем в виде

$$-\nu\Delta_1\vec{v} = P\,\vec{f}, \quad \text{где} \quad \Delta_1 = P\,\Delta. \tag{1.8}$$

Оператор Δ_1 рассмотрим как неограниченный оператор в пространстве $V^0(\Omega)$ и назовем его оператором Стокса.

Для удобства будем считать, что $\vec{f}$ в (1.1) и (1.8) принадлежит $V^0(\Omega)$, и переформулируем задачу (1.1)–(1.3) как задачу нахождения $\vec{v}$, подчиняющегося требованиям

$$-\nu\Delta_1\vec{v} = \vec{f}, \quad \vec{v} \in V^1(\Omega) \subset V^0(\Omega). \tag{1.9}$$

Теперь для определенного выше (1.9) оператора Δ_1, сопоставляющего обобщенному решению задачи (1.1)–(1.3) соответствующую правую часть $\vec{f} \in V^0(\Omega)$:

$$-\nu\Delta_1\vec{u} = \vec{f},$$

обозначим совокупность всех решений задачи (1.1)–(1.3), отвечающих всевозможным $\vec{f} \in V^0(\Omega)$, через $D(\Delta_1)$.

В силу определяющих тождеств и априорных оценок, легко установить, что оператор Δ_1 замкнут и симметричен на $D(\Delta_1)$.

Так как помимо этого Δ_1 обратим и область значения оператора Δ_1 совпадает со всем пространством $V^0(\Omega)$, то Δ_1 является самосопряженным [7]. Более того, Δ_1^{-1} вполне непрерывен, поэтому верно утверждение, аналогичное тому, которое установлено в [6] об операторе линейной задачи в случае задачи Дирихле. Тем самым справедлива

Лемма 1.2. (i) *Неограниченный оператор Δ_1, определенный на $V^1(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega) \subset V^0(\Omega)$ как произведение $P\,\Delta$, допускает самосопряженное, положительно-определенное расширение по Фридрихсу. Его спектр дискретен, отрицателен и может быть упорядочен так: $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots,\ \lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$. Система обобщенных собственных функций $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ для Δ_1 может быть ортонормирована в $V^0(\Omega)$. Она является базисом в $V^0(\Omega)$ и в $V^1(\Omega)$.*

(ii) *Если* $\vec{f} \in L^2(\Omega)$ *и* $\partial\,\Omega \subset C^2$, *то* $\vec{v} \in W^{2,2}(\Omega), \nabla p \in L^2(\Omega)$ *и для них верна оценка* (1.7) *и система* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *собственных функций оператора* Δ_1, *являющихся решениями задачи*

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{\psi}_k + \nabla p = \lambda_k\vec{\psi}_k, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div}\vec{\psi}_k = 0, \quad x \in \Omega, \\ \vec{\psi}_k = 0, \quad x \in \Gamma^0; \quad \vec{\psi}_k \cdot \vec{n} = |\vec{\psi}_k|, \quad x \in \Gamma^1; \quad \nabla p_k \in G(\Omega), \end{cases} \tag{1.10}$$

является базисом и в $V^1(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$.

2. Прямая задача протекания для нестационарной линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса

2.1. Постановка прямой задачи с нестандартными граничными условиями для нестационарной системы Стокса. Пусть Ω — ограниченная область пространства R^d, $d = 2, 3$, с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Предположим, что существуют открытые непересекающиеся подмножества Γ^0, Γ^1 границы Γ такие, что $\Gamma = \overline{\Gamma}^0 \cup \overline{\Gamma}^1$, непроницаемая стенка $\Gamma^0 \in C^2$, участок границы протекания жидкости $\Gamma^1 \in C^2$. Рассмотрим в $Q = \Gamma \times (0, T]$ прямую начально-краевую задачу для определения пары функции

$$\partial_t\vec{v} - \nu\Delta\vec{v} + \operatorname{grad} p = \vec{f}(x) \cdot g(x,t), \ \operatorname{div}\vec{v} = 0, \ (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T), \tag{2.1}$$

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.2}$$

$$\vec{v}(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^{0,T} = \Gamma^0 \times (0,T), \tag{2.3}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times (0,T), \tag{2.4}$$

$$p(x,t) = \varphi(t) + \text{const} \quad \text{на} \quad \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times (0,T), \tag{2.5}$$

Классический метод исследования разрешимости этой задачи — стандартное сведение неоднородных условии к однородным в данном случае непригоден.

В настоящем случае используем результаты пп. 1.2, 1.3, введенные функциональные пространства $V^0(\Omega), V^1(\Omega)$ и др. и результаты спектрального анализа для стационарной системы Стокса (1.10).

2.2. Регулярность. Априорные оценки задачи (2.1)–(2.5). Относительно решения задачи (2.1)–(2.5) докажем следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $\vec{F} \in L^2(0,T; V^0(\Omega))$, $\vec{v}_0(x) \in V^0(\Omega)$, $\vec{v}_0(x) \in V^1(\Omega)$ *соответственно случаю* (i), *случаям* (ii),(iii). *Тогда существует константа c, зависящая только от данных задачи, такая, что справедливы оценки для гладких решений задачи* (2.1)–(2.5)

(i)

$$\max_{0 \le t \le T} \|\vec{v}(t)\|^2_{V^0(\Omega)} + \|\vec{v}\|^2_{L^2(0,T;\,V^1(\Omega))} \le \|\vec{F}\|^2_{L^2(Q)} + \|\vec{v}_0\|^2_{V^0(\Omega)}; \tag{2.6}$$

(ii) $\vec{v}_t$, $\Delta_1\vec{v} \in L^2(Q)$, $\vec{v}_{xx}$, $\nabla p \in L^2(\Omega' \times (0,T))$, $\Omega' \Subset \Omega$ *и* $\vec{v} \in C([0,T]; V^1(\Omega))$

$$\max_{0 \le t \le T} \|\vec{v}(t)\|^2_{V^1(\Omega)} + \|\vec{v}_t(t)\|^2_{2,\,Q_t} + \|\Delta_1\vec{v}\|^2_{2,\,Q_t} \le \|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} + \|\vec{F}\|^2_{2,\,Q_t}, \ \ t \in [0,T]; \tag{2.7}$$

(iii) *если при условиях* (i) $\Gamma = \partial\Omega \subset C^2$, *то* $\vec{v}_{xx}$, ∇p *принадлежат* $L^2(\Omega)$ *и для них верны оценки*

$$\|\vec{v}_{xx}\|^2_{2,\,Q_t} + \|\nabla p\|_{2,\,Q_t} \le 2C(\Omega)(\|\vec{v}_0\|^2_{V^1(\Omega)} + \|\vec{F}\|^2_{2,\,Q_t}), \quad t \in [0,T]. \tag{2.8}$$

2.3. Доказательство существования и единственности решения задачи (2.1)–(2.5).

В случае $\partial\Omega \in C^2$ утверждение существования и единственности сильного обобщенного решения задачи (2.1)–(2.5) можно доказать по крайней мере двумя способами.

Первый способ. Эта задача может быть редуцирована к задаче Коши для одного операторного уравнения

$$\frac{dv(t)}{dt} + A_1 v(t) = f(t), v|_{t=0} = v_0, A_1 = -\Delta_1 = -P\Delta, \qquad (2.9)$$

в гильбертовом пространстве $V^0(\Omega)$. Свойства оператора A_1 описаны в пп. 1.2, 1.3. Для случая областей Ω с негладкими границами область $D(A_1)$ определения A_1 составляет некоторую часть множества $V^1(\Omega) \cap W^{2,2}_{loc}(\Omega)$, а в случае областей с $\partial\Omega \in C^2$ $D(A_1) = V^1(\Omega) \cap W^{2,2}_{loc}(\Omega)$. Во всех случаях A_1 является на $D(A_1)$ самосопряженным, положительно определенным оператором.

Теория полугрупп предоставляет элегантный метод построения решения задачи (2.9). Следует отметить, однако, что для применения этой техники, необходимо, чтобы коэффициенты уравнения (2.1) не зависели от t, тогда как метод Фаэдо – Галеркина можно применять без этого ограничения. И мы будем придерживаться последнего метода.

Второй способ. Но, прежде всего, надо дать определение сильного обобщенного решения (искомой) задачи (2.1)–(2.5).

Определение. Двойку $(\vec{v}(x,t), p(x,t))$ удовлетворяющие условиям:
(i) $\vec{v} \in L^2(0, T;\, V^2(\Omega))$, $\partial_t \vec{v} \in L^2(Q)$, $\nabla p \in L^2(0,T; G(\Omega))$;
(ii) $\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x)$;
(iii) $\partial_t \vec{v} + \operatorname{grad} p = \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}$, $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ почти всюду в Q
называем *сильным решением* задачи (2.1)–(2.5). Здесь $V^2(\Omega) \equiv V^1(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\vec{f}(x,t) \in L^2(Q)$, $\vec{v}_0(x) \in V^1(\Omega)$. *Тогда задача протекания* (2.1)–(2.5) *имеет единственное сильное решение*

$$\vec{v}(x,t) \in L^2(0, T;\, V^2(\Omega)) \cap W^{1,\,2}(0, T;\, L^2(\Omega)),\ \nabla p \in L^2(0, T; G(\Omega)).$$

Доказательство проводится методом Фаэдо – Галеркина, в качестве базиса в гильбертовом пространстве $V^2(\Omega)$ возьмем собственные функции оператора Δ_1 с нестандартными граничными условиями, которые, как это установлено в лемме 1.2, образуют полную ортонормированную систему в $V^0(\Omega)$, являются ортогональными в пространстве $V^1(\Omega)$ и являются базисом в $V^2(\Omega)$.

3. Обратная задача протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса.

3.1. Постановка задачи. Вспомогательные утверждения. Пусть $\Omega \subset R^d$, $d = 2,3$, ограниченная область с границей $\Gamma = \partial\Omega$, состоящей из связных компонент Γ^0, Γ^1. Рассмотрим в $Q = \Omega \times (0, T)$ обратную задачу определения тройки функции $\{\vec{v}(t,x), \nabla p(x,t), \vec{f}(x)\}$, удовлетворяющих линеаризованной 2D-3D системе Навье – Стокса

$$\vec{v}_t - \nu\,\Delta\vec{v} + \operatorname{grad} p = \vec{f}(x)\cdot\vec{g}(x,t), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \text{в} \quad Q, \qquad (3.1)$$

начальному условию
$$\vec{v}(0,x)=\vec{v}_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{3.2}$$
нестандартным граничным условиям
$$\vec{v}(t,x)=0,\quad (x,\,t)\in\Sigma^{0,T}=\Gamma^0\times[0,T], \tag{3.3}$$
$$\vec{v}\cdot\vec{n}=|\vec{v}|,\quad (x,\,t)\in\Sigma^{1,T}=\Gamma^1\times[0,T], \tag{3.4}$$
$$p(x,t)=\varphi(t)+\mathrm{const},\quad (x,\,t)\in\Sigma^{1,T}=\Gamma^1\times[0,T], \tag{3.5}$$
и дополнительным условиям финального переопределения
$$\vec{v}(x,T)=\vec{v}_T\quad \text{на}\quad \Omega_T, \tag{3.6}$$
$$\nabla p(x,T)=\nabla\pi_T\quad \text{на}\quad \Omega_T. \tag{3.7}$$

Обратная задача восстановления правой части 2D-3D системы Навье – Стокса в области $Q_\infty=\Omega\times[0,\infty)$ с однородными граничными условиями Дирихле исследована в [1–4, 8].

В этой постановке она ставится впервые, такого рода задачи часто возникают в математической физике при исследовании гидродинамических потоков, как составная часть — при исследовании тепловых, диффузионных процессов, когда область физических характеристик рассматриваемой среды недоступна для непосредственного измерения. Отличительной чертой этой обратной задачи является соответствующие граничные условия (3.3)–(3.5), которые принято называть нестандартными граничными условиями. Выбор таких и подобных граничных условии, наиболее адекватно отражающих физическую картину поведения жидкости на границе рассматриваемой области для исследования соответствующих краевых задач для системы (3.1), сделаны в [9, 10].

В третьей части работы мы сведем данную обратную задачу (3.1)–(3.7) к операторному уравнению второго рода с компактным оператором. При некоторых дополнительных условиях, добавленных к условиям прямой задачи п. 2 можно доказать однозначную разрешимость соответствующей обратной задачи.

Для этого выведем операторное уравнение для неизвестной функции $\vec{f}(x)$. Для корректного введения оператора T_g при фиксированной $g(x,t)$ и любой $\vec{f}(x)\in L^2(\Omega)$ мы можем по теореме 2.2 найти единственное решение $\vec{v}(x,t)\in W_2^{2,1}(Q)\cap L^2(0,T;V^1)$ и сопоставить его произвольной $\vec{f}(x)\in L^2(\Omega)$. При $\vec{F}_t\in L_{2,1}(Q)$ и $\vec{v}_T\in W^{2,2}(\Omega)\cap V^1(\Omega)$ мы имеем следующие априорные оценки
$$\max_{0\le t\le T}\left(\|\vec{v}_t\|_{2,\Omega}+\|\Delta\vec{v}\|_{2,\Omega}+\|\nabla p\|_{2,\Omega}\right)\le c<\infty,$$
(см. [11]). Поэтому, учитывая вышесказанное, определим линейный оператор T_g следующим образом
$$T_g:\vec{f}\in L^2(\Omega)\mapsto\vec{v}_t(x,T)\in L^2(\Omega). \tag{3.8}$$
Другой линейный оператор $S:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ введем с помощью следующего соотношения
$$(S\vec{f})(x)=\frac{1}{g(x,T)}\cdot(T_g\vec{f})(x). \tag{3.9}$$
Тем самым, если $\vec{f}\cdot g\in L^2(Q)$, $\vec{F}_t=\vec{f}\cdot g_t\in L_{2,1}(Q)$ и дополнительно $g(x,t),g_t\in C(\overline{Q})$, $|g(x,T)|\ge g_T>0$ при $x\in\Omega$, можем найти след при $t=T$ соотношения (3.1)
$$\vec{v}(x,T)-\nu\Delta\vec{v}_T=-\nabla\pi_T+\vec{f}(x)g(x,T). \tag{3.10}$$

Обозначим через
$$\vec{\aleph} = \frac{1}{g(x,T)}(\nu\Delta\vec{v}_T - \nabla\pi_T(x)). \tag{3.11}$$
Запишем (3.10) в терминах вновь в (3.8)–(3.9) введенных операторов T_g, S следующим образом
$$S\vec{f} = \vec{f} + \vec{\aleph}. \tag{3.12}$$

3.2 Фредгольмова разрешимость обратной задачи (3.1)–(3.7). Следующая теорема говорит об эквивалентности исходной обратной задачи (3.1)–(3.7) и операторного уравнения (3.12) для любого $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$ *и дополнительно* $g(x,t), g_t \in C(\overline{Q}), |g(x,T)| \geq g_T > 0$ *при* $x \in \Omega$. *Тогда для того чтобы тройка функций* $\{\vec{v}, \nabla p, \vec{f}\}$ *была единственным решением обратной задачи* (3.1)–(3.7), *необходима и достаточна однозначная разрешимость уравнения* (3.12) *при любом* $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть обратная задача (3.1)–(3.7) однозначно разрешима для любых $\vec{v}_T, \nabla\pi_T, g(x,t)$ из соответствующих классов. Тогда с учетом $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$ мы получим след при $t = T$ для соотношения (3.1), т. е. (3.10). Далее, преобразуем (3.10), используя введенные операторы T_g, S и $\vec{\aleph}$, следующим образом
$$\vec{f}(x) = \vec{v}_t(x,T)/g(x,T) - (\nu\Delta\vec{v}_T - \nabla\pi_T)/g(x,T),$$
т. е. $\vec{f} = S\vec{f} - \vec{\aleph}$. Отсюда получим (3.12) для любого $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$.

Достаточность. Пусть уравнение (3.12) имеет единственное решение при $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$, т. е. мы имеем единственную $\vec{f}(x)$. Следовательно, по $\vec{f}$ которая является сомножителем, при фиксированной функций $g(x,t)$ в правой части $\vec{F}(x,t) = \vec{f}(x)g(x,t)$ прямой задачи находим единственное решение $\vec{v} \in W_2^{2,1}(Q), \nabla p \in L^2(Q)$ задачи (2.1)–(2.5). Тем самым мы получили единственную тройку функции $\{\vec{v}, \nabla p, \vec{f}\}$, которая удовлетворяет условиям переопределения.

Покажем, что найденные $\vec{v}$ и ∇p удовлетворяют условиям переопределения (3.6)–(3.7). Предположим, что $\vec{v}(x,T) = \vec{v}_T^1(x)$ и $\nabla p(x,T) = \nabla\pi_T^1$ при $x \in \Omega$. Тогда для разностей функций $\vec{v}^* = \vec{v}_T^1 - \vec{v}_T, \nabla p^* = \nabla\pi_T^1 - \nabla\pi_T$ получим стандартным образом линейную стационарную задачу Стокса
$$-\nu\Delta\vec{v}^* + \nabla p^* = 0, \quad \mathrm{div} = \vec{v}^* = 0,$$
$$\vec{v}^* = 0, \quad x \in \Omega.$$
Для этой задачи справедливо равенство
$$\nu\|\nabla\vec{v}^*\|^2_{2,\Omega} = 0.$$
Поэтому по определению нормы мы имеем $\vec{v}_T^1 = \vec{v}_T, \nabla\pi_T^1 = \nabla\pi_T$. Следовательно, $\vec{v}, \nabla p$ удовлетворяют условиям переопределения (3.6)–(3.7).

Теорема доказана.

В данной работе утверждение об однозначной разрешимости соответствующих обратных задач можно доказать либо при условии определенной малости входящих в условие задачи данных, либо дополнительном условии, а именно,
$$g(x,t), g_t \in C(\overline{Q}), \quad (x,t) \in Q; \quad |g(x,T)| \geq g_T > 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.13}$$

Мы будем придерживаться ограничений на коэффициент $g(x,T)$ посредством условий (3.13) и докажем фредгольмову разрешимость обратной задачи (3.1)–(3.7).

Теорема 3.2. *Пусть выполняются* (3.13), $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega)\cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$. *Пусть* $\partial\Omega \in C^2$ *и выполнено*

$$\frac{1}{\inf\limits_{\Omega}|g(x,T)|}\left(\sup\limits_{\Omega}|g(x,0)|\exp\Big(-\frac{\nu T}{d^2}\Big)+\int\limits_0^T\sup\limits_{\Omega}|g_t(x,t)|\exp\Big(-\frac{\nu(T-t)}{d^2}\Big)\,dt\right)<1.$$

Тогда существует единственное решение обратной задачи (3.1)–(3.7) *и справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|v_{xx}\|^2_{2,Q_t}+\|v_t\|^2_{2,Q_t}+\|\nabla p\|^2_{2,Q_t}\\&\quad\le C^2(\Omega)\left(\int\limits_0^T\sup\limits_{\Omega}|g(x,t)|^2\,dt\right)^{1/2}\frac{C}{\inf\limits_{\Omega}|g(x,T)|}(\nu\|\Delta\vec{v}_T\|_{2,\Omega}+\|\nabla\pi_T\|_{2,\Omega}).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Доказательство. Установим более высокую гладкость сильного решения для задачи (2.1)–(2.5) пункта 2. Поэтому предположим, что $\vec{v}_0 \in V^1(\Omega)\cap W^{2,2}(\Omega)$, $\vec{F}(x,t)=\vec{f}(x)\cdot g(x,t)\in W^1_2(0,T;V^0(\Omega))$. Далее, продифференцируем (2.1) по t, в силу условий (2.1)–(2.5) получим

$$\partial_t\vec{u}-\nu\Delta\vec{u}+\operatorname{grad}q=\vec{f}(x)g_t(x,t),\quad \operatorname{div}\vec{u}=0,\quad (x,t)\in Q=\Omega\times(0,T),\tag{3.15}$$

$$\vec{u}(x,0)=\vec{u}_0(x),\quad x\in\Omega,\tag{3.16}$$

$$\vec{u}(t,x)=0,\quad (x,\,t)\in\Sigma^{0,T}=\Gamma^0\times[0,T],\tag{3.17}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=|\vec{u}|,\quad (x,\,t)\in\Sigma^{1,T}=\Gamma^1\times[0,T],\tag{3.18}$$

$$q(x,t)=\varphi_t(t)+\mathrm{const}\quad\text{на}\quad\Sigma^{1,T}=\Gamma^1\times[0,T],\tag{3.19}$$

где $\vec{u}(x,t):=\vec{v}_t(x,t)$, а начальное условие вывели из самого уравнения посредством $\vec{v}_t(x,0)=\vec{u}_0=P(\nu\Delta\vec{v}_0+\vec{f}g(x,0))$.

В силу п. 2 для решения $\vec{u}$ задачи (3.15)–(3.19) справедлива оценка

$$\|u_t\|^2_{2,\,Q_t}+\|u_{xx}\|^2_{2,\,Q_t}+\|\nabla q\|^2_{2,\,Q_t}\le C(\Omega)<\infty$$

и $\vec{u}(x,t)\in V_2^{1,0}(Q)$.

Для получения априорной оценки на $\vec{v}_t(x,T)$ мы умножим уравнение (3.14) скалярно на $\vec{u}$ в $L^2(\Omega)$. С учетом $V^1(\Omega)\subset V^0(\Omega)$, умножив полученное неравенство на $\exp(-\nu(T-t)/d^2)$, получим

$$\exp(-\nu(T-t)/d^2)\frac{d}{dt}\|\vec{u}(\cdot,t)\|_{V^0(\Omega)}+\frac{\nu}{d^2}\exp(-\nu(T-t)/d^2)\|\vec{u}(\cdot,t)\|_{V^0}\le\|\vec{F}_t(\cdot,t)\|_{2,\,\Omega}.\tag{3.20}$$

Проинтегрируем (3.20) по t от 0 до T и, наконец, для любого семейства решений (3.15)–(3.19) с возбуждающей силой вида $\vec{F}_t(x,t)=\vec{f}(x)\cdot g_t(x,t)$получим оценку

$$\begin{aligned}\|\vec{u}(\cdot,T)\|_{2,\,\Omega}=\|\vec{v}_t(\cdot,T)\|_{2,\,\Omega}&\le\|P(\vec{f}(x)\cdot g(x,0))\|_{2,\,\Omega}\exp(-\nu T/d^2)\\&\quad+\int\limits_0^T\|\vec{f}(x)\cdot g_t(x,T)\|_{2,\,\Omega}\exp(-\nu(T-t)/d^2)\,dt.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Таким образом, в силу определения оператора S оценку (3.21) можно переписать в терминах операторов следующим образом

$$\|S\vec{f}\|_{2,\,\Omega} \leq K\|\vec{f}\|_{2,\,\Omega}.$$

Тогда по теореме Банаха о неподвижной точке для некоторой константы $K < 1$, обеспечивающей строгую сжимаемость оператора, оператор S имеет единственную неподвижную точку при любом $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$. Следовательно, в силу эквивалентности постановки обратной задачи (3.1)–(3.7) и операторного уравнения (3.12) (см. теорему 3.1) искомая обратная задача (3.1)–(3.7) однозначно разрешима.

Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть выполняются* (3.13), $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$. *Тогда оператор S, введенный соотношением* (3.11), *является компактным из* $L^2(\Omega)$ *в* $L^2(\Omega)$.

Доказательство. В силу однозначной разрешимости задачи (2.1)–(2.5) и дифференциальных свойств решения $\vec{u} \in V_2^{1,0}(Q) \cap L^2(0,T;V^1(\Omega))$, $\|\vec{u}(\cdot,t)\|_{V^1(\Omega)}$ непрерывна на отрезке $[\varepsilon, T]$. Поэтому для $\tau^* \in [\varepsilon, T]$ справедлива равенство

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T} \|\vec{u}(\cdot,t)\|^2_{V^1(\Omega)}\,dt = (T-\varepsilon)\|\vec{u}(\cdot,\tau^*)\|^2_{V^1(\Omega)}. \tag{3.22}$$

Для $\vec{F}_t \in L^2(Q)$ аналитической основой для априорных оценок, достаточных для компактности оператора S, служат соотношения

$$\int\limits_{\tau^*}^{T}\int\limits_{\Omega} |\vec{u}_t - \nu\Delta_1\vec{u}|^2\,dxdt = \int\limits_{\tau^*}^{T}\int\limits_{\Omega} |P\vec{F}_t|^2\,dxdt. \tag{3.23}$$

Так как оператор проектирования P из $L^2(\Omega)$ на $V^0(\Omega)$ самосопряжен, учитывая условия (3.17)–(3.19) и интегрируя (3.23) по частям, получим

$$\nu\|\vec{u}(\cdot,T)\|^2_{V^1(\Omega)} + \int\limits_{\tau^*}^{T}\int\limits_{\Omega}(|\vec{u}_t|^2 + |\nu\Delta_1\vec{u}|^2)\,dxdt$$
$$= \int\limits_{\tau^*}^{T}\int\limits_{\Omega}|P\vec{F}_t|^2\,dxdt + \nu\|\vec{u}(\cdot,\tau^*)\|^2_{V^1(\Omega)}. \tag{3.24}$$

С учетом оценок (2.7)–(2.8), (3.22) получим из (3.24) следующую априорную оценку

$$\nu\|\vec{u}(\cdot,T)\|^2_{V^1(\Omega)} \leq \|P\vec{F}_t\|^2_{2,\,Q} + \frac{\nu}{T-\varepsilon}\|\vec{u}\|_{L^2(0,T;V^1(\Omega))}. \tag{3.25}$$

Для $\vec{u}(x,t) \in L^2(0,T;V^1(\Omega))$ при заданных функциях $\vec{F}_t \in L_{2,1}(Q)$, $\vec{u}_0 = P(\vec{f}(x)g(x,0))$ в силу априорной оценки (2.6) и (3.25), учитывая, что $\vec{u}(x,T) = \vec{v}_t(x,T)$, получим

$$\|\nabla\vec{v}_t(\cdot,T)\|^2_{2,\Omega} \leq c\|\vec{f}\|^2_{2,\Omega}. \tag{3.26}$$

Следовательно, в терминах оператора T_g, введенного соотношением (3.9) или (3.10), можно записать (3.26) как

$$\|\nabla(T_g\vec{f})\|^2_{2,\Omega} \leq c\|\vec{f}\|^2_{2,\Omega},$$

где константа c не зависит от $\vec{f}$.

Таким образом, применяя теорему вложения Соболева заключаем, что оператор T_g компактный. В силу этого линейный оператор S как линейная композиция оператора T_g и $g(x,T)$ компактен.

Теорема доказана.

Теорема 3.4. *При сделанных предположениях теорем* 3.2, 3.3 *обратная задача* (3.1)–(3.7) *является фредгольмово разрешимой, т. е. из единственности решения обратной задачи* (3.1)–(3.7) *следует существование решения этой задачи.*

Доказательство. В силу теоремы 3.1 нашу теорему достаточно доказать для (3.12) для любого $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$. В силу теоремы 3.3 оператор S является компактным. Поэтому утверждение теоремы для операторного уравнения (3.12) для любого $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$ следует из известных результатов функционального анализа (см., например, [12]).

Докажем единственность решения обратной задачи (3.1)–(3.7). Предположим противное. Пусть существует два различных решения $\{\vec{v}_1, \nabla p_1, \vec{f}_1\}$ и $\{\vec{v}_2, \nabla p_2, \vec{f}_3\}$ обратной задачи (3.1)–(3.7). Тогда в силу теоремы 3.2 существуют два различных решения (3.12) $\{\vec{f}_1\}$ и $\{\vec{f}_2\}$. При этом обязательно

$$\vec{f}_1(x) \neq \vec{f}_2(x), \tag{3.27}$$

т. к. иначе в силу единственности решения прямой задачи мы бы имели $\vec{v}_1(x,t) \equiv \vec{v}_2(x,t)$. Однако, условие (3.27) противоречит сжимаемости оператора S, поскольку обе функции $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ являются решениями одного и того же операторного уравнения (3.12).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васин И. А.* Постановка и исследования некоторых обратных задач для системы уравнений Навье – Стокса // Условно-корректные задачи математической физики. Тез. докл. Всесоюзной конф. Алма-Ата, 2–6 октября 1989 г. Красноярск, 1989. С. 30.

2. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Method for solving inverse problems in mathematical physics. Marcel Dekker, 2000. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 231).

3. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // Условно–корректные задачи математической физики. Тез. докл. Всесоюзной конф. Алма-Ата, 2–6 октября 1989 г. Красноярск, 1989. С. 6.

4. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // 7th Czechoslovac Conference on Differential Equations and Their Application (EQADIFF7). Praha, 1989. С. 1–2.

5. *Абылкаиров У. У.* // Тр. междунар. научно-практической конф. “Теория функций, функциональный анализ и их приложения”, посв. 80-летию Т. И. Аманова. Семипалатинск, 2003. С. 107–111.

6. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.

7. *Треногин В. В.* Функциональный анализ. М., 1980.

8. *Абылкаиров У. У.* Регуляризация начально-краевой задачи для уравнений гиперболического типа // Совместный выпуск по материалам Междунар. конф. “Вычислительные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании” 18–20 сентября 2002 г. Ч. 5. Новосибирск, Алматы, 2002. С. 10–19.

9. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983.

10. *Pironneau O.* Conditions aux limites sur la pression pour les équations de Stokes et de Navier – Stokes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1986. V. 303, N 9. P. 403–406.

11. *Ладыженская О. А.* О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье – Стокса // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 169–185.

12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

Абылкаиров Ундасын Утегенович
Казахстан, Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби
UAbylkair@kazsu.kz