УДК 517.958

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ РЕНТГЕНОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ

Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова

В терминах, связанных с полихроматическим уравнением переноса, рассмотрено условие положительности некоторого выражения. Доказано, что нарушение этого условия приводит к неединственности решения для многих задач рентгеновской томографии в рамках принятой математической модели. Тем самым, сделан шаг для того, чтобы иметь право назвать вышеупомянутое выражение мерой видимости среды при ее рентгенодиагностике. Ранее подобные результаты были получены в более простом моноэнергетическом случае.

Для описания процесса движения фотонов в трехмерной среде G используется стационарное полихроматическое уравнение переноса

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega,E) + \mu(r,E) f(r,\omega,E) = \mu_s^*(r,E) \int\limits_{\Omega} \int\limits_{E_1}^{E_2} k(\omega\cdot\omega', E, E') f(r,\omega',E') dE' d\omega'. \quad (1)$$

Здесь $f(r,\omega,E)$ означает плотность потока фотонов в точке $r \in G$, движущихся в направлении ω ($\Omega = \{\omega : \ \omega \in R^3, \ |\omega| = 1\}$) и имеющих энергию E из числового промежутка $I = [E_1, E_2]$, $\mu(r,E)$ — коэффициент ослабления, $\mu_s^*(r,E)$ – двойственный коэффициент рассеяния, $k(\omega\cdot\omega', E, E')$ — индикатриса рассеяния.

Ограниченная, строго выпуклая область G в R^3 содержит подобласти $G_i, \ i = 1, \cdots, p$, такие, что $G_l \cap G_j = \varnothing$, если $l \neq j$ и объединение G_0 областей G_i имеет замыкание, совпадающее с $\overline{G}$, т. е. $\overline{G}_0 = \overline{G}$. Каждая область G_i интерпретируется как некоторое однородное вещество (включение), входящее в состав, вообще говоря, неоднородной среды G.

Обозначим через $d(r,\omega)$ длину пересечения луча $L_{r,\omega} = \{r + t\omega, \ t \geq 0\}$ и области G. Типичное для теории переноса условие обобщенной выпуклости множества G_0 примем в немного усиленном варианте. Именно, считаем, что для любых $(r,\omega) \in G\times\Omega$ луч $L_{r,\omega}$ пересекает границу ∂G_0 множества G_0 по конечному числу точек. Нетрудно видеть, что для $(r,\omega) \in G \times \Omega$ точки $\xi = r - d(r,-\omega)\omega, \ \eta = r + d(r,\omega)\omega$ лежат на границе области G, т. е. $\xi, \eta \in \partial G$. Рассмотрим следующие граничные условия

$$\begin{gathered} f\big(r - d(r,-\omega)\omega, \omega, E\big) = h\big(r - d(r,-\omega)\omega, \omega, E\big), \\ f\big(r + d(r,\omega)\omega, \omega, E\big) = H\big(r + d(r,\omega)\omega, \omega, E\big), \end{gathered} \quad (2)$$

где h и H имеют смысл плотности входящего и выходящего потока соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российкого фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00126)

Прямая задача состоит в отыскании f из уравнения (1) и условия (2), если заданы $\mu,\ \mu_s^*,\ k,\ h$. При довольно общих предположениях такое решение, понимаемое в некотором обобщенном смысле, существует и единственно, если например, $0 \le \mu_s^*(r,E) \le \mu(r,E)$ [1, 2], что и предполагается в этой работе.

Общая задача томографии состоит в том, чтобы, имея данные о плотности излучения на границе обследуемой среды, получить информацию о ее внутреннем строении.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие предположения. Функции $\mu(r,E)$ и $\mu_s^*(r,E)$ считаются строго положительными и кусочно-постоянными в том смысле, что сохраняют постоянное значения для всех r, принадлежащих одной и той же области $G_i,\ 1 \le i \le p,$ а при любом фиксированном r они непрерывны по $E \in I$. Условимся точки поверхности ∂G_0 обозначать через z. Пусть такая точка z принадлежит границам ровно двух областей G_l и $G_j,\ l < j$. Тогда величины скачков $[\mu(z,E)],\ \ [\mu_s^*(z,E)]$ означают разности значений функций μ и μ_s^* в соседних областях, причем из значений этих функций при $r \in G_j$ отнимаются значения этих же функций при $r \in G_l$. Для удобства считаем функции $\mu(r,E),\ \ \mu_s^*(r,E)$ продолженными по r нулем вне $\overline{G}$. Доопределим по аналогии скачки $[\mu(z,E)],\ [\mu_s^*(z,E)]$ и для $z \in \partial G$, полагая их равными значениям функций $\mu(r,E)$ и $\mu_s^*(r,E)$ в области G_i, прилегающей к точке z.

Для неотрицательной, непрерывной индикатрисы примем условие нормировки, т. е. считаем, что интеграл от функии $k(\omega\cdot\omega',E,E')$ по $\omega' \in \Omega$ равен единице, что не умаляет общности. Рассмотрим функцию $h_1(r,\omega,E) = h(r - d(r,\omega)\omega,\omega,E)$ и предположим, что неотрицательная функция $h_1(r,\omega,E)$ непрерывна при $(r,\omega,E) \in \overline{G}\times\Omega\times I$ и не равна тождественно нулю.

Перечисленные условия гарантируют [1], что функция $f(r,\omega,E)$ оказывается положительной и непрерывной в $\overline{G}\times\Omega\times I$.

Определим следующие функции

$$\tau(r,\omega,E) = \int\limits_0^{d(r,\omega)} \mu(r + t\omega, E)dt,$$

$$m(z,\omega,E) = \big[\mu(z,E)\big] f(z,\omega,E) - \big[\mu_s^*(z,E)\big] \times \int\limits_\Omega \int\limits_{E_1}^{E_2} k(\omega\cdot\omega',E,E') f(z,\omega',E') dE' d\omega',$$

$$mv(z,\omega,E) = m(z,\omega,E)\exp\big(-\tau(z,\omega,E)\big).$$

Величина $\mid mv(z,\omega,E) \mid$ в моноэнергетическом случае была названа мерой видимости среды в точке z в направлении ω и для энергии E [1]. В рассматриваемом здесь полихроматическом случае для обоснования такого же названия доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть для некоторых* $\mu,\ \mu_s^*,\ k,\ h_1$ *решение* f *задачи* (1), (2) *таково, что* $mv(z,\omega,E) = 0$ *при всех* $(z,\omega,E) \in \partial G\times\Omega\times I$. *Тогда существует бесконечно много разных функций* $\tilde\mu,\ \tilde{\mu_s^*}$, *имеющих разные поверхности разрывов и таких, что при замене* μ *на* $\tilde\mu$ *и* μ_s^* *на* $\tilde{\mu_s^*}$ *решение* f *прямой задачи не изменится.*

Доказательство. Условие $mv(z,\omega,E) = 0$ для $z \in \partial G$ переходит в равенство

$$\mu(z,E) f(z,\omega,E) - \mu_s^*(z,E) \int\limits_{\Omega\times I} k(\omega\cdot\omega',E,E') f(z,\omega',E') dE' d\omega' = 0$$

Деля это равенство на $\mu(z,E)$ и обозначая $\lambda(r,E) = \mu_s^*(z,E)\big/\mu(z,E)$, получаем

$$f(z,\omega,E) = \lambda(z,\omega,E)\int\limits_{\Omega\times I} k(\omega\cdot\omega^{'},E,E^{'})f(z,\omega^{'},E^{'})dE^{'}d\omega^{'}. \qquad (3)$$

Покажем, что функция $f(z,\omega,E)$ не зависит от ω,E, т. е. в данном случае $f(z,\omega,E) = g(z)$. Предположим, что это не так, и обозначим через $f(z,\omega_0,E_0)$ наибольшее значение $f(z,\omega,E)$ по $(\omega,E)\in\Omega\times I$. Тогда существует множество положительной меры $V\subset\Omega\times I$ такое, что для всех $(\omega,E)\in V$ выполняется неравенство $f(z,\omega_0,E_0) > f(z,\omega,E)$. Принимая во внимание неравенство $\lambda(r,E)\le 1$ и условие нормировки индикатрисы, из (3) получаем цепочку соотношений

$$f(z,\omega_0,E_0) \le \int\limits_{\Omega\times I} k(\omega_0\cdot\omega^{'},E_0,E^{'})f(z,\omega^{'},E^{'})dE^{'}d\omega^{'}$$

$$= \int\limits_{\Omega\times I\setminus V} k(\omega_0\cdot\omega^{'},E_0,E^{'})f(z,\omega^{'},E^{'})dE^{'}d\omega^{'} + \int\limits_{V} k(\omega_0\cdot\omega^{'},E_0,E^{'})f(z,\omega^{'},E^{'})dE^{'}d\omega^{'}$$

$$< f(z,\omega_0,E_0)\int\limits_{\Omega\times I\setminus V} k(\omega_0\cdot\omega^{'},E_0,E^{'})dE^{'}d\omega^{'} + f(z,\omega_0,E_0)\int\limits_{V} k(\omega_0\cdot\omega^{'},E_0,E^{'})dE^{'}d\omega^{'}$$

$$= f(z,\omega_0,E_0)\int\limits_{\Omega\times I} k(\omega_0\cdot\omega^{'},E_0,E^{'})dE^{'}d\omega^{'} = f(z,\omega_0,E_0).$$

Ввиду полученного противоречия $\big(f(z,\omega_0,E_0) < f(z,\omega_0,E_0)\big)$ считаем равенство $f(z,\omega,E) = g(z)$ доказанным. Следовательно, наибольшее значение функции $g(z)$ при $z\in\partial G$ соответствует как плотности входящего, так и выходящего излучения. Согласно принципу максимума для уравнения переноса [2], такая ситуация возможна только тогда, когда $\mu(r,E)\equiv\mu_s^*(r,E)$ и $f(r,\omega,E) = c_0$, т. е. функция $f(r,\omega,E)$ постоянна при всех значениях $(r,\omega,E)\in\overline{G}\times\Omega\times I$. Для этого случая уравнение (1) переходит в следующее равенство $\mu(r,E)c_0 = \mu_s^*(r,E)c_0$, что эквивалентно $(\mu(r,E)+\alpha(r,E))c_0 = (\mu_s^*(r,E)+\alpha(r,E))c_0$, где $\alpha(r,E)$ — произвольная функция. Обозначая $\tilde{\mu}(r,E) = \mu(r,E)+\alpha(r,E)$, $\tilde{\mu_s^*}(r,E) = \mu_s^*(r,E)+\alpha(r,E)$, получаем равенство

$$\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega,E) + \tilde{\mu}(r,E)f(r,\omega,E)$$
$$= \tilde{\mu_s^*}(r,E)\int\limits_{\Omega\times I} k(\omega\cdot\omega^{'},E,E^{'})f(r,\omega^{'},E^{'})dE^{'}d\omega^{'}.$$

Беря в качестве $\alpha(r,E)$ различные неотрицательные, ненулевые, непрерывные функции, получаем то же самое решение прямой задачи f с различными коэффициентами $\tilde{\mu}(r,E)$ и $\tilde{\mu_s^*}(r,E)$.

Ясно, что если в качестве $\alpha(r,E)$ брать функции, имеющие разрывы первого рода на поверхностях, отличных от ∂G_0, то появление таких новых поверхностей разрывов коэффициентов также не изменит решение прямой задачи. Тем самым теорема доказана.

Комментируя доказанное утверждение, отметим, что ситуация, описанная в условиях теоремы, в принципе, возможна. Действительно, пусть $h_1(r,\omega,E) =$ const, $\mu(r,E)\equiv\mu_s^*(r,E)$. Тогда единственным решением прямой задачи будет функция $f(r,\omega,E)\equiv h_1(r,\omega,E)$. Очевидно, что $[\mu(z,E)]\equiv[\mu_s^*(z,E)]$ и $mv(z,\omega,E)$ $\equiv 0$, $z\in\partial G$, $\omega\in\Omega$, $E\in I$.

Оценивая значение теоремы для томографии, заметим, что о структуре среды судят по ее характеристикам, которыми здесь могут служить коэффициенты μ и μ_s^*. Но при выполнении условий теоремы существует бесконечно много разных коэффициентов типа μ и μ_s^*, которым соответствует одно и тоже излучение, где бы его не измеряли. Более того, задача дефектоскопи о нахождении только поверхностей разрывов коэффициентов также имеет бесконечное множество решений. Сказанное позволяет сделать вывод о том, что для успешного решения всякой задачи об определении коэффициентов уравнения переноса (1) или хотя бы поверхности их разрывов по любым данным о плотности излучения, условие положительности функции $mv(z, \omega, E)$, вообще говоря, нельзя отбросить.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2002.

2. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решения уравнения переноса. М.: Наука, 1986.

Аниконов Дмитрий Сергеевич
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
anik@math.nsc.ru

Коновалова Дина Сергеевна
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,