УДК 517.955.8

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВА

Л. Н. Булдыгерова, Г. В. Демиденко

Рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения Соболева

$$\begin{aligned}&\triangle u_{tt} + u_{x_n x_n} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0,\ x \in R_n,\\ &u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,\end{aligned}$$

где $f(x) \in S(R_n)$, $\lambda \geq 0$ — параметр, $n \geq 3$. Установлены асимптотические разложения при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ в зависимости от параметра λ.

1. Введение

В работе рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения Соболева [1]

$$\begin{aligned}&\triangle u_{tt} + u_{x_n x_n} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0,\ x \in R_n,\\ &u|_{t=0} = 0,\\ &u_t|_{t=0} = 0,\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $f(x) \in S(R_n)$, $\lambda \geq 0$ — параметр, $n \geq 3$. Решение задачи однозначно определяется в классе функций, убывающих при $|x| \to \infty$ [2]. Цель работы — получение асимптотических разложений решений при $t \to \infty$.

Систематическое изучение свойств решений уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, а также спектральных свойств соответстующих операторов, было начато в работах С. Л. Соболева и его учеников (см. работы 9–11 в [1, часть I], а также библиографию в [3]). В настоящее время имеется большое число публикаций, в которых изучается поведение при $t \to \infty$ решений краевых задач для конкретных уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. В частности, исследования асимптотического поведения при $t \to \infty$ решений неоднородной системы Соболева проводились в [4, 5].

В настоящей работе мы получаем асимптотические разложения при $t \to \infty$ для решений $u(t,\, x,\, \lambda)$ задачи Коши (1.1) в зависимости от параметра λ.

Если $\lambda > 1$, то при любом $x \in R_n$ решение выходит на периодический режим

$$u(t,\, x,\, \lambda) = e^{i\lambda t} v(x,\, \lambda) + \omega(x',\, \lambda) + O(\frac{1}{\sqrt{t}}), \quad t \to \infty, \tag{1.2}$$

где $v(x,\, \lambda)$ — решение эллиптического уравнения

$$\lambda^2 \triangle v - v_{x_n x_n} = -f(x), \tag{1.3}$$

убывающее при $|x| \to \infty$, а $\omega(x',\, \lambda)$ — функция, зависящая от $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и λ. Интересно, что при условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x', x_n)\, dx_n \equiv 0$ функция $\omega(x',\, \lambda)$ тождественно равна нулю, при этом скорость выхода решения $u(t,\, x,\, \lambda)$ на периодический режим возрастает.

Работа поддержана грантами РФФИ № 03-01-00095, № 04-01-00750.

Если $0 \leq \lambda \leq 1$, то разложение (1.2) не имеет места. В частности, можно привести примеры функций $f(x)$, при которых

$$|v(x,\,\lambda)| \to \infty, \quad \omega(x',\,\lambda) \to \omega(x',\,1), \quad \lambda \to 1, \tag{1.4}$$

т. е. наблюдается резонанс. Однако, если на решение задачи Коши подействовать волновым оператором $(D^2_{x_n} - \lambda^2\triangle)$, то для полученной функции имеет место аналог представления (1.2).

Краткое изложение результатов работы опубликовано в [6].

2. Формулировка результатов

Сформулируем основные утверждения об асимптотическом поведении решения задачи Коши (1.1).

Теорема 1. *Пусть $\lambda > 1$, тогда решение задачи Коши* (1.1) *представимо в виде*

$$u(t,x,\lambda) = e^{i\lambda t}v(x,\lambda) + \widetilde{u}(t,x,\lambda), \tag{2.1}$$

где $v(x,\lambda)$ — решение эллиптического уравнения (1.3), *стремящееся к нулю при $|x| \to \infty$, а для функции $\widetilde{u}(t,x,\lambda)$ на любом компакте $K \subset R_n$ имеет место оценка*

$$\sup_{x\in K}\left|\widetilde{u}(t,x,\lambda) - \frac{\pi}{i\lambda(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_{n-1}} e^{ix'\xi'}\frac{1}{|\xi'|}\widehat{f}(\xi',0)\,d\xi'\right| \leq \frac{c(K)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \tag{2.2}$$

Следствие. *Пусть $\lambda > 1$ и функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x',x_n)\,dx_n \equiv 0. \tag{2.3}$$

Тогда на любом компакте $K \subset R_n$ для решения задачи Коши (1.1) *справедливо асимптотическое представление*

$$u(t,x,\lambda) = e^{i\lambda t}v(x,\lambda) + O(t^{-(n-1)/2}), \quad t \to \infty,$$

где $v(x,\lambda)$ — решение уравнения (1.3), *убывающее при $|x| \to \infty$.*

Отметим, что условие $\lambda > 1$ в теореме существенно, и в случае $\lambda \leq 1$ представление (2.1) не выполнено. Действительно, при $\lambda > 1$ решение уравнения (1.3) имеет вид

$$v(x,\lambda) = \frac{1}{(n-2)\sigma_n\lambda}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}\int\limits_{R_n}\frac{f(s)}{[|x'-s'|^2 + \frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)}(x_n-s_n)^2]^{(n-2)/2}}\,ds.$$

Из этой формулы и (2.2) вытекает (1.4) для широкого класса функций $f(x)$, т. е. имеет место резонанс. Однако, если на решение задачи Коши (1.1) подействовать дифференциальным оператором $(D^2_{x_n} - \lambda^2\triangle)$, то для полученной функции можно установить аналоги теоремы 1. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть $0 < \lambda \leq 1$, тогда имеет место представление*

$$(D^2_{x_n} - \lambda^2\triangle)u(t,x,\lambda) = e^{i\lambda t}f(x) + w(t,x,\lambda),$$

при этом для функции $w(t,x,\lambda)$ на любом компакте $K \subset R_n$ выполнена оценка

$$\sup_{x\in K}\left| w(t,x,\lambda) - \frac{\lambda\pi}{i(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_{n-1}} e^{ix'\xi'}|\xi'|\widehat{f}(\xi',0)\,d\xi'\right| \le \frac{c(K)}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Следствие. *Пусть $0 < \lambda \le 1$ и функция $f(x)$ удовлетворяет условию (2.3). Тогда на любом компакте $K \subset R_n$ имеет место асимптотическое представление*

$$(D^2_{x_n} - \lambda^2\triangle)u(t,x,\lambda) = e^{i\lambda t}f(x) + O(t^{-(n-1)/2}), \quad t \to \infty.$$

Теорема 3. *Пусть $\lambda = 0$. Тогда на любом компакте $K \subset R_n$ для решения задачи (1.1) имеет место*

$$D^2_{x_n}u(t,x,\lambda) = f(x) + O(t^{-(n-1)/2}), \quad t \to \infty.$$

3. Вывод асимптотических разложений

Доказательство теорем основано на анализе явных формул решений задачи Коши (1.1), убывающих при $|x| \to \infty$. Эти формулы имеют вид

$$u(t,x,\lambda) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}\left(\int\limits_0^t \psi(t-\tau,\xi,\lambda)e^{i\lambda\tau}\widehat{f}(\xi)d\tau\right)d\xi, \quad \lambda \ge 0, \tag{3.1}$$

где $\psi(t,\xi,\lambda)$ — решение задачи Коши

$$|\xi|^2\psi_{tt} + \xi_n^2\psi = 0, \quad \xi \in R_n \setminus \{0\}, \qquad \psi|_{t=0} = 0, \quad \psi_t|_{t=0} = 1.$$

При выводе асимптотического представления для решения $u(t,x,\lambda)$ при $t \to \infty$ мы используем вариант метода стационарной фазы, изложенного в [3, 7].

Доказательство теоремы 1. Решение (3.1) при $\lambda > 1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} &u(t,x,\lambda) = u^1(t,x,\lambda) + u^2(t,x,\lambda) + u^3(t,x,\lambda) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}\sin\left(\frac{t\xi_n}{|\xi|}\right)\frac{i\lambda|\xi|\widehat{f}(\xi)}{(\xi_n^2-\lambda^2|\xi|^2)\xi_n}d\xi + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}\cos\left(\frac{t\xi_n}{|\xi|}\right)\frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi_n^2-\lambda^2|\xi|^2}d\xi \\ &\qquad - e^{i\lambda t}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}\frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi_n^2-\lambda^2|\xi|^2}d\xi. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл $u^1(t,x,\lambda)$. Представим его в виде суммы двух слагаемых и оценим каждое в отдельности. Имеем

$$\begin{aligned} &u^1(t,x,\lambda) \\ &\quad = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}\frac{\lambda|\xi|}{(\xi_n^2-\lambda^2|\xi|^2)}\sin\left(\frac{t\xi_n}{|\xi|}\right)\int\limits_{R_n} e^{-iy'\xi'}\int\limits_0^1 e^{-i\alpha y_n\xi_n}d\alpha y_n f(y)dy\,d\xi \\ &\quad + \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}\frac{i\lambda|\xi|}{(\xi_n^2-\lambda^2|\xi|^2)\xi_n}\sin\left(\frac{t\xi_n}{|\xi|}\right)\widehat{f}(\xi',0)d\xi = u^1_1(t,x,\lambda) + u^1_2(t,x,\lambda). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Вначале рассмотрим функцию $u_2^1(t,x,\lambda)$. Переходя к сферическим координатам

$$\xi_n=\rho\cos\theta_1,\quad \xi_{n-1}=\rho\sin\theta_1\cos\theta_2,\quad \ldots,\quad \xi_1=\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}, \tag{3.3}$$

имеем

$$u_2^1(t,x,\lambda)=\frac{i\lambda}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^{2\pi}\rho^{n-3}e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1(\cos^2\theta_1-\lambda^2)}\phi(\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})$$
$$\times\sin(t\cos\theta_1)\widehat{f}(\xi'(\rho,\theta),0)d\theta d\rho. \tag{3.4}$$

Рассмотрим следующий интеграл при $t\gg 1$

$$J_1=\int\limits_0^\pi e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1(\cos^2\theta_1-\lambda^2)}\sin(t\cos\theta_1)\,\widehat{f}(\xi'(\rho,\theta),0)d\theta_1$$
$$=\Bigg(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt t}}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt t}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt t}}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt t}}^{\pi}\Bigg)e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1(\cos^2\theta_1-\lambda^2)}\sin(t\cos\theta_1)\widehat{f}(\xi'(\rho,\theta),0)d\theta_1$$
$$=J_1^1+J_1^2+J_1^3. \tag{3.5}$$

Так как оба интеграла J_1^1, J_1^3 оцениваются по одной схеме, то рассмотрим, например, J_1^1. Используя тождество

$$\sin(t\cos\theta_1)=\frac{1}{t\sin\theta_1}D_{\theta_1}\cos(t\cos\theta_1), \tag{3.6}$$

получим

$$J_1^1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt t}}e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\sin^{n-3}\theta_1}{t\cos\theta_1(\cos^2\theta_1-\lambda^2)}D_{\theta_1}\cos(t\cos\theta_1)\,\widehat{f}(\xi'(\rho,\theta),0)d\theta_1$$
$$=e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\cos(t\cos\theta_1)\sin^{n-3}\theta_1}{t\cos\theta_1(\cos^2\theta_1-\lambda^2)}\,\widehat{f}(\xi'(\rho,\theta),0)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt t}}$$
$$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt t}}e^{ix\xi(\rho,\theta)}\frac{\cos(t\cos\theta_1)}{t}\Big[\frac{ix\xi_{\theta_1}(\theta)\sin^{n-3}\theta_1}{\cos\theta_1(\cos^2\theta_1-\lambda^2)}\,\widehat{f}(\xi'(\rho,\theta),0)$$
$$+\frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos^2\theta_1(\cos^2\theta_1-\lambda^2)}\,\widehat{f}(\xi'(\rho,\theta),0)+\frac{1}{\cos\theta_1}D_{\theta_1}\frac{\sin^{n-3}\theta_1\widehat{f}(\xi'(\rho,\theta),0)}{(\cos^2\theta_1-\lambda^2)}\Big]d\theta_1$$
$$=J_1^{1,1}+J_1^{1,2}.$$

В силу того, что при больших t выполнено неравенство

$$|\cos\theta_1|\ge\frac{1}{2\sqrt t},\quad \theta_1\in\Big[0,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt t}\Big],$$

получим

$$|J_1^{1,1}|\le\frac{c(\rho,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})}{\sqrt t},\quad t\gg 1.$$

Очевидно, что первое и третье слагаемые в $J_1^{1,2}$ ведут себя как $O(\frac{1}{\sqrt{t}})$ при $t \to \infty$. Оценим второе слагаемое в $J_1^{1,2}$

$$\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}\Big) e^{ix\xi(\rho,\,\theta)} \frac{\cos(t\cos\theta_1)}{t} \frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos^2\theta_1(\lambda^2-\cos^2\theta_1)} \widehat{f}(\xi'(\rho,\,\theta),0)d\theta_1$$

$$= J_1^{1,2,1} + J_1^{1,2,2},$$

где $\delta > 0$ — достаточно маленькое фиксированное число такое, что

$$|\cos\theta_1| \geq \frac{\frac{\pi}{2}-\theta_1}{2}, \quad \theta_1 \in [\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}].$$

Очевидно, имеем

$$|J_1^{1,2,1}| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{t}, \quad |J_1^{1,2,2}| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1.$$

Следовательно,

$$|J_1^1| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \tag{3.7}$$

Аналогично получаем, что

$$|J_1^3| \leq \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \tag{3.8}$$

Рассмотрим интеграл J_1^2 из (3.5). Используя явные выражения для функции $\xi(\rho,\,\theta)$, имеем

$$J_1^2 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}} \exp(ix_1\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1} + \dots + ix_{n-1}\rho\sin\theta_1\cos\theta_2 + ix_n\rho\cos\theta_1)$$

$$\times \frac{\sin^{n-2}\theta_1}{\cos\theta_1(\cos^2\theta_1-\lambda^2)} \sin(t\cos\theta_1) \widehat{f}(\rho\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1},\dots,\rho\sin\theta_1\cos\theta_2,0)d\theta_1$$

$$= \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)} [\exp(ix_1\rho\cos\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1} + \dots + ix_{n-1}\rho\cos\theta_1\cos\theta_2$$

$$- ix_n\rho\sin\theta_1)\cos^{n-2}\theta_1 \widehat{f}(\rho\cos\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1},\dots,\rho\cos\theta_1\cos\theta_2,0)$$

$$- \exp(ix_1\rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1} + \dots + ix_{n-1}\rho\cos\theta_2)$$

$$\times \widehat{f}(\rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1},\dots,\rho\cos\theta_2,0)]d\theta_1$$

$$+ \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \exp(ix_1\rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1} + \dots + ix_{n-1}\rho\cos\theta_2) \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1(\sin^2\theta_1-\lambda^2)}$$

$$\times \widehat{f}(\rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1},\dots,\rho\cos\theta_2,0)d\theta_1 = J_1^{2,1} + J_1^{2,2}. \tag{3.9}$$

Разложим разность в квадратных скобках в J_1^2 в ряд Тейлора по θ_1 с остаточным членом в интегральной форме. Фиксируя параметры $\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1}$, введем

обозначение

$$g(\theta_1) = \exp(ix_1\rho\cos\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1} + \dots + ix_{n-1}\rho\cos\theta_1\cos\theta_2 - ix_n\rho\sin\theta_1) \\ \times \cos^{n-2}\theta_1 \widehat{f}(\rho\cos\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1},\dots,\rho\cos\theta_1\cos\theta_2, 0).$$

Имеем

$$g(\theta_1) - g(0) = g'(0)\theta_1 + \int\limits_0^{\theta_1} g''(s)(\theta_1 - s)ds. \tag{3.10}$$

Заметим, что интеграл в (3.10) есть $O(\theta_1^2)$ при $\theta_1 \to \infty$. Используя (3.10), перепишем интеграл $J_1^{2,1}$ в виде

$$J_1^{2,1} = \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1(\sin^2\theta_1 - \lambda^2)}\Big[g'(0)\theta_1 + \int\limits_0^{\theta_1} g''(s)(\theta_1 - s)ds\Big]d\theta_1.$$

Первый интеграл в последнем выражении равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции. Отсюда получаем неравенство

$$|J_1^{2,1}| \le \frac{c(x,\rho,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \tag{3.11}$$

Оценим интеграл $J_1^{2,2}$ из (3.9). Для этого рассмотрим интеграл вида

$$\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1(\sin^2\theta_1 - \lambda^2)}d\theta_1.$$

Нетрудно показать, что

$$\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \Big|\frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1(\lambda^2 - \sin^2\theta_1)} - \frac{\sin(t\theta_1)}{\lambda^2\theta_1}\Big|d\theta_1 \le \frac{c}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \tag{3.12}$$

Действительно,

$$\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \Big|\frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1(\lambda^2 - \sin^2\theta_1)} - \frac{\sin(t\theta_1)}{\lambda^2\theta_1}\Big|d\theta_1$$

$$\le \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \Big|\frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1((\lambda^2-1)\sin^2\theta_1 + \lambda^2\cos^2\theta_1)} - \frac{\sin(t\theta_1)}{\sin\theta_1((\lambda^2-1)\sin^2\theta_1 + \lambda^2\cos^2\theta_1)}\Big|d\theta_1$$

$$+ \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \Big|\frac{\sin(t\theta_1)}{\sin\theta_1((\lambda^2-1)\sin^2\theta_1 + \lambda^2\cos^2\theta_1)} - \frac{\sin(t\theta_1)}{\theta_1((\lambda^2-1)\sin^2\theta_1 + \lambda^2\cos^2\theta_1)}\Big|d\theta_1$$

$$+ \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \Big|\frac{\sin(t\theta_1)}{\theta_1(\lambda^2 - \sin^2\theta_1)} - \frac{\sin(t\theta_1)}{\lambda^2\theta_1}\Big|d\theta_1 \le \frac{2}{\lambda^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\cos^2\theta_1\sin\theta_1}\Big|\int\limits_{t\theta_1}^{t\sin\theta_1} \cos y dy\Big|d\theta_1$$

$$+\frac{2}{\lambda^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{|\sin(t\theta_1)||\theta_1-\sin\theta_1|}{\theta_1\cos^2\theta_1\sin\theta_1}d\theta_1+2\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{\sin^2\theta_1}{\lambda^2\theta_1(\lambda^2-\sin^2\theta_1)}d\theta_1$$

$$\le\frac{c_1t}{\lambda^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{\theta_1^3}{3!\theta_1}d\theta_1+\frac{c_2}{\lambda^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{\theta_1^3}{3!\theta_1^2}d\theta_1+\frac{2}{\lambda^2(\lambda^2-1)}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\theta_1d\theta_1\le\frac{c}{\sqrt{t}}.$$

Учитывая неравенство для интеграла Дирихле

$$\left|\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{\sin(t\theta)}{\theta}d\theta-\pi\right|\le\frac{c}{\sqrt{t}},\quad t\gg1,$$

и оценку (3.12), получим

$$\left|\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1(\lambda^2-\sin^2\theta_1)}d\theta_1-\frac{\pi}{\lambda^2}\right|$$

$$\le\left|\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{\sin(t\sin\theta_1)}{\sin\theta_1(\lambda^2-\sin^2\theta_1)}-\frac{\sin(t\theta_1)}{\lambda^2\theta_1}d\theta_1\right|+\left|\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{\sin(t\theta_1)}{\lambda^2\theta_1}d\theta_1-\frac{\pi}{\lambda^2}\right|\le\frac{c}{\sqrt{t}},\quad t\gg1.$$

Используя эту оценку, будем иметь

$$|J_1^{2,2}+\frac{\pi}{\lambda^2}\exp(ix_1\rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1}+\dots+ix_{n-1}\rho\cos\theta_2)$$
$$\times\widehat{f}(\rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1},\dots,\rho\cos\theta_2,0)|\le\frac{c}{\sqrt{t}},\quad t\gg1.\quad(3.13)$$

В силу (3.4), (3.5), (3.7)–(3.9), (3.11), (3.13) при больших t имеет место оценка

$$\left|u_2^1(t,x,\lambda)-\frac{\pi}{i\lambda(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_0^\infty\rho^{n-3}\int\limits_0^\pi\dots\int\limits_0^{2\pi}\exp(ix_1\rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1}+\dots\right.$$
$$\left.+ix_{n-1}\rho\cos\theta_2)\widehat{f}(\rho\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1},\dots,\rho\cos\theta_2,0)d\theta'\,d\rho\right|\le\frac{c}{\sqrt{t}}.\quad(3.14)$$

В (3.14) сделаем замену переменных

$$s_{n-1}=\rho\cos\theta_2,\ \dots,\ s_1=\rho\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1},$$

получим

$$\left|u_2^1(t,x,\lambda)-\frac{\pi}{i\lambda(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_{n-1}}e^{ix's'}\frac{1}{|s'|}\widehat{f}(s',0)ds'\right|\le\frac{c}{\sqrt{t}},\quad t\gg1.\quad(3.15)$$

Оценим функцию $u_1^1(t,x,\lambda)$. Поскольку

$$|(1-\lambda^2)\xi_n^2-|\xi'|^2|\ge c_1|\xi|^2,$$

достаточно рассмотреть

$$I = \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} \frac{1}{|\xi|} \sin \frac{t\xi_n}{|\xi|} \left(\int\limits_{R_n} e^{-iy'\xi'} \left(\int\limits_0^1 e^{-i\alpha y_n \xi_n} d\alpha \right) y_n f(y) dy \right) d\xi.$$

Переходя к сферическим координатам (3.3) в I, получим

$$I = \int\limits_{R_n} \Bigg(\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^{2\pi} e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\,\theta)} \left[\int\limits_0^1 e^{i(x_n - \alpha y_n)\rho\cos\theta_1} d\alpha \right]$$

$$\times \rho^{n-2} \sin^{n-2}\theta_1 \sin{(t\cos\theta_1)} d\theta\, d\rho \Bigg) y_n f(y) dy.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_2 = \int\limits_0^\pi e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\,\theta)} \left[\int\limits_0^1 e^{i(x_n - \alpha y_n)\rho\cos\theta_1} d\alpha \right] \sin^{n-2}\theta_1 \sin{(t\cos\theta_1)} d\theta_1.$$

Используя тождество (3.6), получим

$$J_2 = \frac{1}{t} \int\limits_0^\pi e^{i(x'-y')\xi'(\rho,\,\theta)} \left[\int\limits_0^1 e^{i(x_n - \alpha y_n)\rho\cos\theta_1} d\alpha \right] \sin^{n-3}\theta_1 D_{\theta_1} \cos{(t\cos\theta_1)} d\theta_1$$

$$= \frac{1}{t} F(x-y,\rho,\theta_{n-1},\ldots,\theta_1) \sin^{n-3}\theta_1 \cos{(t\cos\theta_1)} \Big|_0^\pi - \frac{1}{t} \int\limits_0^\pi [\sin^{n-3}\theta_1$$

$$\times D_{\theta_1} F(x-y,\rho,\theta_{n-1},\ldots,\theta_1) + (n-3)\sin^{n-4}\theta_1 \cos\theta_1 F(x-y,\rho,\theta_{n-1},\ldots,\theta_1)]$$

$$\times \cos{(t\cos\theta_1)} d\theta_1 = J_2^1 + J_2^2 + J_2^3.$$

Рассмотрим случай $n = 3$. Очевидно, что

$$|J_2^1| \le \frac{c}{t}, \quad t \gg 1. \tag{3.16}$$

Разобъем интеграл J_2^2 на три слагаемых

$$J_2^2 = -\frac{1}{t} \Bigg(\int\limits_0^{\sqrt{t}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi - \frac{1}{\sqrt{t}}} + \int\limits_{\pi - \frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi} \Bigg) D_{\theta_1} F(x-y,\rho,\theta_2,\theta_1) \cos{(t\cos\theta_1)} d\theta_1$$

$$= J_2^{2,1} + J_2^{2,2} + J_2^{2,3} \tag{3.17}$$

и оценим их по отдельности. Очевидно, имеет место следующая оценка

$$|J_2^{2,1} + J_2^{2,3}| \le \frac{c(x-y,\rho)}{t^{3/2}}, \quad t \gg 1. \tag{3.18}$$

Проинтегрируем в интеграле $J_2^{2,2}$ по частям, воспользовавшись тождеством

$$\cos{(t\cos\theta_1)} = \frac{-1}{t\sin\theta_1} D_{\theta_1} \sin{(t\cos\theta_1)}.$$

Тогда будем иметь

$$J_2^{2,2} = \frac{1}{t^2} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi-\frac{1}{\sqrt{t}}} D_{\theta_1} \sin(t\cos\theta_1) \frac{D_{\theta_1} F(x-y,\rho,\theta_2,\theta_1)}{\sin\theta_1} d\theta_1$$

$$= \frac{1}{t^2} \sin(t\cos\theta_1) \frac{D_{\theta_1} F(x-y,\rho,\theta_2,\theta_1)}{\sin\theta_1} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi-\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

$$- \frac{1}{t^2} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\pi-\frac{1}{\sqrt{t}}} \sin(t\cos\theta_1) \frac{D^2_{\theta_1} F(x-y,\rho,\theta_2,\theta_1)}{\sin^2\theta_1} d\theta_1 = J_2^{2,2,1} + J_2^{2,2,2}. \quad (3.19)$$

В силу того, что при больших t выполнено неравенство

$$|\sin\theta_1| \geq \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \theta_1 \in \Big[\frac{1}{\sqrt{t}}, \pi - \frac{1}{\sqrt{t}}\Big],$$

получим

$$|J_2^{2,2,1}| \leq \frac{c(x-y,\rho)}{t^{3/2}}, \quad t \gg 1. \quad (3.20)$$

Оценим второе слагаемое в (3.19)

$$J_2^{2,2,2} = -\frac{1}{t^2}\Bigg(\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi-\delta} + \int\limits_{\pi-\delta}^{\pi-\frac{1}{\sqrt{t}}} \Bigg) \sin(t\cos\theta_1) \frac{D^2_{\theta_1} F(x-y,\rho,\theta_2,\theta_1)}{\sin^2\theta_1} d\theta_1$$

$$= J_2^{2,2,2,1} + J_2^{2,2,2,2} + J_2^{2,2,2,3}, \quad (3.21)$$

где $\delta > 0$ — достаточно маленькое фиксированное число такое, что

$$|\sin\theta_1| \geq \frac{\theta_1}{2}, \quad \theta_1 \in \Big[\frac{1}{\sqrt{t}}, \delta\Big].$$

Отсюда получаем

$$|J_2^{2,2,2,1} + J_2^{2,2,2,3}| \leq \frac{c(x-y,\rho)}{t^{3/2}}, \quad |J_2^{2,2,2,2}| \leq \frac{c(x-y,\rho)}{t^2}, \quad t \gg 1. \quad (3.22)$$

Из (3.16)–(3.22) следует, что

$$|J_2| \leq \frac{c(x-y,\rho)}{t}, \quad t \gg 1.$$

Если же $n \neq 3$, то $J_2^1 = 0$. Слагаемое J_2^2 проинтегрируем по частям $n-3$ раза, а слагаемое J_2^3 проинтегрируем по частям $n-4$ раза. Далее проводя аналогичные рассуждения, что и при оценке J_2 для $n=3$, будем иметь в общем случае следующую оценку

$$|J_2| \leq \frac{c(x-y,\rho)}{t^{(n-1)/2}}, \quad t \gg 1.$$

Тогда получаем

$$\sup_{x\in K} |u_1^1(t,x,\lambda)| \leq \frac{c}{t^{(n-1)/2}}, \quad t \gg 1. \quad (3.23)$$

Оценивая функцию $u^2(t,x,\lambda)$ по той же схеме, что и функцию $u_1^1(t,x,\lambda)$, получим неравенство

$$\sup_{x\in K}|u^2(t,x,\lambda)| \leq \frac{c}{t^{(n-1)/2}}, \quad t \gg 1. \tag{3.24}$$

Из (3.2), (3.15), (3.23), (3.24) получим требуемую оценку. Теорема доказана.

Доказательство следствия. Применим к равенству $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x',x_n)\,dx_n = 0$ преобразование Фурье по x', тогда получим $\widehat{f}(\xi',0) = 0$, а отсюда следует, что $u_2^1(t,x,\lambda) = 0$. В силу (3.2), (3.23), (3.24) получаем требуемый результат.

Доказательство теоремы 2. Применим к решению задачи Коши $u(t,x,\lambda)$ волновой оператор $[D_{x_n}^2 - \lambda^2\triangle]$, тогда результат можно представить в следующем виде

$$[D_{x_n}^2 - \lambda^2\triangle]u(t,x,\lambda) = w(t,x,\lambda) + e^{i\lambda t}f(x)$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}\sin\Big(\frac{t\xi_n}{|\xi|}\Big)\widehat{f}(\xi)\frac{\lambda|\xi|}{i\xi_n}d\xi - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}\cos\Big(\frac{t\xi_n}{|\xi|}\Big)\widehat{f}(\xi)d\xi + e^{i\lambda t}f(x).$$

Первое слагаемое в $w(t,x,\lambda)$ оценивается по той же схеме, что и $u^1(t,x,\lambda)$ для случая $\lambda > 1$. Оценка второго слагаемого в $w(t,x,\lambda)$ проведена в [7, гл. 3].

Доказательство следствия к теореме 2, а также теоремы 3 вытекает из явной формулы решения (см. [7, гл. 3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал “Гео” Изд-ва СО РАН, 2003. С. 333–393.
2. *Гальперн С. А.* Задача Коши для уравнения С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 4. С. 758–774.
3. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
4. *Масленникова В. Н., Пал Продип Кумар.* О стабилизации и предельной амплитуде решения задачи Коши для неоднородных систем Соболева // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 3. С. 142–153.
5. *Масленникова В. Н., Гиниатулин А. И.* Спектральные свойства операторов для систем гидродинамики вращающейся жидкости и неединственность предельной амплитуды // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 157–171.
6. *Булдыгерова Л. Н., Демиденко Г. В.* Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения Соболева // IV Междунар. конф. по математическому моделированию. Тез. докл. Якутск: Изд-во ГУ “РОНПО”, 2004. С. 10–11.
7. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.

Булдыгерова Лина Николаевна
Россия, Новосибирск, Новосибирский государственный университет
b_lina@gorodok.net

Демиденко Геннадий Владимирович
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
demidenk@math.nsc.ru