УДК 517.956

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДАРБУ – ПРОТТЕРА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

В работе получен критерий существования счетных собственных функций спектральной задачи Дарбу – Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений, а также доказана вольтерровость сопряженной ей задачи.

Двумерные спектральные задачи гиперболических уравнений интенсивно изучаются [1–3]. Однако, их многомерные аналоги исследованы мало [4].

Пусть D_ε конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная поверхностями $|x| = \frac{2}{p+2}t^{\frac{p+2}{2}} + \varepsilon$, $|x| = 1 - \frac{2}{p+2}t^{\frac{p+2}{2}} + \varepsilon$ и плоскостью $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $0 \le t \le \left(\frac{(p+2)(1-\varepsilon)}{4}\right)^{\frac{2}{p+2}}$, $0 \le \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε в области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим взаимно-сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$Lu = t^p \cdot \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} a_1(x,t)\, u_{x_i} + b(x,t)\, u_t + c(x,t)\, u = \alpha u, \tag{1}$$

$$L^* \upsilon = t^p \cdot \Delta_x \upsilon - \upsilon_{tt} + \sum_{i=1}^{n} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = \alpha \upsilon, \tag{1*}$$

где $p = \text{const} \ge 0$, $d(x,t) = c - \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - b_t$, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \ge 2$, α — действительное число.

Рассмотрим следующие спектральные задачи Дарбу – Проттера для уравнений (1) и (1*).

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^1\left(\bar{D}_\varepsilon\right) \cap C^2\left(D_\varepsilon\right)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = 0, \qquad u\big|_{S_\varepsilon} = 0 \tag{2}$$

или

$$u_t\big|_S = 0, \qquad u\big|_{S_\varepsilon} = 0. \tag{3}$$

Задача 1*. Найти в области D_ε решение уравнения (1*) из класса $C^1\left(\bar{D}_\varepsilon\right) \cap C^2\left(D_\varepsilon\right)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon\big|_S = 0, \qquad \upsilon\big|_{S_1} = 0$$

или

$$\upsilon_t\big|_S = 0, \qquad \upsilon\big|_{S_1} = 0.$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $(x_1, \ldots, x_m, t)$ к сферическим $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t)$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l = 0, 1, \ldots$ — пространство Соболева.

Если $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \ge m+1$, то имеет место

Теорема 1. *Задача 1 для каждого α имеет счетное множество собственных функций $\Leftrightarrow \varepsilon = 0$.*

Теорема 2. *$\forall \varepsilon \ge 0$ при каждом α задача $1*$ — вольтеррова.*

Доказательство. При α=0 теорема 1 установлена в [5], а теорема 2 в [6].

Для доказательства теоремы 1 решение задачи 1 при $\varepsilon = 0$ в сферических координатах построено в виде ряда

$$u\,(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \upsilon_n^k\,(r,t) Y_{n,m}^k\,(\theta)\,, \tag{4}$$

где $\upsilon_n^k(r,t)$ являются решениями двумерных спектральных задач Дарбу.

Далее, пользуясь результатами работ [7, 8], устанавливается, что полученные двумерные спектральные задачи Дарбу при любом α имеют счетное множество собственных функций.

Пусть теперь задача (1), (2) для каждого α имеет счетное множество собственных функций. Покажем, что $\varepsilon = 0$.

Предположим противное, т. е. $\varepsilon > 0$. Построим решение $\upsilon(r,\theta,t)$ уравнения (1*), удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon\big|_S = \tau(r,\theta) = \tau_n^k(r)\cdot Y_{n,m}^k(\theta), \quad \upsilon\big|_{S_i} = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

в виде ряда (4).

Затем, используя взаимно-сопряженность операторов L, L^* и формулу Грина, устанавливаем, что решение задачи (1), (2) $u(x,t) \equiv 0$. Это приводит к противоречию нашего предположения.

Теорема 1 для задачи (1), (3) доказывается аналогично.

При доказательстве теоремы 2, сначала устанавливается единственность решения задачи 1*. Используя результаты работ [8, 9] строится решение задачи 1* в виде ряда (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кальменов Т. Ш.* О регулярных краевых задачах и их спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982.
2. *Пономарев С. М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1981.
3. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во МГУ, 1988.
4. *Кукенов Т. М., Садыбеков М. А.* Спектральные свойства одной краевой задачи для двумерного волнового уравнения // Тез. докл. научн. конф. “Краевые задачи и их спектральные вопросы для дифференциальных уравнений”. Алма-Ата, 1991. С. 12.

5. *Алдашев С. А.* Критерий единственности решения задачи Дарбу – Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Докл. НАН РК. 2002. № 3. С. 5–7.

6. *Нуржанов Ш. Т.* Задачи Дарбу – Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 2000.

7. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994.

8. *Алдашев С. А.* Некоторые задачи для многомерного интегро-дифференциального гиперболического уравнения // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 5. С. 590–595.

9. *Алдашев С. А.* Спектральные задачи Дарбу – Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 12. С. 1101–1106.

Алдашев Серик Аймурзаевич
Казахстан, Алматы,
Казахская академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева
serik@aldash.ricc.kz