УДК 517.95

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Ю. Е. Аниконов

В работе на примере одной обратной задачи для эволюционного уравнения развивается новый метод исследования обратных задач с параметром. Приводятся формулы для решения и коэффициента эволюционного уравнения типа Шредингера.

В данной работе рассматривается обратная задача для общего эволюционного уравнения с параметром и развивается новый метод исследования, намеченный в [1, 2].

Предполагая зависимость решения эволюционного уравнения от параметра, оказывается, можно находить и коэффициенты этого уравнения, зависящие от пространственной переменной и времени этого уравнения по соответствующей информации обратной задачи. Здесь приводится один новый формальный результат данного направления исследований. При этом используются понятия и терминология квантовой физики.

Пусть H — пространство Гильберта и A линейный неположительный оператор из H в H. Рассмотрим обратную задачу: найти $w(t,p) \in H$, $\lambda(t) \in H$, $\dfrac{\partial \lambda}{\partial p} = 0$, $-\infty < t < \infty$, $-\infty < p < \infty$, если

$$\frac{\partial w}{\partial t} = ipAw + \lambda(t)\Phi(w), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0, \tag{1}$$

$$w|_{t=T} = w_T(p), \quad w|_{t=-T} = w_{-T}(p), \tag{2}$$

где $T > 0$ — фиксированное число, $w_T(p)$, $w_{-T}(p)$ — заданные элементы пространства H, зависящие от p, $-\infty < p < \infty$, $\Phi(w)$ — заданный функционал, не зависящий от p, например, $\Phi(w) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Phi}\,(t, p, w(t,p))\,dp$, где $\widetilde{\Phi}$ — известная подходящая функция.

Заметим, что если $w = w(x,p,t)$, $\lambda = \lambda(x,t)$, $\dfrac{\partial \lambda}{\partial p} = 0$ — функции соответственно переменных (x,p,t) и (x,t), $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $-\infty < p < \infty$, $-\infty < t < \infty$, $n \geq 1$,

$$p = \frac{h}{2m}, \quad A = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

то уравнение (1) есть аналог уравнения Шредингера с соответствующей квантомеханической интерпретацией входящих в это уравнение элементов. При этом

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки научных школ (проект НШ-1172.2003.1) и программы Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 487)

переменность параметра $p = \dfrac{h}{2m}$ в данном случае означает изменение массы m частицы и зависимость решения w от этой массы. Для $p < 0$, решение w продолжается по p некоторым образом. Пусть как и в квантовой теории рассеяния элементы $\varphi_-(p) \in H$, $\varphi_+(p) \in H$,

$$\varphi_-(p) = \lim_{T\to\infty} e^{ipTA} w_{-T}(p), \tag{3}$$

$$\varphi_+(p) = \lim_{T\to\infty} e^{-ipTA} w_T(p) \tag{4}$$

являются соответственно начальным и конечным состоянием системы, зависящей от параметра p, эволюция которой определяется уравнением (1). Формальные результаты заключаются в следующем.

Теорема 1. *Для решения* $w(t,p)$, $\lambda(t)$ *обратной задачи* (1), (2) *имеют место формальные асимптотические* ($T \to \infty$) *операторные формулы*

$$w = \frac{e^{iptA}}{2}\Bigg[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2e^{it(y-p)A} - 2\cos(T(y-p)A))}{y-p} \\ \times (e^{iTyA} w_{-T}(y) - e^{-iTyA} w_T(y))dy + e^{iTA} w_{-T}(p) + e^{-ipTA} w_T(p)\Bigg], \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\Phi(w)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Ae^{ityA}(e^{iTyA}w_{-T}(y) - e^{-ityA}w_T(y))dy. \tag{6}$$

В предельном случае имеет место

Теорема 2. *Элементы* $w(t,p) \in H$, $\lambda(t) \in H$, *определенные операторными формулами*

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ityA}}{y-p}(\varphi_-(y) - \varphi_+(y))\,dy + e^{iptA}\left(\frac{\varphi_-(p)+\varphi_+(p)}{2}\right), \tag{7}$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{\Phi(w)}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Ae^{ityA}(\varphi_-(y) - \varphi_+(y))\,dy, \tag{8}$$

удовлетворяют (1)–(4).

Доказательство теорем 1, 2 осуществляется непосредственной проверкой с учетом предельного соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\varepsilon} = \delta(x), \tag{9}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Действительно, для любого фиксированного $T > 0$ элементы $w(t,p)$, $\lambda(t)$, определенные формулами (5), (6) удовлетворяют уравнению (1). Аналогично, элементы (7), (8) также удовлетворяют уравнению (1). Что касается данных обратной задачи (2), то необходимо осуществить предельный переход в (5) и (7) при $T \to \infty$ $t \to \pm\infty$ соответственно.

Полагая последовательно в (5) $t = T$ и $t = -T$, затем умножая последовательно обе части (5) на e^{-iTA} и e^{iTA} и переходя к пределу при $T \to \infty$ с использованием (9) и отрицательности оператора A, получаем тождество

$$\varphi^-(p) - \varphi^+(p) = \varphi^-(p) - \varphi^+(p).$$

То же самое тождество получается из (7) при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Ю. Е.* Представление решений и обратные задачи для эволюционных и дифференциально-разностных уравнений. Новосибирск, 2003. (Препринт/ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 108).
2. *Anikonov Yu. E.* Inverse problems for evolution and differential-difference equation with a parameter // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2003. V. 11, N 5. P. 439–475.

Аниконов Юрий Евгеньевич
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
anikon@math.nsc.ru