УДК 517.95

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Бейлин

В работе исследована смешанная задача с нелокальным интегральным условием для волнового уравнения. Доказана ее однозначная обобщенная разрешимость.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

в области $D = \{0 < x < l,\ 0 < t < T,\ T \leq l\}$ и поставим для него задачу с данными Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0,t) = 0 \tag{3}$$

и нелокальным интегральным условием

$$\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = 0. \tag{4}$$

Нелокальная смешанная задача с интегральным условием (4) при $K(x) = 1$ и условиями (2)–(3) для уравнения $u_{tt} - (au_x)_x + cu = f$ рассмотрена в работе [1], где доказано существование и единственность обобщенного решения в специальном функциональном пространстве. В предлагаемой работе доказано существование обобщенного решения из пространства Соболева $W_2^1(D)$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi(x) = \psi(x) = 0$.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Если* $f(x,t),\ f_t(x,t) \in L_2(D)$, $\int\limits_0^l K(x)f(x,0)dx = 0$, $K(x) \in C^1[0,l]$, $K(l) \neq 0$, $0 \leq c_0 \leq c(x,t) \leq c_1$, *то существует единственное обобщенное решение поставленной задачи* (1)–(4).

2. Определение обобщенного решения

Пусть $u(x,t)$ — решение поставленной задачи. Обозначим $u_x(l,t) = p(t)$. Из равенства (1) стандартным образом получим тождество, которое затем используем для определения обобщенного решения

$$\int_0^T \int_0^l (u_x v_x - u_t v_t + cuv)dxdt = \int_0^T \int_0^l fvdxdt + \int_0^T p(t)v(l,t)dt, \tag{5}$$

где $v(x,t)$ — произвольная функция из пространства $\bar{W}_2^1(D) = \{v(x,t) : \ v(x,t) \in W_2^1(D), \ v(x,T) = 0\}$.

Умножив теперь (1) на $K(x)$ и проинтегрировав по x от 0 до l, получим равенство

$$K(l)p(t) = \int_0^l \left(K'(x)u_x(x,t) + K(x)c(x,t)u(x,t)\right)dx - \int_0^l K(x)f(x,t)dx. \tag{6}$$

Отметим, что функция $p(t)$ нам не известна, но входит в тождество (5). Поэтому будем искать сразу две функции: $u(x,t)$ и $p(t)$. Введем в рассмотрение пространство

$$W_2^{1,2}(D) = \{u : \ u \in W_2^1(D), \ u_{tt} \in L_2(D)\}$$

с нормой

$$||u||^2 = \int_0^T \int_0^l \left(u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{tt}^2\right)dxdt.$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1)–(2)–(3)–(4) будем называть пару функций (u,p) таких, что

1. $u(x,t) \in W_2^{1,2}(D)$, $u(x,0) = \varphi(x)$, и для произвольной $v(x,t) \in \bar{W}_2^1(D)$ удовлетворяет тождеству (5);
2. $p(t) \in L_2(0,T)$ и удовлетворяет равенству (6).

Для обоснования разрешимости поставленной задачи рассмотрим как вспомогательную вторую краевую задачу для уравнения (1) с однородными начальными условиями (2) и граничными условиями

$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(l,t) = p(t).$$

Однородность начальных условий позволяет рассматривать в качестве $p(t)$ функцию, которая определена на всей оси и обращается в нуль при $t \leq 0$. Тогда для того, чтобы перейти к задаче с однородными граничными условиями, мы можем положить

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \int_0^{x+t-l} p(\eta)d\eta.$$

Для отыскания новой неизвестной функции $\tilde{u}(x,t)$ получим задачу

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} + c\tilde{u} = \tilde{f}(x,t), \tag{7}$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0, \ \tilde{u}_t(x,0) = 0, \tag{8}$$

$$\tilde{u}_x(0,t) = \tilde{u}_x(l,t) = 0, \tag{9}$$

где

$$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - c(x,t) \int\limits_0^{x+t-l} p(\eta)d\eta.$$

Обобщенное решение $\tilde{u} \in W_2^1(D)$ этой задачи определяется как функция, удовлетворяющая условию $\tilde{u}(x,0) = 0$ и $\forall v \in \bar{W}_2^1(D)$ тождеству

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l (\tilde{u}_x v_x - \tilde{u}_t v_t + c\tilde{u}v)\, dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \tilde{f} v dxdt. \tag{10}$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что если $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству (5), то $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет тождеству (10), и наоборот.

Подставив теперь в равенство (6) функцию $u(x,t)$, выраженную через $\tilde{u}(x,t)$, получим

$$p(t) - \int\limits_0^t H(\xi,t)p(\xi)d\xi = \frac{1}{K(l)} \int\limits_0^l (K'(x)\tilde{u}_x + Kc\tilde{u} - Kf)\, dx, \tag{11}$$

где

$$H(\xi,t) = \frac{1}{K(l)} \left(K'(\xi - t + l) + \int\limits_{l+\xi-t}^{l} K(x)c(x,t)dx \right).$$

Рассматривая (11) как уравнение Вольтерра второго рода с ядром $H(\xi,t)$, ограниченным в силу свойств функций $K(x)$ и $c(x,t)$, получим его решение, выраженное через резольвенту $R(\xi,t)$ [2],

$$p(t) = \frac{1}{K(l)} \int\limits_0^l (K'(x)\tilde{u}_x(x,t) + K(x)c(x,t)\tilde{u}(x,t))\, dx + \frac{F(t)}{K(l)}$$

$$+ \frac{1}{K(l)} \int\limits_0^t R(\xi,t) \left(\int\limits_0^l (K'(x)\tilde{u}_x(x,\xi) + K(x)c(x,\xi)\tilde{u}(x,\xi))\, dx + F(\xi) \right) d\xi. \tag{12}$$

Здесь обозначено

$$F(t) = \int\limits_0^l K(x)f(x,t)dx.$$

Таким образом, для доказательства разрешимости поставленной задачи нам достаточно убедиться в том, что существует единственная пара функций $(\tilde{u}(x,t),\ p(t))$ такая, что $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет тождеству (10) $\forall v(x,t) \in \bar{W}_2^1(D)$, $\tilde{u} \in W_2^{1,2}(D)$, $\tilde{u}(x,0) = 0$, а функция $p(t)$ удовлетворяет равенству (12).

3. Единственность решения

Предположим, что существует два различных решения $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in W_2^{1,2}(D)$ со следами производных на правой границе соответственно $p_1(t), p_2(t)$. Тогда $\bar{u}(x,t) = \tilde{u}_1(x,t) - \tilde{u}_2(x,t)$ и $\bar{p}(t) = p_1(t) - p_2(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l (\bar{u}_x v_x - \bar{u}_t v_t + c\bar{u}v)\, dxdt = -\int\limits_0^T \int\limits_0^l cv \int\limits_0^{x+t-l} \bar{p}(\eta)d\eta dxdt, \tag{13}$$

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{K(l)} \int_0^l (K'\bar{u}_x + Kc\bar{u})\,dx + \frac{1}{K(l)} \int_0^t R(\xi,t) \int_0^l (K'\bar{u}_x + Kcu)\,dxd\xi.$$

Положим в (13)

$$v(x,t) = \begin{cases} \bar{u}_t, & 0 \le t < \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T. \end{cases} \tag{14}$$

Легко видеть, что если $\bar{u}(x,t) \in W_2^{1,2}(D)$, то $v(x,t) \in \bar{W}_2^1(D)$. Подставим $v(x,t)$, определенную формулой (14), в (13) и преобразуем левую часть, интегрируя по частям. Получим

$$\int_0^l \left(c\bar{u}^2 + \bar{u}_t^2 + \bar{u}_x^2\right) dx = \int_0^\tau \int_0^l c_t \bar{u}^2 dx d\tau - 2\int_0^\tau \int_0^l c\bar{u}_t \int_0^{x+t-l} \bar{p}(\eta)d\eta dx dt. \tag{15}$$

Последний член в правой части (15) оценим с помощью неравенства Коши

$$2\int_0^\tau \int_0^l c\bar{u}_t \int_0^{x+t-l} \bar{p}(\eta)d\eta dx dt \le \int_0^\tau \int_0^l \bar{u}_t^2 dx dt + c_1 \int_0^\tau \int_0^l \left(\int_0^{x+t-l} \bar{p}(\eta)d\eta \right)^2 dx dt.$$

Поскольку $x + t - l \le \tau$, то в силу неравенства Коши – Буняковского имеем

$$\left(\int_0^{x+t-l} \bar{p}(\eta)d\eta \right)^2 \le \tau \int_0^\tau \bar{p}^2(\eta)d\eta. \tag{16}$$

Окончательно,

$$2\int_0^\tau \int_0^l \int_0^{x+t-l} \bar{p}(\eta)d\eta \bar{u}_t dx dt \le \int_0^\tau \bar{u}_t^2 dx dt + \tau^2 l \int_0^\tau \bar{p}^2(\eta)d\eta. \tag{17}$$

Обозначим $m = \min\{c_0, 1\}$, $M = \max\{c_2/m, 2/m\}$. Тогда из (15) с учетом (17) следует

$$\int_0^l \left(\bar{u}^2 + \bar{u}_t^2 + \bar{u}_x^2\right) dx \le \frac{M}{m} \int_0^\tau \int_0^l \left(\bar{u}^2 + \bar{u}_t^2 + \bar{u}_x^2\right) dx dt + \frac{\tau^2 l}{m} \int_0^\tau \bar{p}(\eta)d\eta. \tag{18}$$

Теперь рассмотрим (12) и возведем обе части в квадрат. В силу свойств K существуют постоянные K_0, K_1 такие, что

$$\max_{(0,l)} |K(x)| = K_0, \qquad \max_{(0,l)} |K'(x)| = K_1.$$

Применяя неравенство Коши, получим

$$\bar{p}^2(t) \le h_1 \int_0^l \left(\bar{u}_x^2 + \bar{u}^2\right) dx + h_2 \int_0^t \int_0^l \left(\bar{u}_x^2 + \bar{u}^2\right) dx dt, \tag{19}$$

где

$$h_1 = \frac{4l}{K^2(l)} \max\{K_1, K_0 c_1\}, \quad h_2 = \frac{4l}{K^2(l)} \max\{K_1, K_0 c_1\} R_0 t, \quad R_0 = \max_D |R|.$$

Тогда из (19) и (18) следует

$$\int\limits_0^l \left(\bar{u}^2+\bar{u}_t^2+\bar{u}_x^2\right)dx \le \frac{M}{m}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l \left(\bar{u}^2+\bar{u}_t^2+\bar{u}_x^2\right)dxdt$$
$$+\frac{\tau^2 l}{m}\int\limits_0^\tau \left(h_1\int\limits_0^l \left(\bar{u}_x^2+\bar{u}^2\right)dx + h_2\int\limits_0^t\int\limits_0^l \left(\bar{u}_x^2+\bar{u}^2\right)dxdt\right)dt,$$

откуда получим

$$\int\limits_0^l \left(\bar{u}^2+\bar{u}_t^2+\bar{u}_x^2\right)dx \le D(T)\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l \left(\bar{u}^2+\bar{u}_t^2+\bar{u}_x^2\right)dx. \qquad (20)$$

Применение к (20) неравенства Гронуолла влечёт равенство

$$\int\limits_0^l \left(\bar{u}^2(x,\tau)+\bar{u}_t^2(x,\tau)+\bar{u}_x^2(x,\tau)\right)dx = 0 \qquad \forall\tau\in[0,T],$$

откуда и вытекает единственность обобщенного решения.

4. Существование решения

Будем искать приближенное решение $(\tilde{u}^m, p^m)$ из следующих соотношений

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l \left(\tilde{u}_x^m v_x - \tilde{u}_t^m v_t + c\tilde{u}^m v\right)dxdt$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^l f(x,t)v(x,t)dxdt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l cv\int\limits_0^{x+t-l} p^m(\xi)d\xi dxdt, \qquad (21)$$

$$p^m(t)=\frac{1}{K(l)}\int\limits_0^l \left(K'(x)\tilde{u}_x^{m-1}+K(x)c(x,t)\tilde{u}^{m-1}\right)dx$$
$$+\frac{1}{K(l)}\int\limits_0^t R(\xi,t)\int\limits_0^l \left(K'(x)\tilde{u}_x^{m-1}+K(x)c(x,t)\tilde{u}^{m-1}\right)dxd\xi$$
$$+\frac{1}{K(l)}\left(F(t)+\int\limits_0^t F(\xi)d\xi\right). \qquad (22)$$

Убедимся, прежде всего, в том, что для любого $p^m(t)$ существует функция $\tilde{u}^m(t)$, удовлетворяющая тождеству (21). Справедливость этого утверждения следует из однозначной разрешимости задачи (7)–(9) [3]. Именно, если $\tilde{f}(x,t)\in L_2(D)$, $\max\limits_{(x,t)\in D}|c(x,t)|\le c_1$, то вторая краевая задача имеет единственное решение $\tilde{u}(x,t)\in W_2^1(D)$ и справедливо неравенство

$$||\tilde{u}||_{W_2^1(D)} \le C_1(T)||\tilde{f}||_{L_2(D)}. \qquad (23)$$

Если, кроме того, $\tilde{f}_t(x,t) \in L_2(D)$, то $\tilde{u}_{tt}(x,t) \in L_2(D)$ и

$$||\tilde{u}_{tt}||_{L_2(D)} \leq C_2(T) \left(||\tilde{f}|| + ||\tilde{f}_t|| \right). \tag{24}$$

(здесь мы сразу учли, что в нашем случае $\varphi \equiv 0,\ \psi \equiv 0$).

Уточним неравенства (23) и (24), учитывая, что

$$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - \int\limits_0^{x+t-l} p(\eta)d\eta.$$

Проделав те же преобразования, что и в [2], при выводе неравенства (23) мы придем к необходимости оценить дополнительно слагаемое

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l c(x,t)\tilde{u}_t^N \int\limits_0^{x+t-l} p(\eta)d\eta dx dt.$$

Применяя неравенство Коши “с ε”, получим

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l c(x,t)\tilde{u}_t^N \int\limits_0^{x+t-l} p(\eta)d\eta dx dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left(\int\limits_0^{x+t-l} p(\eta)d\eta \right)^2 dx dt + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left(\tilde{u}_t^N\right)^2 dx dt$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_0^\tau p^2(t)dt + \frac{\tau l}{2\varepsilon} \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \left(\tilde{u}_t^N\right)^2 dx dt.$$

С учетом этого, неравенство (23) для нашей задачи примет вид

$$||\tilde{u}^m||_{W_2^1(D)} \leq C_1(T) \left(||f(x,t)||_{L_2(D)} + \sqrt{\varepsilon} ||p^m(t)||_{L_2(0,T)} \right)$$

а неравенство (24) —

$$||\tilde{u}_{tt}^m||_{L_2(D)} \leq C_2(T) \left(||f(x,t)||_{L_2(D)} + ||f_t(x,t)||_{L_2(D)} + \sqrt{\varepsilon} ||p^m(t)||_{L_2(0,T)} \right).$$

Складывая два последних неравенства, получим следующую оценку

$$||\tilde{u}^m||_{W_2^{1,2}(D)} \leq C(T) \left(||f(x,t)||_{L_2(D)} + ||f_t(x,t)||_{L_2(D)} + \sqrt{\varepsilon} ||p^m(t)||_{L_2(0,T)} \right). \tag{25}$$

Таким образом, для любого m определена пара $(\tilde{u}^m(x,t), p^m(t))$. Покажем, что эта последовательность сходится. Обозначим

$$z^m = \tilde{u}^m - \tilde{u}^{m-1}, \qquad r^m = p^m - p^{m-1}.$$

Тогда из неравенства (25) следует, что

$$||z^m||_{W_2^{1,2}(D)} \leq \sqrt{\varepsilon e^{MT}} ||r^m||_{L_2(0,T)}.$$

Оценим теперь r^m. Из (21) следует, что

$$r^m(t) = \frac{1}{K(l)} \int\limits_0^l \left(K'(x) z_x^{m-1} + K(x)c(x,t)z^{m-1} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{K(l)} \int\limits_0^t R(\xi,t) \int\limits_0^l \left(K'(x) z_x^{m-1} + K(x)c(x,\xi)z^{m-1} \right) dx d\xi.$$

Обозначим

$$A(t) = \frac{1}{K(l)} \int\limits_0^l \left(K'(x) z_x^{m-1} + K(x) c(x,t) z^{m-1}\right) dx,$$

$$B(t) = \int\limits_0^t R(\xi, t) A(\xi) d\xi.$$

Заметим, что

$$A^2(t) \le \frac{2l}{K(l)} \int\limits_0^l \left((K'(x))^2 \left(z_x^{m-1}\right)^2 + K^2(x) c^2(x,t) \left(z^{m-1}\right)^2 \right) dx.$$

Тогда справедливы неравенства

$$A(t) \le a_1 \int\limits_0^l \left((z_x^m)^2 + (z^m)^2 \right) dx,$$

$$B(t) \le t R_0^2 a_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^l \left((z_x^m)^2 + (z^m)^2 \right) dx dt,$$

из которых следует, что

$$(r^m)^2 \le 2a_1 \int\limits_0^l \left((z_x^m)^2 + (z^m)^2 \right) dx + 2t R_0^2 a_1 \int\limits_0^t \int\limits_0^l \left((z_x^m)^2 + (z^m)^2 \right) dx dt.$$

Проинтегрировав последнее неравенство, получим

$$||r^m||_{L_2(0,T)} \le \sqrt{L} ||z^{m-1}||_{W_2^{1,2}(D)}, \qquad L = 2a_1(1 + T^2 R_0^2).$$

Выберем ε так, чтобы $\varepsilon L C(T) = q < 1$. Тогда из (16), (17) следует, что

$$||z^m||_{W_2^{1,2}(D)} \le q ||z^{m-1}||_{W_2^{1,2}(D)},$$
$$||r^m||_{L_2(0,T)} \le q ||r^{m-1}||_{L_2(0,T)}.$$

В силу двух последних неравенств последовательность $\{(\tilde{u}^m, p^m)\}$ фундаментальна.

Так как $W_2^{1,2}(D)$ и $L_2(0,T)$ полные пространства, то фундаментальная последовательность $\{(\tilde{u}^m, p^m)\}$ сходится к элементу $(\tilde{u}, p)$, где $\tilde{u}(x,t) \in W_2^{1,2}(D)$, $p(t) \in L_2(0,T)$. Но так как из сильной сходимости следует слабая, то, переходя к пределу в (21) и (22), мы получим соответственно тождества (5) и (12).

Поскольку тождества (5) и (10), (6) и (12) эквивалентны, то существование обобщенного решения задачи (1)–(4) доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пулькина Л. С.* Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Мат. заметки. 2003. Т. 74, вып. 3. С. 435–445.
2. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Бейлин Сергей Александрович
Россия, Самара, Самарский государственный университет
`sbeilin@ssu.samara.ru`